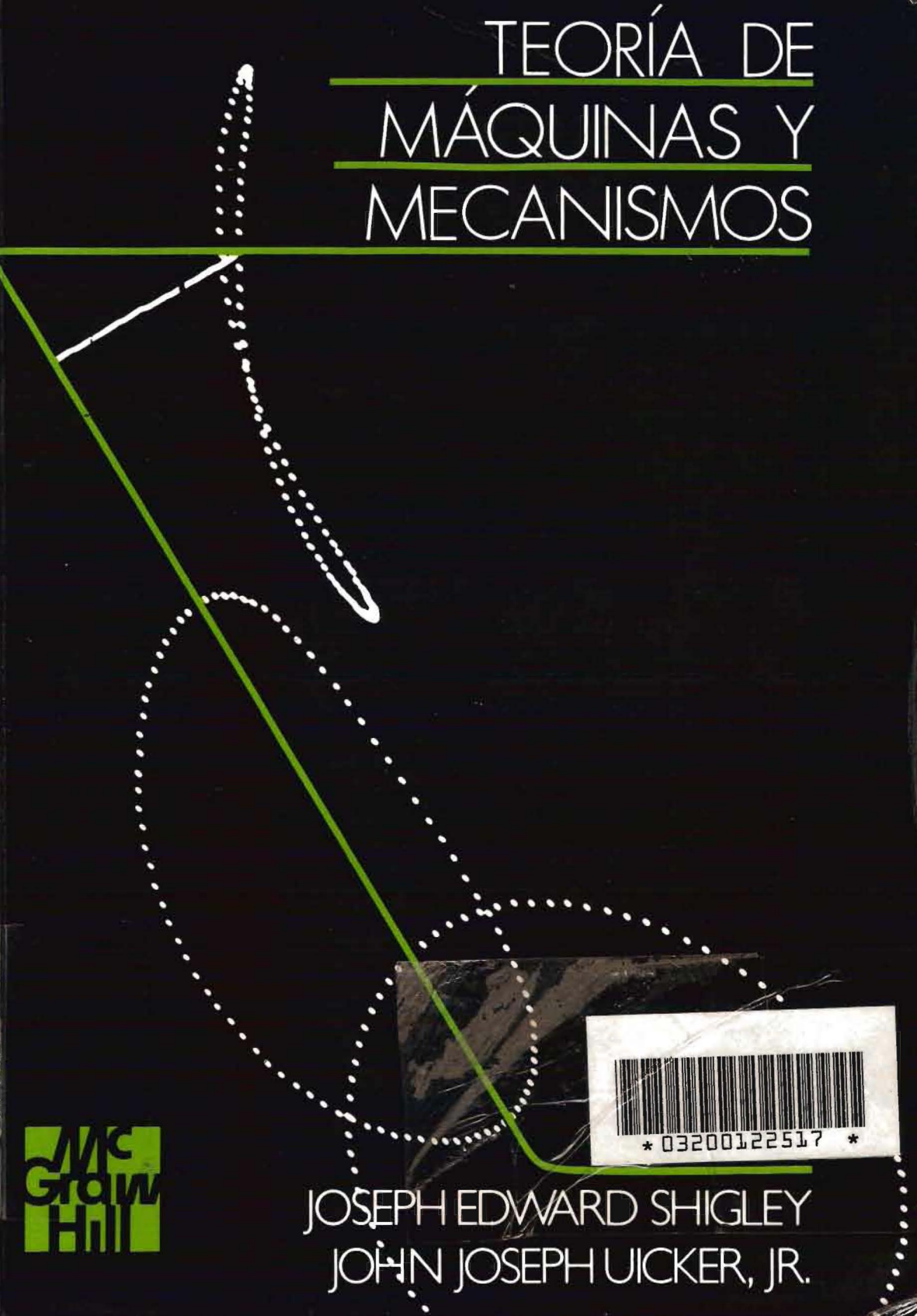
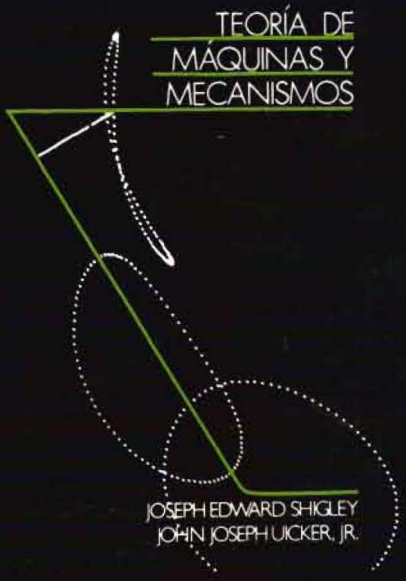
TEORÍA DE MÁQUINAS Y MECANISMOS



* 03200122517 *

JOSEPH EDWARD SHIGLEY
JOHN JOSEPH UICKER, JR.

Mc Graw Hill



OTROS TÍTULOS McGRAW-HILL EN ESPAÑOL CON TEMAS AFINES:

AVNER/	Introducción a la metalurgia física 2/e.
BEER/	Mecánica vectorial para Ingenieros, T-1, Estática, 3/e.
BEER/	Mecánica vectorial para Ingenieros, T-2, Dinámica, 3/e.
BOOTHROYD/	Fundamentos de corte de metales y de las máquinas herramientas.
FLINN/	Materiales de ingeniería y sus aplicaciones
FRENCH/	Dibujo de ingeniería 3/e.
GUY/	Fundamentos de ciencia de materiales
HAM/	Mecánica de máquinas
JENSEN/	Diseño y dibujo de ingeniería
OZISIK/	Transferencia de calor
REYNOLDS	
PERKINS/	Ingeniería termodinámica
SHIGLEY/	Diseño en ingeniería mecánica 2/e.
STREETER/	Mecánica de los fluidos 6/e.
WYLIE/	Matemáticas superiores para ingeniería 2/e.

9 789684 512979

ISBN 968-451-297-X

Mc Graw Hill

621.8
21160

TEORÍA DE MÁQUINAS Y MECANISMOS

TEORÍA DE MÁQUINAS Y MECANISMOS

Joseph Edward Shigley
Professor Emeritus of Mechanical Engineering
The University of Michigan

John Joseph Uicker Jr.
Professor of Mechanical Engineering
University of Wisconsin, Madison

TRADUCCIÓN:

Ing. Hortensia C. de Contin
Universidad de Berkeley

REVISIÓN TÉCNICA:

José H. Pérez Castellanos
Ingeniero Industrial
Profesor Titular
en la ESIME, I.P.N.

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND
LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

7160

TEORÍA DE MÁQUINAS Y MECANISMOS

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1988, respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE MEXICO, S.A. DE C.V.
Atlacomulco 499-501, Fracc. Industrial San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

ISBN 968-451-297-X

Traducido de la primera edición en inglés de
THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS

Copyrigth © MCMLXXX, by McGraw-Hill Book Co., U. S. A.

ISBN 0-07-056884-7

22013456789 F.I.-82 09876543201

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Enero del 2001 en
Litográfica Ingramex
Centeno Núm. 162-1
Col. Granjas Esmeralda
Delegación Iztapalapa
09810 México, D.F.

Se tiraron 1,000 ejemplares

CONTENIDO

Prefacio XI

Capítulo 1 Geometría del movimiento 1

1-1 Introducción 1-2 Análisis y síntesis 1-3 Ciencia de la mecánica 1-4 Terminología, definiciones e hipótesis 1-5 Mecanismos planos esféricos y espaciales 1-6 Movilidad 1-7 Inversión cinemática 1-8 Ley de Grashof 1-9 Ventaja mecánica 1-10 Curvas del acoplador 1-11 Mecanismos de línea recta 1-12 Mecanismos de retorno rápido

Capítulo 2 Posición y desplazamiento 29

2-1 Sistemas de coordenadas 2-2 Posición de un punto 2-3 Diferencia de posición entre dos puntos 2-4 Posición aparente de un punto 2-5 Posición absoluta de un punto 2-6 Ecuación de cierre del circuito 2-7 Análisis gráfico de la posición mecanismos planos 2-8 Soluciones de álgebra compleja de ecuaciones vectoriales en el plano 2-9 Soluciones de Chace para ecuaciones vectoriales en el plano 2-10 Análisis algebraico de la posición de eslabonamientos planos 2-11 Desplazamiento de un punto en movimiento 2-12 Diferencia de desplazamientos entre dos puntos 2-13 Rotación y translación 2-14 Desplazamiento aparente 2-15 Desplazamiento absoluto

Capítulo 3 Velocidad 74

3-1 Definición de velocidad 3-2 Rotación de un cuerpo rígido 3-3 Diferencia de velocidades entre puntos del mismo cuerpo rígido 3-4 Análisis gráfico de la velocidad; polígonos de velocidades 3-5 Velocidad aparente de un punto en un sistema de coordenadas en

movimiento 3-6 Velocidad angular aparente 3-7 Contacto directo y contacto por rodadura 3-8 Análisis de la velocidad utilizando álgebra compleja 3-9 Análisis de la velocidad mediante álgebra vectorial 3-10 Centro instantáneo de velocidad 3-11 Teorema de Aronhold-Kennedy de los tres centros 3-12 Localización de centros instantáneos de velocidad 3-13 Análisis de la velocidad usando centros instantáneos 3-14 Teorema de la razón de velocidades angulares 3-15 Teorema de Freudenstein 3-16 Índices de mérito; ventaja mecánica 3-17 Centrodas

Capítulo 4 Aceleración 130

4-1 Definición de aceleración 4-2 Aceleración angular de un cuerpo rígido 4-3 Diferencia de aceleraciones entre puntos de un cuerpo rígido 4-4 Análisis gráfico de la aceleración; polígonos de aceleraciones 4-5 Aceleración aparente de un punto en un sistema de coordenadas en movimiento 4-6 Aceleración angular aparente 4-7 Contacto directo y contacto por rodadura 4-8 Métodos analíticos del análisis de la aceleración 4-9 Centro instantáneo de aceleración 4-10 Ecuaciones de Euler-Savary 4-11 Construcciones de Bobillier 4-12 Cúbica de curvatura estacionaria

Capítulo 5 Métodos numéricos en el análisis cinemático 178

5-1 Introducción 5-2 Programación de una calculadora electrónica 5-3 Programación de las ecuaciones de Chace 5-4 Un programa de computadora para mecanismos planos 5-5 Programas generalizados para análisis de mecanismos

Capítulo 6 Diseño de levas 204

6-1 Clasificación de las levas y los seguidores 6-2 Diagramas desplazamientos 6-3 Diseño gráfico de perfiles de levas 6-4 Derivadas del movimiento del seguidor 6-5 Levas de gran velocidad 6-6 Movimientos estándar de las levas 6-7 Igualación de las derivadas de los diagramas de desplazamientos 6-8 Diseño polinomial de levas 6-9 Leva de placa con seguidor oscilante de cara plana 6-10 Leva de placa con seguidor oscilante con rodillo

Capítulo 7 Engranes rectos o cilíndricos 258

7-1 Terminología y definiciones 7-2 Ley fundamental del engranaje 7-3 Propiedades de la involuta 7-4 Engranes intercambiables; Normas AGMA 7-5 Fundamentos de la acción de los dientes de engranes 7-6 Formación de los dientes de engranes 7-7 Interferencia y socavación 7-8 Razón de contacto 7-9 Variación de la distancia entre centros 7-10 Involuciones 7-11 Dientes no estándar de engranes 7-12 El perfil cicloidal

Capítulo 8 Engranes helicoidales, de gusano y cónicos 300

8-1 Engranes helicoidales de ejes paralelos
8-2 Relaciones entre los dientes de engranes helicoidales 8-3
8-3 Proporciones de los dientes en los engranes helicoidales
8-4 Contacto de los dientes en los engranes helicoidales 8-5 Engranes de espina de pescado 8-6 Engranes helicoidales de ejes cruzados
8-7 Engranaje de gusano 8-8 Engranes cónicos de dientes rectos
8-9 Proporciones de los dientes en los engranes cónicos 8-10
8-10 Corona dentada y engranes de cara 8-11 Engranes cónicos espirales 8-12 Engranes hipoidales

Capítulo 9 Trenes de mecanismos 325

9-1 Trenes de engranes de ejes paralelos y definiciones
9-2 Ejemplos de trenes de engranes 9-3 Determinación del número de dientes 9-4 Trenes de engranes epicíclicos 9-5 Trenes epicíclicos de engranes cónicos 9-6 Solución de trenes planetarios mediante fórmula 9-7 Análisis tabular de trenes planetarios 9-8 Diferenciales

Capítulo 10 Síntesis de eslabonamientos 343

10-1 Síntesis del tipo, del número y dimensional 10-2 Generación de la función, generación de la trayectoria y guía del cuerpo
10-3 Posiciones de presición; espaciamiento de Chebychev
10-4 Síntesis de posición del mecanismo general de corredera y manivela 10-5 Síntesis de mecanismos de manivela y oscilador
10-6 Mecanismos de manivela-oscilador con ángulo óptimo de transmisión 10-7 Síntesis de tres posiciones 10-8 Reducción de la posición del punto; cuatro puntos de presición 10-9 Método de la figura sobrepuesta 10-10 Síntesis de la curva del acoplador
10-11 Eslabonamientos afines; teorema de Roberts-Chebychev
10-12 Síntesis analítica utilizando álgebra compleja 10-13 Ecuación de Freudenstein 10-14 Síntesis de los mecanismos de detención
10-15 Movimiento rotatorio intermitente

Capítulo 11 Mecanismos espaciales 382

11-1 Introducción a los eslabonamientos espaciales
11-2 Mecanismos especiales 11-3 Problemas de la posición
11-4 Análisis de la posición del mecanismo *RGGR* 11-5 Análisi de la velocidad y la aceleración del eslabonamiento *RGGR*
11-6 Ángulos eulerianos 11-7 Un teorema sobre velocidades y aceleraciones angulares 11-8 Articulación universal de Hooke

Capítulo 12 Fuerzas estáticas 409

12-1 Introducción 12-2 Sistemas de unidades 12-3 Fuerzas aplicadas y de restricción 12-4 Condiciones para el equilibrio

12-5 Diagramas de cuerpo libre 12-6 Programas del cálculo
12-7 Elementos de dos y tres fuerzas 12-8 Elementos de cuatro fuerzas
12-9 Análisis de fuerzas en engranes rectos y helicoidales
12-10 Engranes cónicos rectos 12-11 Modelos de fuerza de fricción
12-12 Análisis de fuerzas estáticas con fricción

Capítulo 13 Fuerzas dinámicas 448

13-1 Análisis de fuerzas en cuerpos rigidos y elásticos
13-2 Centroides y centros de masa 13-3 Momento de inercia
13-4 Fuerzas de inercia y el principio de D'Alembert 13-5 Principio de superposición 13-6 Un ejemplo de análisis gráfico 13-7 Rotación alrededor de un centro fijo 13-8 Medición del momento de inercia 13-9 Análisis de un mecanismo de cuatro barras
13-10 Fuerzas y momentos de sacudimiento 13-11 Análisis por computadora

Capítulo 14 Dinámica de los motores de pistones 480

14-1 Tipos de motores 14-2 Diagramas del indicador
14-3 Análisis dinámico; generalidades 14-4 Fuerzas de los gases
14-5 Masas equivalentes 14-6 Fuerzas de inercia 14-7 Cargas sobre los cojinetes en el motor de un solo cilindro 14-8 Momento de torsión del cigüeñal 14-9 Fuerzas de sacudimiento del motor 14-
14-10 Sugerencias acerca de los cálculos de máquinas por computadora

Capítulo 15 Balanceo 509

15-1 Desbalanceo estático 15-2 Ecuación del movimiento
15-3 Máquinas de balanceo estático 15-4 Desbalanceo dinámico
15-5 Análisis del desbalanceo 15-6 Balanceo dinámico 15-7 Balanceo de máquinas 15-8 Balanceo de campo con la calculadora programable 15-9 Balanceo del motor de un solo cilindro
15-10 Balanceo de motores con varios cilindros 15-11 Balanceo de eslabonamientos 15-12 Balanceo de máquinas

Capítulo 16 Dinámica de las levas 554

16-1 Sistemas de levas de cuerpos rígidos y elásticos 16-2 Análisis de una leva excéntrica 16-3 Efecto de la fricción de deslizamiento
16-4 Análisis de una leva de disco con seguidor oscilante de rodillo 16-5 Programación para soluciones en computadora o calculadora 16-6 Análisis de sistemas elásticos de levas
16-7 Desbalanceo, sobretensión del resorte y arrollado

Capítulo 17 Dinámica de máquinas 571

17-1 Volantes 17-2 Giróscopos 17-3 Reguladores automáticos
17-4 Medición de la respuesta dinámica 17-5 Cimentaciones para máquinas

Respuestas de problemas selectos 590

Apéndice 595

Tabla 1 Prefijos estándar del SI *Tabla 2* Conversión de unidades usuales en E.U. a unidades del SI *Tabla 3* Conversión de unidades usuales en E.U. a unidades del SI *Tabla 4* Propiedades de áreas *Tabla 5* Momentos de inercia de masas *Tabla 6* Funciones de involuta

Índice 603

PREFACIO

El propósito de este libro es presentar una exposición que abarque ese campo de la teoría, el análisis, el diseño y la práctica de la ingeniería que generalmente se describe bajo el encabezado de mecanismos y cinemática y dinámica de máquinas. Aunque esta obra se escribió primordialmente para estudiantes de ingeniería, contiene mucho material de gran valor para ingenieros que ya ejercen su profesión. Después de todo, un buen ingeniero sabe que seguirá siendo un estudiante en todo el desarrollo de su carrera profesional.

El crecimiento continuo e impresionante de los conocimientos sobre cinemática y dinámica de las máquinas en la década pasada ha venido a reforzar el programa de estudios de ingeniería en muchas escuelas mediante la substitución de temas más débiles con éstos más sobresalientes, y generó la necesidad de un libro de texto para satisfacer los requisitos de estas nuevas estructuras de cursos. Gran parte de estos conocimientos nuevos existe en una amplia variedad de publicaciones técnicas, en las que aparecen con su singular lenguaje y nomenclatura propios, requiriendo cada uno de ellos de conocimientos previos para su comprensión. Se pueden usar estas contribuciones individuales para reforzar la estructura del curso de ingeniería, proporcionando los fundamentos necesarios y estableciendo una notación y nomenclatura comunes. Estos nuevos desarrollos se pueden integrar después al cuerpo de conocimientos ya existente, con el propósito de ofrecer un estudio lógico, moderno y de mayor extensión. En resumen, este es el objetivo de la presente obra.

Con el fin de desarrollar una comprensión amplia y básica, se emplean todos los métodos de análisis y desarrollos comunes a las publicaciones asociadas con el tema. Hemos utilizado con amplitud los métodos gráficos de análisis y síntesis en todo el libro porque estamos convencidos de que el cálculo gráfico es básico y fácil de enseñar. Además, casi siempre resulta el método más rápido para verificar los resultados del cálculo de máquinas. También s usan el análisis vectorial convencional y el método de Chase del análisis vectorial, en razón de su brevedad, porque se emplean con gran frecuencia en muchas publicaciones de investigación y debido a que se prestan enormemente para

programar los análisis en computadora. Por las mismas razones, se usa el método de Raven, sobre todo en los capítulos básicos. Por último, en toda la obra se usan de manera irrestricta los métodos de números complejos, tanto polares como rectangulares, al igual que los algebraicos.

Con ciertas excepciones, nos hemos esforzado por usar unidades inglesas y del SI en casi la misma proporción. El Sistema Internacional de Unidades (SI) se presenta y utiliza en este libro obedeciendo las reglas y las recomendaciones sugeridas en la publicación especial 330 de la Oficina Nacional de Estándares (National Bureau of Standards), revisada en agosto de 1977.

Uno de los dilemas a los que se enfrentan todos los escritores de este tema es la manera de distinguir entre el movimiento de dos puntos distintos sobre el mismo cuerpo en movimiento, y el de dos puntos diferentes sobre dos cuerpos móviles. Este dilema se presenta siempre con el problema del punto coincidente en el que ocurren ambas clases de movimiento. En el pasado se acostumbraba describir a los dos movimientos como "movimiento relativo"; pero en vista de que existen dos clases, al estudiante le resulta difícil establecer una diferencia clara entre ambos. Creemos que este problema ha quedado resuelto introduciendo los términos *diferencia de movimientos* y *movimiento aparente.* Por ende, el libro contiene, por ejemplo, los términos *diferencia de velocidades* y *velocidad aparente* en lugar del término "velocidad relativa" que no se encontrará en absoluto. Este planteamiento se introdujo principiando con los conceptos de posición y desplazamiento, se usa en forma extensa en el capítulo que trata de la velocidad y se lleva a su culminación en el estudio del problema del punto coincidente, en el capítulo de la aceleración, en donde se presenta la componente de Coriolis.

El uso frecuente de los métodos de computación por medio de máquinas, sobre todo para los ingenieros en ejercicio, ha hecho necesaria la inclusión de un capítulo sobre métodos numéricos. Las computadoras caseras y de oficina tales como las calculadoras programables y las microcomputadoras son tan útiles para resolver ciclos completos de movimiento que su uso ya es muy difundido. Además, los métodos de diseño computarizados con terminales de presentación gráfica que se utilizan en combinación con computadoras de gran capacidad, están demostrando tener un gran valor para la resolución de muchos problemas complejos del análisis y síntesis de mecanismos y máquinas. En este y otros capítulos del libro en los que se examinan métodos de análisis con computadora, tomamos precauciones especiales para evitar la presentación de programas y lenguajes de computadora específicos. La programación es un esfuerzo intrínsecamente individual y la mayoría de las
sus propios programas empleando un lenguaje de computadora de su preferencia. Por estas razones presentamos los pasos de programa necesarios para resolver muchos problemas analíticos que ocurren a menudo, y se agregaron sugerencias que creemos serán de gran utilidad. Un método de esta índole no llegará a la obsolescencia conforme las computadoras y los lenguajes usados en ellas sufran los cambios esperados.

Los métodos de diseño de levas necesarios para producir un movimiento especificado, y el comportamiento cinemático y dinámico de los sistemas de levas, se estudian en forma minuciosa aplicando métodos gráficos, analíticos y de computación en máquinas. También se presenta un nuevo conjunto de gráficas para el diseño de levas que acortan notablemente el tiempo requerido para el diseño cinemático. Además, los métodos de análisis dinámico usados facilitan, por ejemplo, la elección de un resorte de retención del seguidor para evitar que éste salte o se levante y para calcular las fuerzas sobre los cojinetes del eje de las levas y de contacto.

El análisis cinemático y dinámico de los engranes y trenes de engranes se trata de una manera minuciosa. Las doce variaciones de Lévai y su notación, que se incluyen aquí, tienen una utilidad particular para el análisis de trenes planetarios.

Las publicaciones de investigaciones referentes al diseño o la síntesis de eslabonamientos para fines específicos son tan numerosas que una persona requeriría muchos meses para compendiarlas todas. Creemos que el capítulo 10, Síntesis de eslabonamientos, contiene suficientes técnicas como para que cualquiera resuelva la mayor parte de los problemas de síntesis que se presentan en la ingeniería; se aplican tanto métodos gráficos como analíticos. Se analiza con amplitud la síntesis de posición y trayectoria de los mecanismos de corredera-manivela y de manivela-oscilador.

El capítulo sobre mecanismos espaciales contiene todo el material necesario para una introducción completa del tema y sus problemas. De hecho, los problemas tridimensionales constituyen una extensión natural y obvia para el lector, y no un caso especial. Se usan métodos gráficos y analíticos en el análisis cinemático de la posición, la velocidad y la aceleración en esta clase de mecanismos.

Los dos capítulos que se ocupan del análisis de estática y dinámica de las fuerzas en sistemas de máquinas definen la terminología y los métodos empleados en los capítulos restantes de esta obra. Los métodos de computación, gráficos, vectoriales y de máquina, se aplican en proporciones más o menos iguales. Estos capítulos incluyen material sobre el concepto de momento de inercia de una masa y su medición experimental. Aunque la mayoría de los lectores ya habrán tenido previamente alguna introducción al concepto de momento de inercia, la experiencia didáctica ha demostrado que es importante hacer hincapié en este tema durante el estudio de la dinámica.

También es importante incluir material sobre la dinámica de los motores de pistones en el curso de un estudio de dinámica de las maquinarias. El mecanismo de los motores es un ejemplo simple y apropiado acerca de la necesidad del análisis de las fuerzas sobre cojinetes y correderas, y la exigencia de balancear los sistemas de máquinas y sus componentes, así como de usar volantes en las máquinas.

El estudio del balanceo se inicia con una explicación de las causas y los efectos de un desequilibrio rotatorio junto con un breve análisis del balanceo de

las máquinas. El problema del balanceo de campo de dos planos para rotores grandes se analiza detalladamente porque constituye un ejemplo excelente de problemas que pueden resolverse mediante una calculadora programable. El balanceo de motores de uno y varios cilindros se explica utilizando el método de masa imaginaria o rotor imaginario. El volumen de las publicaciones referentes al balanceo de eslabonamientos, como por ejemplo el mecanismo de cuatro barras, es tan grande que es difícil hacer una selección totalmente satisfactoria. Decidimos presentar el método de Berkof-Lowen para balancear eslabonamientos, en virtud de que es bastante general, completo y se puede aplicar a cualquier sistema de eslabonamiento y porque emplea los fundamentos que ya se introdujeron en el libro. El problema del balanceo de fuerzas de máquinas completas, así como el del momento de sacudimiento, se estudian también en el capítulo sobre balanceo.

Nos sentimos profundamente agradecidos por la colaboración prestada por los profesores George N. Sandor de la Universidad de Florida, Sanjay G. Dhande de la misma universidad, Dennis A. Guenther de la Universidad Estatal de Ohio, Glenn C. Tolle de la Universidad A & M de Texas, Robert A. Lucas de la Universidad Lehigh, Edward N. Stevensen, Jr., de la Universidad de Hartford y Robert J. Williams de la Universidad Estatal de Pennsylvania, durante la planeación y revisión de este libro, y por su asesoría en el manuscrito y bosquejo preliminares. Sus análisis críticos y comentarios cuidadosos nos ayudaron enormemente a organizar los métodos y el contenido de esta obra.

El manuscrito final fue revisado con todo detalle por los profesores Robert W. Adamson de la Universidad Politécnica Estatal de California, Ferdinand Freudenstein de la Universidad de Columbia y Edward N. Stevensen, Jr., de la Universidad de Hartford. Nos sentimos sumamente reconocidos por el tiempo y esfuerzo invertidos por estas personas para ayudarnos a darle el toque final al manuscrito.

Por último, deseamos expresar nuestra gratitud imperecedera a nuestra editora, Julienne V. Brown, porque el entusiasmo y la buena voluntad de esta dama que estuvo dispuesta siempre a recorrer la segunda milla para ayudarnos a resolver los problemas más difíciles, es algo que apreciamos sinceramente.

Joseph Edward Shigley
John Joseph Uicker, Jr.

CAPÍTULO

UNO

GEOMETRÍA DEL MOVIMIENTO

1-1 INTRODUCCIÓN

La teoría de los mecanismos y las máquinas es una ciencia aplicada que sirve para comprender las relaciones entre la geometría y los movimientos de las piezas de una máquina o un mecanismo, y las fuerzas que generan tales movimientos. El tema y, por ende, esta obra, se divide naturalmente en tres partes. Los capítulos 1 al 5 se refieren a la cinemática, que es el análisis de los movimientos de las piezas de las máquinas. Esto constituye la base para los capítulos 6 a 11 en donde se estudian métodos de diseño de mecanismos y componentes de máquinas. Por último, los capítulos 12 a 17 se ocupan del estudio de la cinética, las fuerzas en las máquinas que varían en el tiempo y los fenómenos dinámicos resultantes que deben considerarse en su diseño.

Como se ilustra en la figura 1-1, el diseño de una máquina moderna es a menudo muy complejo. Por ejemplo, para diseñar un nuevo motor, el ingeniero en automovilismo debe dar respuesta a muchas preguntas interrelacionadas. ¿Cuál es la relación entre el movimiento del pistón y el del cigüeñal? ¿Cuáles serán las velocidades de deslizamiento y las cargas en las superficies lubricadas y qué lubricantes existen para este fin? ¿Qué cantidad de calor se generará y cómo se enfriará el motor? ¿Cuáles son los requisitos de sincronización y control, y cómo se satisfarán? ¿Cuál será el costo para el consumidor, tanto por lo que respecta a la compra inicial como en lo referente al funcionamiento y mantenimiento continuos? ¿Qué materiales y métodos de fabricación se emplearán? ¿Qué economía de combustible se tendrá? ¿Cuál será el ruido y cuáles las emisiones de salida o escape? ¿Satisfarán estos últimos los requisitos legales? Aunque éstas y muchas otras preguntas importantes se deben responder antes de que el diseño llegue a su etapa

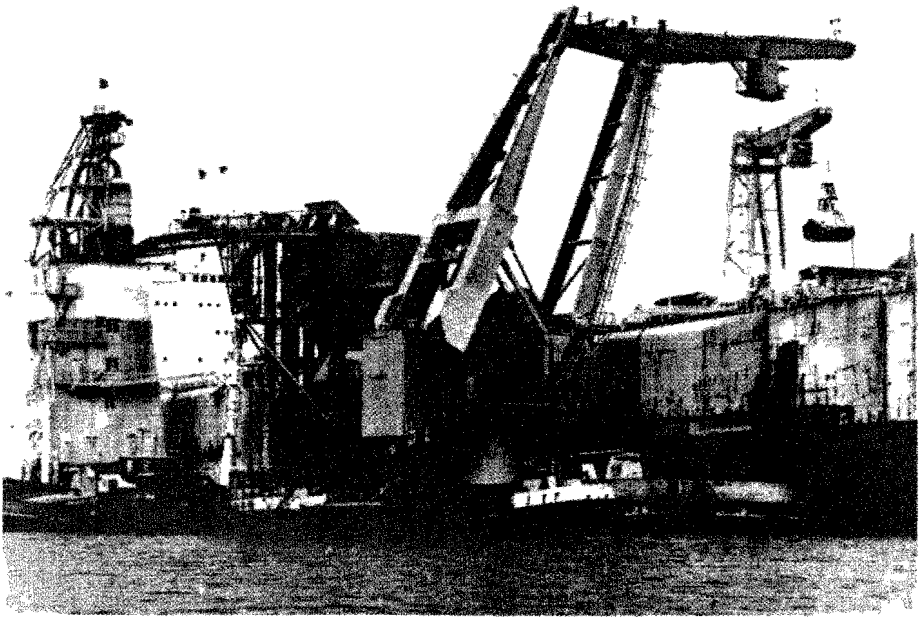


Figura 1-1 Una grúa flotante Figee con una pluma con configuración de lemniscata (*B. V Machine-fabriek Figee. Haarlem, Holanda.*)

final, es obvio que no todo se puede incluir en un libro de esta magnitud. Así como es necesario reunir personas de las más diversas especialidades para producir un diseño adecuado, también es preciso hacer acopio de muchas ramas de la ciencia. Este libro reúne material perteneciente a la ciencia de la mecánica en lo que se refiere a su relación con el diseño de mecanismos y máquinas.

1-2 ANÁLISIS Y SÍNTESIS

El *diseño* y el *análisis* son dos aspectos completamente distintos en el estudio de los sistemas mecánicos. El concepto comprendido en el término "diseño" podría llamarse más correctamente *síntesis*, o sea, el proceso de idear un patrón o método para lograr un propósito dado. Diseño es el proceso de establecer tamaños, formas, composiciones de los materiales y disposiciones de las piezas de tal modo que la máquina resultante desempeñe las tareas prescritas.

Aunque existen muchas fases dentro del proceso del diseño que es factible plantear de un modo científico y bien ordenado, el proceso en conjunto es por su propia naturaleza, tanto un arte como una ciencia. Requiere imaginación, intui-

ción, creatividad, sentido común y experiencia. El papel de la ciencia dentro del proceso de diseño sirve sencillamente para proveer las herramientas que utilizarán los diseñadores para poner en práctica su arte.

Es precisamente en el proceso de evaluación de varias alternativas interactuantes que los diseñadores se enfrentan a la necesidad de un gran número de instrumentos matemáticos y científicos. Cuando éstos se aplican en forma correcta ofrecen información más exacta y digna de confianza para juzgar un diseño que se pueda lograr a través de la intuición o el cálculo. Por ende, suelen constituir un auxiliar extraordinario para decidir entre varias alternativas. Sin embargo, las herramientas científicas no pueden tomar decisiones suplantando a los diseñadores; éstos tienen todo el derecho de poner en práctica su imaginación y capacidad creativa, incluso al grado de pasar por encima de las predicciones matemáticas.

Es probable que el conjunto más abundante de métodos científicos de que dispone el diseñador quede dentro de la categoría denominada *análisis*. Se trata de técnicas que permiten que el diseñador examine en forma crítica un diseño ya existente o propuesto con el fin de determinar si es adecuado para el trabajo de que se trate. Por ende, el análisis, por sí solo, no es una ciencia creativa sino más bien de evaluación y clasificación de cosas ya concebidas.

Es preciso tener siempre en mente que aunque la mayor parte de los esfuerzos realizados se dediquen al análisis, la meta real es la síntesis, es decir, el diseño de una máquina o un sistema. El análisis es una simple herramienta y, sin embargo, es tan vital que se usará inevitablemente como uno de los pasos en el proceso de diseño.

1-3 CIENCIA DE LA MECÀNICA

Mecánica es la rama del análisis científico que se ocupa de los movimientos, el tiempo y las fuerzas, y se divide en dos partes, estática y dinámica. La *estática* trata del análisis de sistemas estacionarios, es decir, de aquellos en que el tiempo no es un factor determinante, y la *dinámica* se refiere a los sistemas que cambian con el tiempo.

Como se ilustra en la figura 1-2, la dinámica también está constituida por dos disciplinas generales que Euler fue el primero en reconocer como entidades separadas, en 1775:†

> La investigación del movimiento de un cuerpo rígido se puede separar de manera conveniente en dos partes, una geométrica y la otra mecánica. En la primera de ellas, se debe investigar la transferencia del cuerpo de una posición dada a cualquier otra sin hacer mención de las causas del movimiento, y es preciso representarla mediante fórmulas analíticas, las que definirán la posición

† *Novi comment, Acad. Petrop.*, vol. 20, 1775; también en "Theoria motus corporum", 1790. La traducción fue realizada por Willis, "Principles of Mechanism", 2a. ed. p. viii, 1870.

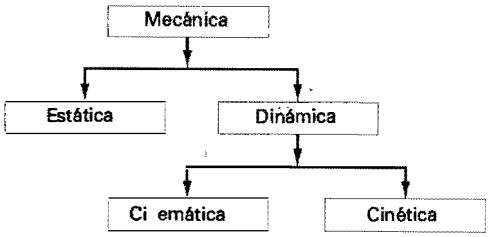


Figura 1-2

de cada punto del cuerpo. Por lo tanto, esta investigación se referirá exclusivamente a la geometría o, más bien, a la estereotomía.

Es evidente que mediante la separación de esta parte de la cuestión, de la otra, que pertenece más bien a la Mecánica, la determinación del movimiento basada en principios dinámicos se facilitará de una manera más notable que si ambas partes se consideraran en forma conjunta.

Estos dos aspectos de la dinámica se reconocieron posteriormente como las ciencias diferentes denominadas *cinemática* (del vocablo griego *kinema*, que significa movimiento) y *cinética* que se ocupan, respectivamente, del movimiento y de las fuerzas que lo producen.

El problema inicial en el diseño de un sistema mecánico es, por consiguiente, la comprensión de su cinemática. *Cinemática* es el estudio del movimiento, independientemente de las fuerzas que lo producen. De manera más específica, la cinemática es el estudio de la posición, el desplazamiento, la rotación, la rapidez, la velocidad y la aceleración. El estudio del movimiento planetario u orbital, póngase por caso, constituye también un problema de la cinemática; pero este libro se concentrará en los aspectos cinemáticos que surgen en el diseño de sistemas mecánicos. Como consecuencia, la cinemática de las máquinas y los mecanismos es el foco de atención de los siguientes capítulos de este texto. No obstante, la estática y la cinética son también partes vitales de una análisis de diseño completo, y se tocarán también en capítulos posteriores.

Es preciso observar con cuidado en la cita anterior, que Euler basó su división de la dinámica en cinemática y cinética basándose en la suposición de que deben tratar con cuerpos *rígidos*. Esta es una suposición de gran importancia que permite que ambos aspectos se traten por separado. En el caso de cuerpos flexibles las formas mismas de los cuerpos y, por ende, sus movimientos, dependen de las fuerzas ejercidas sobre ellos. En tal situación, el estudio de la fuerza y el movimiento se debe realizar en forma simultánea, incrementando notablemente con ello la complejidad del análisis.

Por fortuna, aunque todas las piezas de máquinas reales son flexibles en cierto grado, éstas se diseñan casi siempre con materiales más o menos rígidos y manteniendo en un mínimo sus deformaciones. Por lo tanto, al analizar el funcionamiento cinemático de una máquina es práctica común *suponer* que las deflexiones son despreciables y que las piezas son rígidas, y luego, una vez que se ha realizado el análisis dinámico, cuando las cargas se conocen, se suele diseñar las piezas de manera que esta suposición se justifique.

1-4 TERMINOLOGÍA, DEFINICIONES E HIPÓTESIS

Reuleaux† define una *máquina*‡ como una "*combinación de cuerpos resistentes de tal manera que, por medio de ellos, las fuerzas mecánicas de la naturaleza se pueden encauzar para realizar un trabajo acompañado de movimientos determinados.*" También define mecanismo como una "*combinación de cuerpos resistentes conectados por medio de articulaciones móviles para formar una cadena cinemática cerrada con un eslabón fijo, y cuyo propósito es transformar el movimiento.*"

Se puede arrojar más luz sobre estas definiciones contrastándolas con el término *estructura*, que es también una combinación de cuerpos (rígidos) resistentes conectados por medio de articulaciones, pero cuyo propósito no es efectuar un trabajo ni transformar el movimiento. Una estructura (como por ejemplo, una armadura) tiene por objeto ser rígida; tal vez pueda moverse de un lado a otro y, en este sentido es móvil; pero carece de movilidad *interna*, no tiene *movimientos relativos* entre sus miembros, mientras que tanto las máquinas como los mecanismos los tienen. De hecho, el propósito real de una máquina o un mecanismo es aprovechar estos movimientos internos relativos para transmitir potencia o transformar el movimiento.

Una máquina es una disposición de partes para efectuar trabajo, un dispositivo para aplicar potencia o cambiar su dirección; difiere de un mecanismo en su propósito. En una máquina, los términos fuerza, momento de torsión (o par motor), trabajo y potencia describen los conceptos predominantes. En un mecanismo, aunque puede transmitir la potencia de una fuerza, el concepto predominante que tiene presente el diseñador es lograr un movimiento deseado. Existe una analogía directa entre los términos estructura, mecanismo y máquina, y las tres ramas de la mecánica especificadas en la figura 1-2. El término "estructura" es a la estática lo que el término "mecanismo" es a la cinemática y el término "máquina" es a la cinética.

Aquí se usará la palabra *eslabón* para designar una pieza de una máquina o un componente de un mecanismo. Como se explicó en la sección anterior, se supone que un eslabón es completamente rígido. Los componentes de máquinas que no se adaptan a esta hipótesis de rigidez, como por ejemplo, los resortes, no tienen por lo común efecto alguno sobre la cinemática de un dispositivo, aunque sí desempeñan un papel en la generación de fuerzas. Estos elementos no se llaman eslabones y casi siempre se ignoran durante el análisis cinemático y sus efectos de fuer-

† Gran parte del material de esta sección se basa en definiciones estipuladas originalmente por F. Reuleaux (1829-1905), especialista alemán en cinemática cuyo trabajo marcó el principio de un estudio sistemático de la cinemática. Para consultas adicionales, véase A. B. W. Kennedy, "*Reuleaux' Kinematics of Machinery*", Macmillan, Londres, 1876; publicado nuevamente por Dover, Nueva York, 1963.

‡ No existe en realidad una coincidencia absoluta en la definición apropiada de máquina. En una nota al calce, Reuleaux propone 17 definiciones y su traductor sugiere otras siete, exponiendo minuciosamente toda esta cuestión.

za se introducen durante el análisis dinámico. En algunas ocasiones, como sucede en el caso de una banda o cadena, puede suceder que un elemento de una máquina posea rigidez unilateral, en cuyo caso se consideraría como eslabón en la tensión; pero no así en la compresión.

Los eslabones de un mecanismo se deben conectar entre sí de una manera tal que transmitan movimiento del *impulsor*, o eslabón de entrada, al *seguidor*, o eslabón de salida. Estas conexiones, articulaciones entre los eslabones, se llaman *pares cinemáticos* (o simplemente *pares*) porque cada articulación se compone de dos superficies pareadas, dos *elementos*, con cada superficie o elemento pareado formando parte de cada uno de los eslabones articulados. Por ende, un eslabón se puede definir también como la *conexión rígida entre dos o más elementos de diferentes pares cinemáticos*.

La suposición de rigidez, enunciada explícitamente, indica que no puede haber movimiento relativo (cambio de distancia) entre dos puntos arbitrariamente seleccionados en el mismo eslabón. En particular, no cambian las posiciones relativas de elementos pareados en cualquier eslabón; en otras palabras, el propósito de un eslabón es mantener una relación espacial constante entre los elementos de sus pares.

Como resultado de la hipótesis de rigidez, muchos de los detalles complicados que presentan las formas reales de las piezas carecen de importancia cuando se estudia la cinemática de una máquina o un mecanismo. Por esta razón, una de las prácticas más comunes es trazar diagramas esquemáticos muy simplificados que contengan las características más importantes de la forma de cada eslabón como, por ejemplo, las ubicaciones relativas de los elementos del par, pero en los que se reduce casi al mínimo la geometría real de las piezas fabricadas. El mecanismo de corredera-manivela del motor de combustión interna, por ejemplo, se puede simplificar hasta llegar al diagrama esquemático que se muestra en la figura 1-4*b* para fines de análisis. Estas representaciones esquemáticas simplificadas son de gran utilidad porque eliminan factores que tienden a generar confusiones y que no tienen injerencia alguna en el análisis; dichos diagramas se emplean con gran profusión en esta obra. No obstante, tienen también la desventaja de que muestran una semejanza muy limitada con el elemento real. Como resultado, pueden dar la impresión de que representan sólo construcciones académicas y no maquinarias reales. Es preciso tener siempre presente que se pretende que estos diagramas simplificados solo contengan la información mínima necesaria para que el tema en cuestión no se oscurezca con todos los detalles sin importancia (para los fines de la cinemática) o con lo complejo de las piezas reales de la máquina.

Cuando varios eslabones están conectados móvilmente por medio de articulaciones, se dice que constituyen una *cadena cinemática*. Los eslabones que contienen sólo dos pares de conexiones de elementos se llaman eslabones *binarios*, los que tienen tres se clasifican como *ternarios* y así sucesivamente. Si cada eslabón de la cadena se conecta por lo menos con otros dos, ésta forma uno o más circuitos cerrados y, en tal caso, recibe el nombre de cadena cinemática *cerrada*; de no ser así, la cadena se llama *abierta*. Cuando no se hace especificación alguna se supone

que la cadena es cerrada. Si ésta se compone totalmente de eslabones binarios es *cerrada simple*; sin embargo, las cadenas *cerradas compuestas* incluyen otros eslabones binarios y, en consecuencia, forman más de un solo circuito cerrado.

Recordando la definición de Reuleaux de un mecanismo, es evidente que se necesita tener una cadena cinemática cerrada *con un eslabón fijo*. Cuando se habla de que un eslabón está fijo se da a entender que se elige como marco de referencia para todos los demás eslabones, es decir, que los movimientos de todos los demás puntos del eslabonamiento se medirán con respecto a ése en particular, ya que se le considera como fijo. En una máquina real, ese eslabón es casi siempre una plataforma o base estacionaria (o una cubierta rígidamente sujeta a dicha base), y se le denomina *eslabón marco* o *base*. La cuestión de si este marco de referencia es verdaderamente estacionario (en el sentido de ser un marco de referencia inercial) no tiene importancia para el estudio de la cinemática; pero la adquiere en la investigación de la cinética, en donde deben considerarse las fuerzas. En cualquier caso, una vez que se designa el marco de referencia (y se satisfacen otras condiciones), la cadena cinemática se convierte en un mecanismo y conforme el impulsor se mueve pasando por varias posiciones denominadas *fases*, todos los demás eslabones manifiestan movimientos bien definidos con respecto al marco de referencia elegido. Se usa el término *cadena cinemática* para especificar una disposición particular de eslabones y articulaciones, cuando no se ha especificado con claridad cuál eslabón se usará como marco de referencia. Una vez que se estipula el eslabón de referencia, la cadena cinemática se convierte en *mecanismo*.

Para que un mecanismo sea útil, los movimientos entre los eslabones no pueden ser completamente arbitrarios, éstos también deben restringirse para producir los movimientos relativos *adecuados,* los que determine el diseñador para el trabajo particular que se deba desarrollar. Estos movimientos relativos deseados se obtienen mediante la elección correcta del número de eslabones y de los tipos de articulaciones utilizados para conectarlos.

Por consiguiente, esto lleva al concepto de que, además de las distancias entre articulaciones sucesivas, la naturaleza de ellas y los movimientos relativos que permitan son esenciales para determinar la cinemática de un mecanismo. Por esta razón es vital que se examine en forma minuciosa la naturaleza de las articulaciones, en términos generales y en forma particular, para varios de los tipos más comunes.

El factor de control que determina los movimientos relativos que permite una articulación dada es la forma que tengan las superficies o elementos pareados. Cada tipo de articulación posee sus propias formas características para los elementos y cada una permite un tipo de movimiento específico, el cual es determinado por las maneras posibles en que estas superficies elementales se pueden mover una en relación con otra. Por ejemplo, la articulación de pasador o espiga de la figura 1-3*a* tiene elementos cilíndricos y, suponiendo que los eslabones no se pueden deslizar en sentido axial, estas superficies permiten sólo un movimiento rotatorio. Por ende, una articulación de pasador deja que los dos eslabones conectados experimenten una rotación relativa en torno al pasador central. De la misma manera,

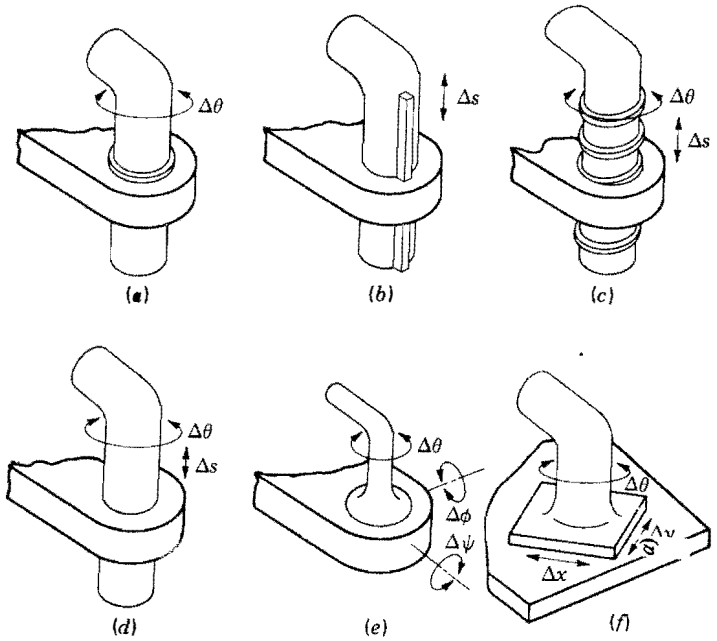


Figura 1-3 Los seis pares inferiores: *a*) revoluta o giratorio, *b*) prismático, *c*) helicoidal, *d*) cilíndrico, *e*) esférico y *f*) plano.

las demás articulaciones tienen sus propias formas de los elementos y sus propios movimientos relativos que les son característicos. Tales formas restringen el movimiento totalmente arbitrario de dos eslabones no conectados a un tipo prescrito de movimiento relativo y constituyen las condiciones limitantes o *restricciones* impuestas al movimiento del mecanismo.

Es conveniente señalar que, a menudo, las formas de los elementos suelen disfrazarse sutilmente, lo que las hace difíciles de reconocer. Por ejemplo, una articulación de pasador podría incluir un cojinete de agujas, de modo que las dos superficies pareadas no se distingan como tales. Sin embargo, si los movimientos de los rodillos individuales carecen de interés, los movimientos permitidos por las articulaciones son equivalentes y los pares pertenecen al mismo tipo genérico. Por ende, el criterio para distinguir clases distintas de pares se basa en los movimientos relativos que permiten y no necesariamente en las formas de los elementos, aunque éstas suelen revelar indicios muy importantes. El diámetro del pasador usado (u otros datos dimensionales) tampoco tiene más importancia que las magnitudes y formas exactas de los eslabones conectados. Como se dijo con anterioridad, la función cinemática de un eslabón es mantener una relación geométrica fija entre los elementos del par. Del mismo modo, la única función cinemática de una articulación o par es determinar el movimiento relativo entre los eslabones conec-

tados. Todas las demás características se determinan por otras razones y no tienen importancia en el estudio de la cinemática.

Cuando se plantea un problema de cinemática, es necesario reconocer el tipo de movimiento relativo permitido en cada uno de los pares, y asignarle algún parámetro variable (o algunos parámetros variables) para medir o calcular el movimiento. Se tendrán tantos parámetros de esta índole como grados de libertad tenga la articulación en cuestión, y se les conoce con el nombre de *variables del par*. De donde, la variable del par de una articulación de pasador será un solo ángulo medido entre rectas de referencia fijas en los eslabones adyacentes, mientras que un par esférico tendrá tres variables del par (todas ellas ángulos) para especificar su rotación tridimensional.

Reuleaux dividió los pares cinemáticos en *superiores* e *inferiores*, y a esta última categoría pertenecen los seis tipos prescritos que se analizarán a continuación. Reuleaux estableció diferencias entre las categorías haciendo notar que en los pares inferiores, tales como la articulación de pasador, los elementos del par hacen contacto en una superficie, en tanto que en los superiores, como por ejemplo la conexión entre una leva y su seguidor, el contacto entre las superficies elementales es en una línea o un punto. No obstante, como se consignó en el caso de un cojinete de agujas, este criterio puede ser engañoso. Es preferible observar características que establezcan una distinción en el movimiento relativo (o movimientos relativos) que permita la articulación.

En la figura 1-3 se ilustran los seis pares inferiores. En la tabla 1-1 aparecen los nombres de los pares inferiores y los símbolos usados por Hartenberg y Denavit† para cada uno de ellos, junto con el número de grados de libertad y las variables del par correspondientes.

El *par giratorio* o *revoluta* (Fig. 1-3*a*) sólo permite rotación relativa y, por consiguiente, posee un grado de libertad. Con frecuencia, este par se denomina articulación de pasador o de espiga.

El *par prismático* (Fig. 1-3*b*) sólo permite movimiento relativo de deslizamiento y, por ende, se denomina casi siempre articulación de deslizamiento. También posee un solo grado de libertad.

El *par de tornillo* o *par helicoidal* (Fig. 1-3*c*) cuenta con un solo grado de libertad porque los movimientos de deslizamiento y rotación están relacionados por el ángulo de hélice de la rosca. Por tanto, la variable del par se puede elegir como Δs o bien, $\Delta\theta$, pero no ambas. Nótese que el par de tornillo se convierte en una revoluta si el ángulo de hélice se hace cero, y en un par prismático si dicho ángulo se hace de 90°.

El *par cilíndrico* (Fig. 1-3*d*) permite tanto rotación angular como un movimiento de deslizamiento independiente. Por consiguiente, el par cilíndrico tiene dos grados de libertad.

† R. S. Hartenberg y J. Denavit, *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill, New York, 1964. Este libro es una obra clásica sobre cinética y el título es hasta cierto punto engañoso; también comprende una cantidad considerable de material acerca de la historia, la teoría y el análisis cinemáticos.

Tabla 1-1 Pares inferiores

Par	Símbolo	Variable del par	Grados de libertad	Movimiento relativo
Revoluta	R	$\Delta\theta$	1	Circular
Prisma	P	Δs	1	Lineal
Tornillo	S	$\Delta\theta$ o ΔS	1	Helicoidal
Cilindro	C	$\Delta\theta$ y Δs	2	Cilíndrico
Esfera	G	$\Delta\theta, \Delta\phi, \Delta\psi$	3	Esférico
Plano	F	$\Delta x, \Delta y, \Delta\theta$	3	Plano

El *par globular* o *esférico* (Fig. 1-3*e*) es una articulación de rótula. Posee tres grados de libertad, una rotación en torno a cada uno de los ejes coordenados.

El *par plano* (Fig. 1-3*f*) rara vez se encuentra en los mecanismos en su forma no disfrazada. Tiene tres grados de libertad.

Todos los demás tipos de articulaciones se conocen como pares superiores. Entre los ejemplos clásicos están los dientes de engranes acoplados, una rueda que va rodando sobre un riel, una bola que rueda sobre una superficie plana y una leva que hace contacto con su seguidor de rodillo. Puesto que hay una cantidad infinita de pares superiores no es práctico hacer un recuento sistemático de ellos; de modo que cada uno se analizará conforme se presente cada situación individual.

Entre los pares superiores existe una subcategoría denominada *pares envolventes*. Por ejemplo, la conexión entre una banda y una polea, entre una cadena y una catarina o entre un cable y un tambor. En cada caso, uno de los eslabones se caracteriza por rigidez unilateral.

En el estudio de los diversos tipos de articulaciones, ya sean pares inferiores o superiores, existe otra suposición restrictiva de gran importancia. En el curso de esta obra se supondrá que la articulación real, tal y como se fabrica, puede representarse razonablemente por medio de una abstracción matemática con una geometría perfecta. Dicho de otra manera, cuando se supone que una articulación de una máquina real es un par esférico, por ejemplo, también se supone que no hay "juego" o espacio libre entre los elementos de la misma, y que cualquier desviación en la geometría esférica de los elementos es despreciable. Cuando una articulación de pasador se trata como revoluta, se supone que es imposible que se lleve a efecto un movimiento axial; si es necesario estudiar los pequeños movimientos axiales resultantes de los espacios libres entre los elementos reales, la articulación se debe manejar como si fuera cilíndrica, para tener en cuenta el movimiento axial.

Tal y como se definió antes, el término "mecanismo" se puede referir a una amplia variedad de dispositivos que incluyen tanto pares superiores como inferiores. No obstante, existe un término más descriptivo concerniente a los mecanismos que sólo tienen pares inferiores, y éste es el de *eslabonamiento*. Así pues, un

eslabonamiento se conecta sólo por medio de pares inferiores como los ilustrados en la figura 1-3.

1-5 MECANISMOS PLANOS, ESFÉRICOS Y ESPACIALES

Los mecanismos se pueden clasificar de diversas maneras haciendo hincapié en sus similitudes y sus diferencias. Uno de estos agrupamientos divide los mecanismos en planos, esféricos y espaciales; y los tres grupos poseen muchas cosas en común; sin embargo, el criterio para distinguirlos se basa en las características de los movimientos de los eslabones.

Un *mecanismo plano* es aquel en el que todas las partículas describen curvas planas en el espacio y todas éstas se encuentran en planos paralelos; en otras palabras, los lugares geométricos de todos los puntos son curvas planas paralelas a un solo plano común. Esta característica hace posible que el lugar geométrico de cualquier punto elegido de un mecanismo plano se represente con su verdadero tamaño y forma real, en un solo dibujo o una sola figura. La transformación del movimiento de cualquier mecanismo de esta índole se llama *coplanar*. El eslabonamiento plano de cuatro barras, la leva de placa y su seguidor, y el mecanismo de corredera-manivela son ejemplos muy conocidos de mecanismos planos. La vasta mayoría de mecanismos en uso hoy en día son del tipo plano.

Los mecanismos planos que utilizan sólo pares inferiores se conocen con el nombre de *eslabonamientos planos* y sólo pueden incluir revolutas y pares prismáticos. Aunque teóricamente es factible incluir un par plano, esto no impondría restricción alguna y, por lo tanto, sería equivalente a una abertura en la cadena cinemática. El movimiento plano requiere también que los ejes de todos los pares prismáticos y todos los ejes de revolutas sean normales al plano del movimiento.

Mecanismo esférico es aquel en el que cada eslabón tiene algún punto que se mantiene estacionario conforme el eslabonamiento se mueve, y en el que los puntos estacionarios de todos los eslabones están en una ubicación común; en otras palabras, el lugar geométrico de cada punto es una curva contenida dentro de una superficie esférica y las superficies esféricas definidas por varios puntos arbitrariamente elegidos son *concéntricas*. Por ende, los movimientos de todas las partículas se pueden describir por completo mediante sus proyecciones radiales, o "sombras", proyectadas sobre la superficie de una esfera, con un centro seleccionado en forma apropiada. La articulación universal de Hooke es quizá el ejemplo más conocido de un mecanismo esférico.

Eslabonamientos esféricos son aquellos que se componen exclusivamente de pares de revoluta. Un par esférico no produciría restricciones adicionales y, por ende, sería equivalente a una abertura en la cadena, en tanto que todos los demás pares inferiores poseen movimientos no esféricos. En el caso de eslabonamientos esféricos, los ejes de todos los pares de revoluta se deben intersecar en un punto.

Los *mecanismos espaciales no* incluyen, por otro lado, restricción alguna en los movimientos relativos de las partículas. La transformación del movimiento no

es necesariamente coplanar, como tampoco es preciso que sea concéntrica. Un mecanismo espacial puede poseer partículas con lugares geométricos de doble curvatura. Cualquier eslabonamiento que comprenda un par de tornillo, por ejemplo, es un mecanismo espacial, porque el movimiento relativo dentro del par de tornillo es helicoidal.

Por lo tanto, la categoría abrumadoramente más numerosa de mecanismos planos y la de los esféricos son apenas unos cuantos casos especiales, o subconjuntos, de la categoría general de mecanismos espaciales. Estos se obtienen como una consecuencia de la geometría especial en las orientaciones particulares de los ejes de sus pares.

Si los mecanismos planos y esféricos son sólo casos especiales de mecanismos espaciales, ¿por qué es aconsejable identificarlos por separado? Debido a que por las condiciones geométricas particulares que identifican estas clases, es factible hacer multitud de simplificaciones en su diseño y análisis. Como se señaló con anterioridad, se pueden observar los movimientos de todas las partículas de un mecanismo plano en el tamaño y forma reales, desde una sola dirección. En otras palabras, es factible representar gráficamente todos los movimientos en una sola perspectiva. De donde, las técnicas gráficas son muy apropiadas para su solución. Puesto que no todos los mecanismos espaciales poseen esta geometría afortunada, su concepción se hace más difícil y es necesario desarrollar técnicas más complejas para su análisis.

Dado que la inmensa mayoría de mecanismos en uso hoy en día son planos, podría ponerse en duda la necesidad de las técnicas matemáticas más complicadas que se usan para los mecanismos espaciales. Existen varias razones por las que los métodos más poderosos sean de gran utilidad a pesar de que se hayan dominado las técnicas gráficas más simples.

1. Proporcionan métodos nuevos y alternativos que resuelven los problemas de diferente manera y, por ende, ofrecen medios para verificar los resultados. Hay ciertos problemas que, por su naturaleza, son más fáciles de resolver mediante un método que por otro.
2. Los métodos de tipo analítico son más apropiados para obtener soluciones por medio de calculadoras o computadoras digitales que las técnicas gráficas.
3. Aunque la mayoría de los mecanismos útiles son planos y muy adecuados para soluciones gráficas, también es preciso analizar los pocos restantes y es necesario conocer las técnicas para hacerlo.
4. Una razón por la que los eslabonamientos planos son tan comunes es que no se contó con métodos de análisis buenos para los eslabonamientos espaciales más generales sino hasta fechas recientes. Sin métodos para analizarlos, su diseño y uso no ha sido muy común, incluso a pesar de que pueden ser inherentemente más apropiados para ciertas aplicaciones.
5. Se descubrirá que los eslabonamientos espaciales son mucho más comunes en la práctica que lo que revela su descripción formal.

Considérese un eslabonamiento de cuatro barras, que cuenta con cuatro eslabones conectados por cuatro pasadores cuyos ejes son paralelos. Este "paralelismo" es una hipótesis matemática y no una realidad. Los ejes tal y como se producen en un taller —en cualquier taller, sin importar lo bueno que éste sea— serán sólo aproximadamente paralelos. Si están muy fuera de paralelismo, habrá cierto amarre y el mecanismo sólo se moverá debido a que los eslabones "rígidos" se flexionan y tuercen, produciendo cargas en los cojinetes. Si los ejes son casi paralelos, el mecanismo opera debido a la holgura de los rodamientos o la flexibilidad de los eslabones. Una forma común de compensar las pequeñas faltas de paralelismos es conectar los eslabones con cojinetes autoalineantes que son, en realidad, articulaciones esféricas que permiten rotaciones tridimensionales. Por ende, esta clase de eslabonamiento "plano" es de índole espacial en grado bajo.

1-6 MOVILIDAD

Una de las primeras preocupaciones, ya sea en el diseño o en el análisis de un mecanismo, es el número de grados de libertad, conocido también como *movilidad* del dispositivo. La movilidad de un mecanismo es el número de parámetros de entrada (casi siempre variables del par) que se deben controlar independientemente, con el fin de llevar al dispositivo a una posición en particular. Si por el momento se hace caso omiso de ciertas excepciones que se mencionarán más adelante, es factible determinar la movilidad de un mecanismo directamente a través de un recuento del número de eslabones y la cantidad y tipos de articulaciones que incluye.

Para desarrollar esta relación considérese que, antes de conectarse entre sí, cada eslabón de un mecanismo plano posee tres grados de libertad cuando se mueven en relación al eslabón fijo. Por consiguiente, sin contar este último, un mecanismo plano de n eslabones posee $3(n-1)$ grados de libertad antes de conectar cualquiera de las articulaciones. Al conectar una articulación con un grado de libertad, como por ejemplo, un par de revoluta, se tiene el efecto de proveer dos restricciones entre los eslabones conectados. Si se conecta un par con dos grados de libertad, se proporciona una restricción. Cuando las restricciones de todas las articulaciones se restan del total de grados de libertad de los eslabones no conectados, se encuentra la movilidad resultante del mecanismo conectado. Cuando se usa j_1 para denotar el número de pares de un solo grado de libertad y j_2 para el número de pares con dos grados de libertad, la movilidad resultante m de un mecanismo plano de n eslabones está dada por

$$m = 3(n-1) - 2j_1 - j_2 \tag{1-1}$$

Escrita en esta forma, la ecuación (1-1) se conoce como *criterio de Kutzbach* para la movilidad de un mecanismo plano. Su aplicación se ilustra para varios casos simples en la figura 1-4.

Si el criterio de Kutzbach da $m > 0$, el mecanismo posee m grados de libertad. Si $m = 1$, el mecanismo se puede impulsar con un solo movimiento de entrada. Si

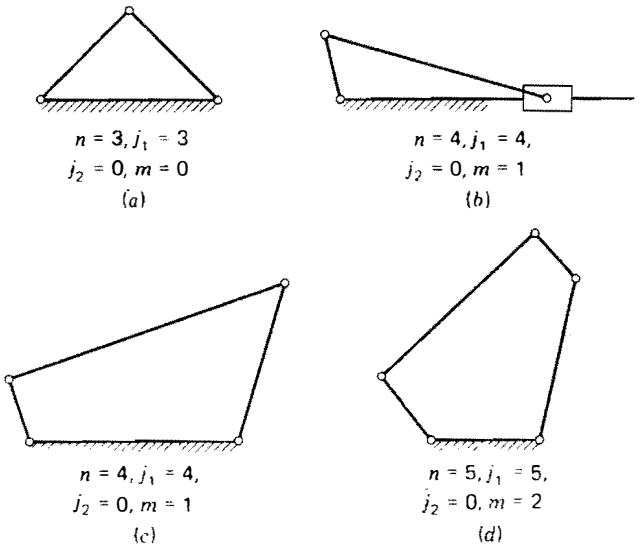


Figura 1-4 Aplicaciones del criterio de movilidad de Kutzbach.

$m = 2$, entonces se necesitan dos movimientos de entrada separados para producir el movimiento restringido del mecanismo; tal es el caso ilustrado en la figura 1-4*d*.

Si el criterio de Kutzbach da $m = 0$, como sucede en la figura 1-4*a*, el movimiento es imposible y el mecanismo forma una estructura. Si el criterio produce $m = -1$ o menos, entonces, hay restricciones redundantes en la cadena y forma una estructura estáticamente indeterminada. En la figura 1-5 se ilustran varios ejemplos. En ellos se observa que cuando se unen tres eslabones por medio de un solo pasador, se deben contar dos articulaciones; una conexión de esta índole se trata como si fueran dos pares separados, pero concéntricos.

En la figura 1-6 se dan ejemplos del criterio de Kutzbach aplicado a mecanismos con articulaciones de dos grados de libertad. Se debe prestar atención especial al contacto (par) entre la rueda y el eslabón fijo que aparecen en la figura 1-6*b*. En

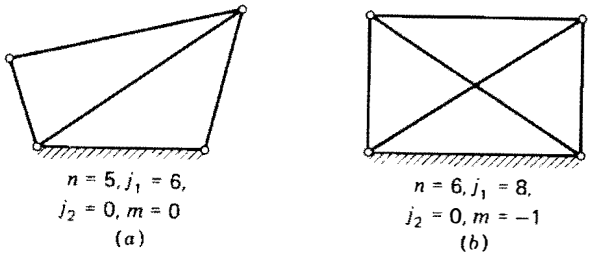
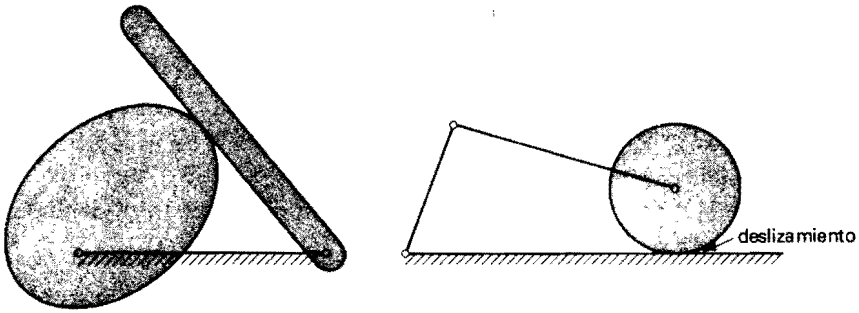


Figura 1-5 Aplicaciones del criterio de Kutzbach a estructuras.



$n = 3, j_1 = 2,$
$j_2 = 1, m = 1$
(a)

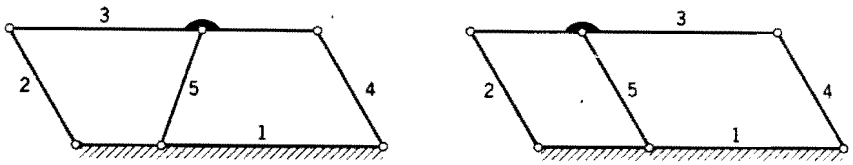
$n = 4, j_1 = 3$
$j_2 = 1, m = 2$
(b)

Figura 1-6

este caso se supuso que puede existir un corrimiento o deslizamiento entre los eslabones. Si este contacto incluyera dientes de engranes o si la fricción fuera lo suficientemente grande como para evitar el deslizamiento, la articulación se contaría como un par con un grado de libertad, puesto que sólo se tendría la posibilidad de un movimiento relativo entre los eslabones.

Hay casos en los que el criterio de Kutzbach conducirá a un resultado incorrecto. Nótese que la figura 1-7*a* representa una estructura y que el criterio predice correctamente que $m = 0$. No obstante, si el eslabón 5 se coloca como se indica en la figura 1-7*b*, el resultado es un eslabonamiento de doble paralelogramo con una movilidad de 1, a pesar de que la ecuación (1-1) señala que se trata de una estructura. La movilidad real de 1 se obtiene sólo cuando se logra la geometría de paralelogramo. Puesto que en el desarrollo del criterio de Kutzbach no se hizo consideración alguna respecto a las longitudes de los eslabones u otras propiedades dimensionales, no es sorprendente encontrar excepciones a este criterio, en casos particulares con longitudes equivalentes de los eslabones, eslabones paralelos u otras características geométricas especiales.

Aunque el criterio tiene excepciones, sigue siendo útil gracias a su aplicación tan sencilla. Para evitar excepciones, sería necesario incluir todas las propiedades



$n = 5, j_1 = 6$
$j_2 = 0, m = 0$
(a)

$n = 5, j_1 = 6,$
$j_2 = 0, m = 0$
(b)

Figura 1-7

dimensionales del mecanismo. En tal caso, el criterio resultante sería muy complejo y resultaría inútil en las etapas iniciales del diseño, cuando es muy probable que se desconozcan aún las dimensiones.

Un criterio de movilidad anterior a éste y que lleva el nombre de Grübler, se aplica a mecanismos con articulaciones de un solo grado de libertad en los que la movilidad global del mecanismo es igual a la unidad. Al substituir $j_2 = 0$ y $m = 1$ en la ecuación (1-1), se encuentra el *criterio de Grübler* para mecanismos planos con movimiento restringido

$$3n - 3j_1 - 4 = 0 \tag{1-2}$$

Esto permite ver, por ejemplo, que un mecanismo plano con movilidad 1 y que sólo tiene articulaciones de un grado de libertad, no puede tener un número impar de eslabones. Del mismo modo es factible encontrar el mecanismo más simple posible de este tipo; suponiendo que todos los eslabones son binarios se encuentra que $n = j_1 = 4$. Esto demuestra por qué el eslabonamiento de cuatro barras (Fig. 1-4*c*) y el mecanismo de corredera-manivela (Fig. 1-4*b*) tienen tantas aplicaciones.

Tanto el criterio de Kutzbach, ecuación (1-1), como el criterio de Grübler, ecuación (1-2), se obtuvieron para el caso de mecanismos planos. Si se desarrollan criterios similares para mecanismos espaciales, se debe recordar que cada eslabón no conectado posee seis grados de libertad y cada par de revoluta, por ejemplo, proporciona cinco restricciones. Así pues, algunos argumentos de esta índole llevan a la forma tridimensional del criterio de Kutzbach,

$$m = 6(n - 1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 2j_4 - j_5 \tag{1-3}$$

y del criterio de Grübler

$$6n - 5j_1 - 7 = 0 \tag{1-4}$$

La forma más simple de un mecanismo espacial† en el que todos los pares tienen un solo grado de libertad y con movilidad igual a 1, es entonces $n = j_1 = 7$.

1-7 INVERSIÓN CINEMÁTICA

En la sección 1-4 se hizo notar que todo mecanismo tiene un eslabón fijo denominado marco de referencia. Mientras no se selecciona este eslabón de referencia, un conjunto de eslabones conectados se conoce como cadena cinemática. Cuando se eligen diferentes eslabones como referencias para una cadena cinemática dada, los movimientos *relativos* entre los distintos eslabones no se alteran; pero sus movimientos *absolutos* (los que se miden con respecto al de referencia) pueden

† Nótese que todos los mecanismos planos son excepciones para los criterios de movilidad espacial. Poseen características geométricas especiales en el sentido de que todos los ejes de revolutas son paralelos y perpendiculares al plano de movimiento, y todos los ejes de los prismas se encuentran en él.

cambiar drásticamente. El proceso de elegir como referencia diferentes eslabones de una cadena recibe el nombre de *inversión cinemática*.

En una cadena cinemática de n eslabones, si se escoge cada uno de ellos sucesivamente como referencia, se tienen n inversiones cinemáticas distintas de la cadena, es decir, n mecanismos diferentes. Por ejemplo, la cadena de cuatro eslabones corredera-manivela ilustrada en la figura 1-8 posee cuatro inversiones diferentes.

En la figura 1-8*a* se presenta el mecanismo básico de corredera-manivela, tal y como se encuentra en la mayor parte de los motores de combustión interna de hoy en día. El eslabón 4, el pistón, es impulsado por las gases en expansión y constituye la entrada; el eslabón 2, la manivela, es la salida impulsada; y el marco de referencia es el bloque del cilindro, el eslabón 1. Al invertir los papeles de la entrada y la salida, este mismo mecanismo puede servir como compresora.

En la figura 1-8*b* se ilustra la misma cadena cinemática; sólo que ahora se ha invertido y el eslabón 2 queda estacionario. El eslabón 1, que antes era el de referencia, gira ahora en torno a la revoluta en A. Esta inversión del mecanismo de corredera-manivela se utilizó como base del motor rotatorio empleado en los primeros aviones.

En la figura 1-8*c* aparece otra inversión de la misma cadena de corredera-manivela, compuesta por el eslabón 3, que antes era la biela, y que en estas circunstancias actúa como eslabón de referencia. Este mecanismo se usó para impulsar las ruedas de las primeras locomotoras de vapor, siendo el eslabón 2 una rueda.

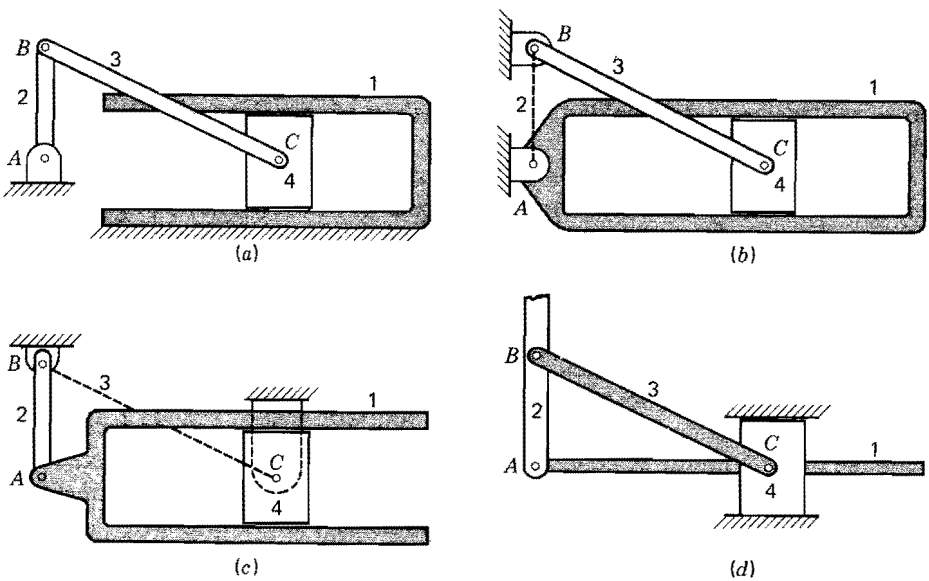


Figura 1-8 Cuatro inversiones del mecanismo de corredera y manivela.

La cuarta y última inversión de la cadena de corredera-manivela tiene al pistón, el eslabón 4, estacionario. Aunque no se encuentra en motores, si se hace girar la figura 90° en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj, este mecanismo se puede reconocer como parte de una bomba de agua para jardín. Se observará en esta figura que el par prismático que conecta los eslabones 1 y 4 está también invertido, es decir, se han invertido los elementos "interior" y "exterior" del par.

1-8 LEY DE GRASHOF

Evidentemente, una de las consideraciones de mayor importancia cuando se diseña un mecanismo que se impulsará con un motor, es asegurarse de que la manivela de entrada pueda realizar una revolución completa. Los mecanismos en los que ningún eslabón describe una revolución completa no serían útiles para estas aplicaciones. Cuando se trata de un eslabonamiento de cuatro barras, existe una prueba muy sencilla para saber si se presenta este caso.

La ley de Grashof afirma que, *para un eslabonamiento plano de cuatro barras, la suma de las longitudes más corta y más larga de los eslabones no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los dos eslabones restantes, si se desea que exista una rotación relativa continua entre dos elementos.* Esto se ilustra en la figura 1-9, en donde el eslabón más largo tiene la longitud l, la del más corto es s y los otros dos tienen las longitudes p y q. Siguiendo esta notación, la ley de Grashof especifica que uno de los eslabones, en particular el más pequeño, girará continuamente en relación con los otros tres sólo cuando

$$s + l \leq p + q \tag{1-5}$$

Si no se satisface esta desigualdad, ningún eslabón efectuará una revolución completa en relación con otro.

Conviene hacer notar el hecho de que nada en la ley de Grashof especifica el orden en el que los eslabones se conectan, o cuál de los eslabones de la cadena de cuatro barras es el fijo. En consecuencia, se está en libertad de fijar cualquiera de los cuatro que se crea conveniente. Cuando se hace ésto se crean las cuatro inversiones del eslabonamiento de cuatro barras ilustrado en la figura 1-9. Las cuatro se ajustan a la ley de Grashof y en cada una de ellas el eslabón s describe una revolución completa en relación con los otros eslabones. Las diferentes inversiones se distinguen por la ubicación del eslabón s en relación con el fijo.

Si el eslabón más corto s es adyacente al fijo, como se consigna en la figura 1-9*a* y *b*, se obtiene lo que se conoce como eslabonamiento de *manivela-oscilador*. Por supuesto, el eslabón s es la manivela ya que es capaz de girar continuamente, y el eslabón p, que sólo puede oscilar entre ciertos límites, es el oscilador.

El mecanismo de *eslabón de arrastre*, llamado también eslabonamiento de *doble manivela*, se obtiene seleccionando al eslabón más corto s como el de referencia. En esta inversión, que se muestra en la figura 1-9*c*, los dos eslabones ad-

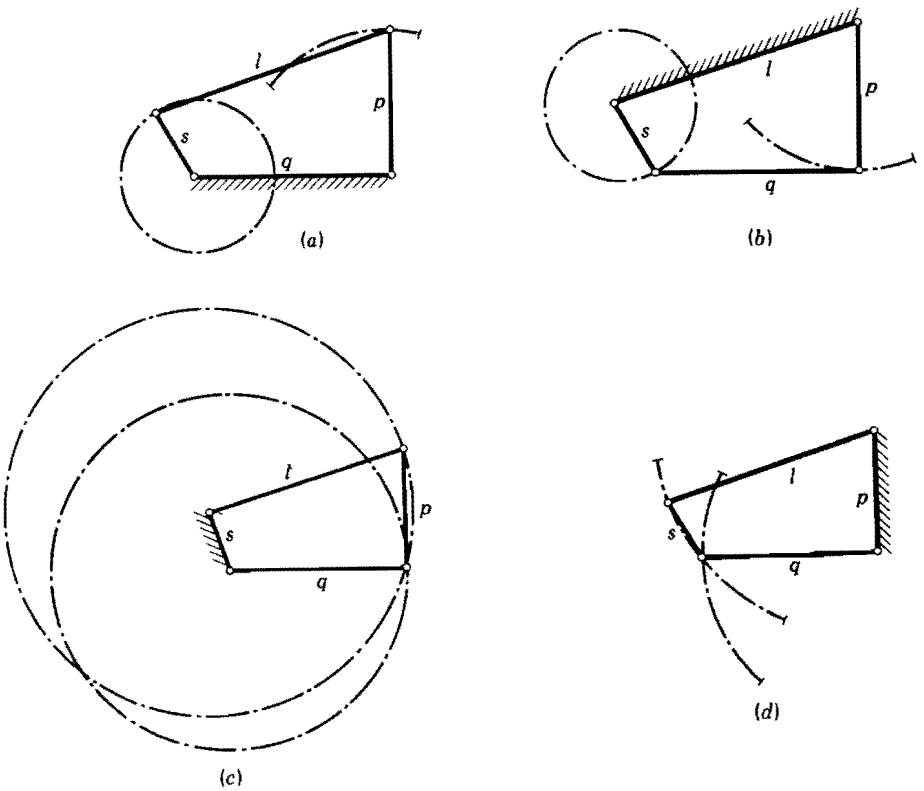


Figura 1-9 Cuatro inversiones de la cadena de Grashof: *a*) y *b*) mecanismo de manivela y oscilador, *c*) mecanismo de eslabón de arrastre y *d*) mecanismo de doble oscilador.

yacentes a s pueden girar en forma continua y ambos se describen adecuadamente como manivelas y, por lo común, el más corto de los dos se usa como entrada. Aunque se trata de un mecanismo muy común, el lector descubrirá que es un problema muy interesante intentar construir un modelo práctico que pueda operar un ciclo completo.

Si se fija el eslabón opuesto a s, se obtiene la cuarta inversión, o sea, el mecanismo de *doble oscilador* que aparece en la figura 1-9*d*. Se observará que aunque el eslabón s es capaz de efectuar una revolución completa, ninguno de los adyacentes al de referencia puede hacer lo mismo, ambos deben oscilar entre límites y son, por lo tanto, osciladores.

En cada una de estas inversiones, el eslabón más corto s es adyacente al más largo l. No obstante, se tendrán exactamente los mismos tipos de inversiones del eslabonamiento si el eslabón más largo l está opuesto al más corto s; el estudiante debe demostrar esto para comprobar que así es en efecto.

1-9 VENTAJA MECÁNICA

Debido al uso difundido del eslabonamiento de cuatro barras, conviene hacer ahora algunas observaciones, las que ayudarán a juzgar la calidad de este tipo de eslabonamiento para su aplicación específica. Examínese el eslabonamiento de cuatro barras ilustrado en la figura 1-10. Puesto que, según la ley de Grashof, este eslabonamiento en particular pertenece a la variedad de manivela-oscilador, es muy probable que el eslabón 2 sea el impulsor y el 4 su seguidor. El eslabón 1 es el de referencia y el 3 se llama el *acoplador*, dado que acopla los movimientos de las manivelas de entrada y salida.

La *ventaja mecánica* de un eslabonamiento es la razón del momento de torsión de salida ejercido por el eslabón impulsado, al momento de torsión de entrada que se necesita en el impulsor. En la sección 3-16 se demostrará que la ventaja mecánica del eslabonamiento de cuatro barras es directamente proporcional al seno del ángulo γ comprendido entre el acoplador y el seguidor, e inversamente proporcional al seno del ángulo β formado por el acoplador y el impulsor. Por supuesto, estos dos ángulos y, por ende, la ventaja mecánica cambian en forma continua conforme se mueve el eslabonamiento.

Cuando el seno del ángulo β se hace cero la ventaja mecánica se hace infinita; de donde, en dicha posición, sólo se necesita un pequeño momento de torsión de entrada para contrarrestar una carga de momento de torsión de salida sustancial. Este es el caso en el que el impulsor AB de la figura 1-10 está directamente alineado con el acoplador BC, y ocurre cuando la manivela está en la posición AB_1, y otra vez cuando se encuentra en la posición AB_4. Se observa que éstas definen también las posiciones extremas de recorrido del oscilador DC_1 y DC_4. Cuando el eslabonamiento de cuatro barras se encuentra en cualquiera de estas posiciones, la

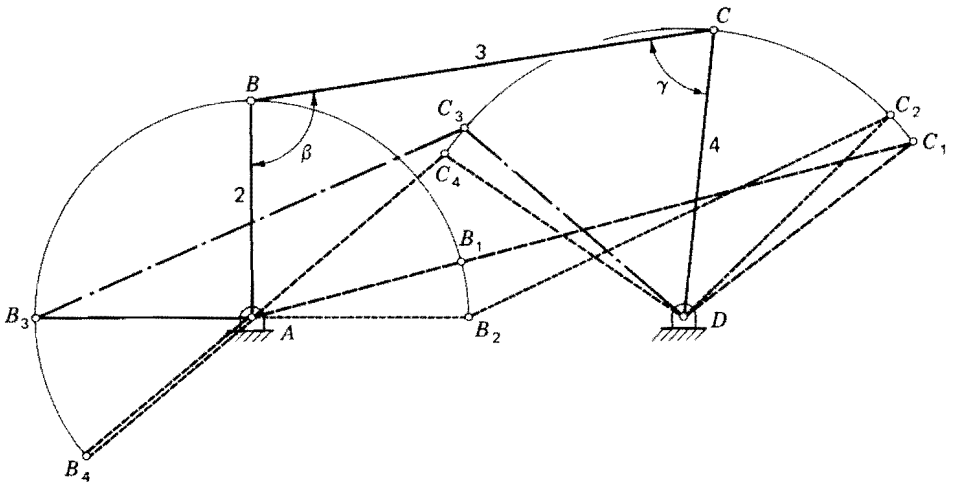


Figura 1-10

ventaja mecánica es infinita y se dice que el eslabonamiento tiene una posición de *volquete.*

El ángulo γ entre el acoplador y el seguidor se llama *ángulo de transmisión*. Conforme éste disminuye, la ventaja mecánica se reduce e incluso una cantidad pequeña de fricción hará que el mecanismo se cierre o se trabe. Una regla práctica común es que el eslabonamiento de cuatro barras no se debe usar en la región en la que el ángulo de transmisión sea menor que, por ejemplo, 45 ó 50°. Los valores extremos del ángulo de transmisión ocurren cuando la manivela AB está alineada con el eslabón de referencia AD. En la figura 1-10, el ángulo de transmisión es mínimo cuando la manivela se encuentra en la posición AB_2 y máximo cuando está en la posición AB_3. Dada la facilidad con la que se puede examinar visualmente, el ángulo de transmisión se ha convertido en una medida comúnmente aceptada de la calidad del diseño de un eslabonamiento de cuatro barras.

Nótese que las definiciones de ventaja mecánica, volquete y ángulo de transmisión dependen de la elección de los eslabones impulsor e impulsado. En esta misma figura, si el eslabón 4 se usa como impulsor y el 2 actúa como seguidor, los papeles de β y γ se invierten. En tal caso, el eslabonamiento no tiene posición de volquete y su ventaja mecánica se hace cero cuando el eslabón 2 se halla en la posición AB_1 o la AB_4, en vista de que el ángulo de transmisión es entonces cero.

En la sección 3-16 se analizarán con más detalle éstos y otros métodos para evaluar lo apropiado que puedan ser los eslabonamientos de cuatro barras o de otra índole.

1-10 CURVAS DEL ACOPLADOR

La biela o acoplador de un eslabonamiento plano de cuatro barras se puede concebir como un plano infinito que se extiende en todas las direcciones; pero que se conecta por medio de pasadores a los eslabones de entrada y de salida. Así pues, durante el movimiento del eslabonamiento, cualquier punto fijado al plano del acoplador genera una trayectoria determinada con respecto al eslabón fijo y que recibe el nombre de *curva del acoplador*. Dos trayectorias de este tipo, a saber, las generadas por las conexiones de pasador del acoplador, son simples círculos cuyos centros se encuentran en los dos pivotes fijos; pero existen otros puntos que describen curvas mucho más complejas.

El atlas de Hrones-Nelson† es una de las fuentes más notables de curvas de acopladores para eslabonamientos de cuatro barras. Esta obra se compone de un conjunto de gráficas de 11 x 17 pulg que contienen más de 7 000 curvas de acopladores de eslabonamientos de manivela-oscilador. En la figura 1-11 se incluye la reproducción de una página típica de este atlas. En cada caso, la longitud de la

† J.A. Hrones y G.L. Nelson, *Analysis of the Four-Bar Linkage*, M.I.T.-Wiley, New York, 1951.

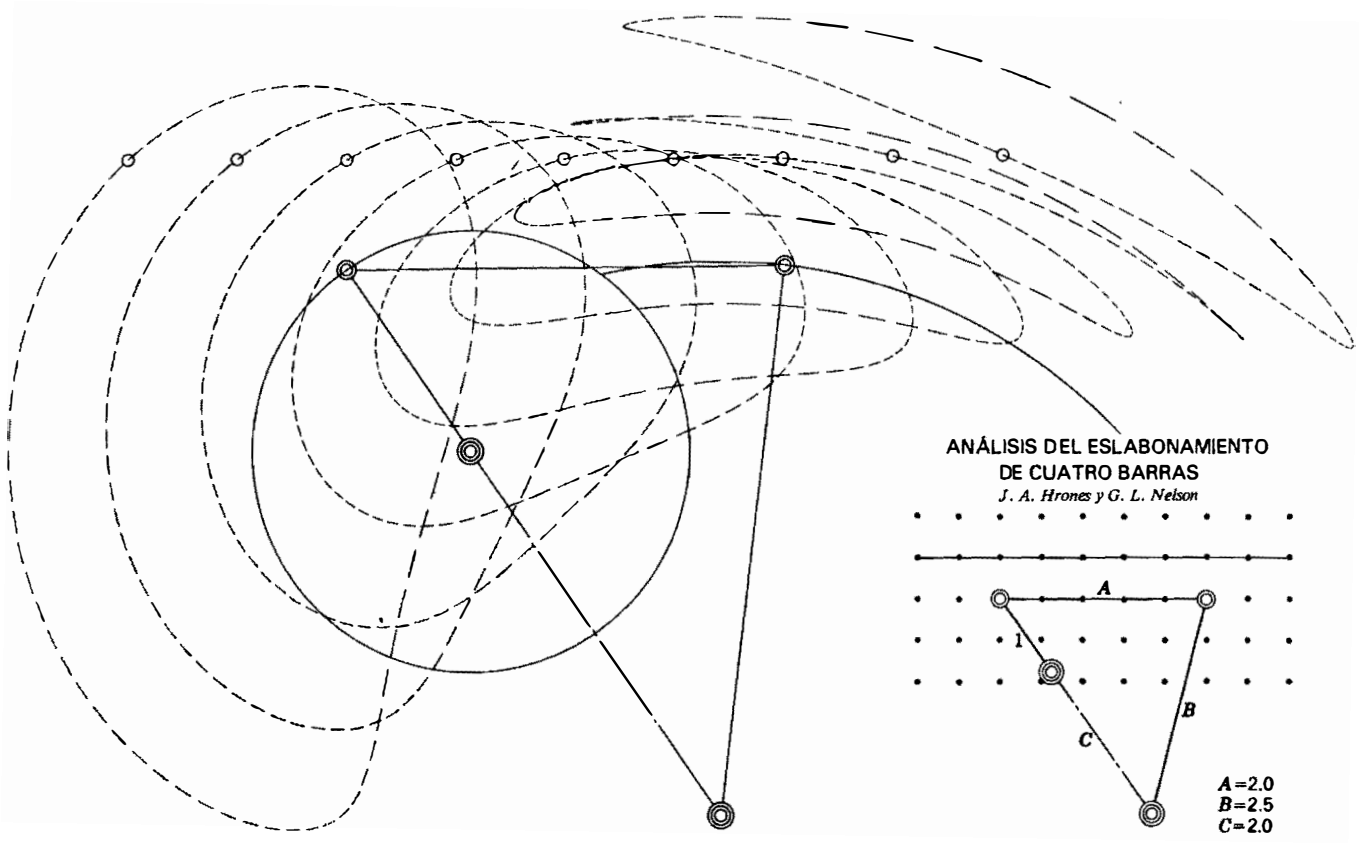


Figura 1-11 Reproducción de una de las páginas de Hrones-Nelson. (*Reproducida con autorización de los editores, The Technology Press, M.I.T., Cambridge, Mass., y John Wiley & Sons, Inc., New York.*)

manivela es la unidad y las longitudes de los otros eslabones varían de página a página para generar diferentes combinaciones. En cada página se eligen varios puntos distintos del acoplador y se presentan las curvas correspondientes. Este atlas es de valor incalculable para el diseñador que necesita que un eslabonamiento dé origen a una curva con las características especificadas.

La ecuación algebraica de una curva del acoplador es, en general, de sexto orden; de donde, es posible hallar curvas con una gran variedad de formas y muchas características interesantes. Algunas de ellas poseen secciones que casi son segmentos rectilíneos (véase la sección 1-11); otras tienen secciones de arcos circulares y otras más una o más cúspides, o bien, se cruzan a sí mismas formando figuras semejantes al ocho. Por consiguiente a menudo no es necesario emplear un mecanismo con muchos eslabones para obtener un movimiento bastante complejo.

Con todo, la complejidad de la ecuación de la curva del acoplador constituye también una desventaja, porque significa que los métodos de cálculo manual se hacen sumamente engorrosos. Por lo tanto, en el curso de los años se han diseñado muchos mecanismos aplicando procedimientos estrictamente intuitivos que se verifican después con modelos de cartón, sin usar principios o procedimientos cinemáticos. Hasta hace poco, estas técnicas que ofrecían un planteamiento racional han tenido una naturaleza gráfica evitando una vez más los cálculos tediosos. Por último, gracias al advenimiento de las computadoras digitales y, en particular, con el desarrollo de las gráficas con computadora, en la actualidad están apareciendo métodos de diseño muy útiles que llevan a cabo directamente los cálculos complicados que se requieren, sin abrumar al diseñador con el tremendo trabajo de cálculo (véase la sección 5-5 en donde se dan más datos sobre estos métodos de diseño).

Uno de los hechos más curiosos e interesantes acerca de la ecuación de la curva de un acoplador, es que la misma curva se puede generar siempre con tres eslabonamientos distintos. Estos se conocen como *eslabonamientos afines* y su teoría se expone en la sección 10-11.

1.11 MECANISMOS DE LÍNEA RECTA

A finales del siglo XVII, antes de la aparición de la fresadora, era extremadamente difícil maquinar superficies rectas y planas; y por esta razón no era fácil fabricar pares prismáticos aceptables, que no tuvieran demasiado juego entre dientes. Durante esa época se reflexionó mucho sobre el problema de obtener un movimiento en línea recta como parte de la curva del acoplador de un eslabonamiento que sólo contara con conexiones de revoluta. Es probable que el resultado mejor conocido de esta búsqueda sea la invención del mecanismo de línea recta desarrollado por Watt para guiar el pistón de las primeras máquinas de vapor. En la figura 1-12*a* se muestra que el *eslabonamiento de Watt* es uno de cuatro barras que desarrolla una línea aproximadamente recta como parte de su curva del acoplador.

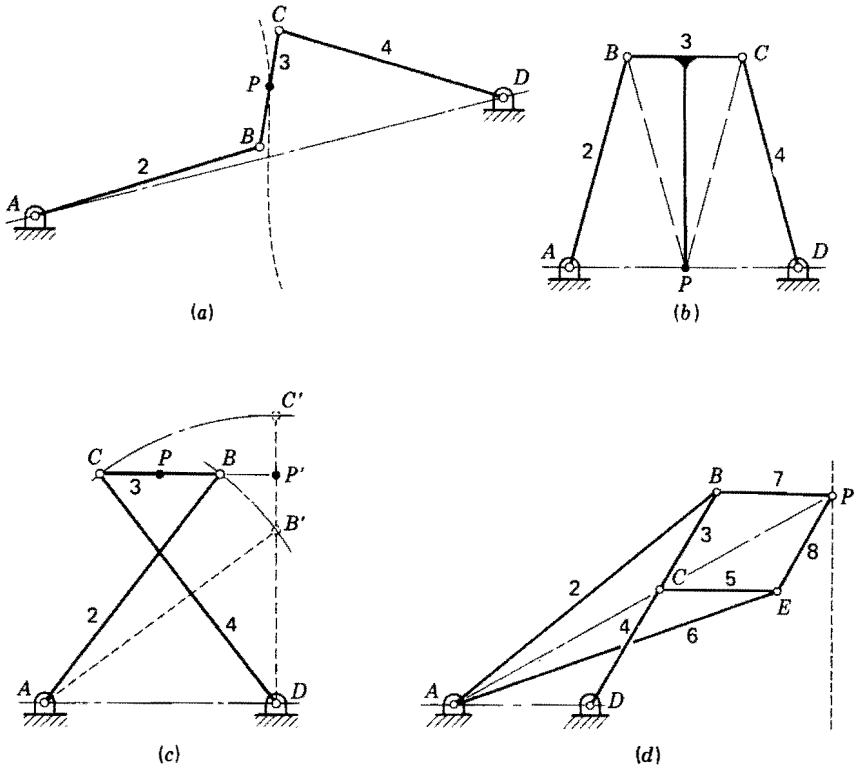


Figura 1-12 Mecanismos de linea recta: *a*) eslabonamiento de Watt, *b*) mecanismo de Roberts, *c*) eslabonamiento de Chebychev y *d*) inversor de Peaucillier.

Aunque no describe una recta exacta, se logra una aproximación aceptable sobre una distancia de recorrido considerable.

Otro eslabonamiento de cuatro barras en el que el punto de trazo P genera un segmento aproximadamente rectilíneo de la curva del acoplador, es el *mecanismo de Roberts* (Fig. 1-12*b*). Las líneas a trazos de la figura indican que el eslabonamiento se define cuando se forman tres triángulos isósceles congruentes; de donde, $BC = AD/2$.

El punto de trazo P del *eslabonamiento de Chebychev* de la figura 1-12*c* genera también una línea más o menos recta. El eslabonamiento se forma creando un triángulo 3-4-5 con el eslabón 4 en posición vertical, como la señalan las líneas a trazos; así pues, $DB' = 3$, $AD = 4$, y $AB' = 5$. Puesto que $AB = DC, DC' = 5$ y el punto de trazo P' es el punto medio del eslabón BC. Nótese que $DP'C$ forma también un triángulo 3-4-5 y, por tanto, P y P' son dos puntos sobre una recta paralela a AD.

Aun más, otro mecanismo que genera un segmento rectilíneo es el *inversor de Peaucillier* ilustrado en la figura 1-12*d*. Las condiciones que describen su geometría

son que $BC = BP = EC = EP$ y $AB = AE$ de tal modo que, por simetría, los puntos A, C y P siempre están sobre una recta que pasa por A. En estas circunstancias, $AC \cdot AP = k$, una constante, y se dice que las curvas generadas por C y P son *inversas* una de la otra. Si se coloca el otro pivote fijo D de tal suerte que $AD = CD$, entonces, el punto C debe recorrer un arco circular y el punto P describirá una línea recta *exacta*. Otra propiedad interesante es que si AD no es igual a CD, se puede hacer que el punto P recorra un arco verdaderamente circular de radio muy grande.

Hunt, Fink y Nayar† dan las dimensiones de una clase de eslabonamientos de cuatro barras que generan una trayectoria triangular simétrica en la que dos de los lados son aproximadamente rectos.

Hartenberg y Denavit‡, y Hall§ ilustran la mayor parte de los generadores clásicos de líneas rectas. Tesar y Vidosic¶ investigaron con gran detalle los mecanismos generadores de rectas aproximadas e hicieron una recopilación considerable de información de diseño sobre esta clase de mecanismos.

1-12 MECANISMOS DE RETORNO RÁPIDO

En muchas aplicaciones, los mecanismos se usan para realizar operaciones repetitivas tales como empujar piezas a lo largo de una línea de montaje, sujetar piezas juntas mientras se sueldan o para doblar cajas de cartón en una máquina de embalaje automatizada. En esta clase de aplicaciones resulta a menudo conveniente usar un motor de velocidad constante, y esto es lo que llevó al análisis de la ley de Grashof presentada en la sección 1-8. No obstante, también es preciso tomar en cuenta los requerimientos de energía y tiempo.

En estas operaciones repetitivas existe por lo común una parte del ciclo en la que el mecanismo se somete a una carga, llamada *carrera de avance* o *de trabajo*, y una parte del ciclo conocida como *carrera de retorno* en la que el mecanismo no efectúa un trabajo sino que se limita a devolverse para repetir la operación. Por ejemplo, en el mecanismo excéntrico de corredera-manivela de la figura 1-13, puede ser que se requiera trabajo para contrarrestar la carga F mientras el pistón se mueve hacia la derecha, desde C_1 hasta C_2; pero no así durante su retorno a la posición C_1, ya que es probable que se haya quitado la carga. En tales situaciones, para mantener los requerimientos de potencia del motor en un mínimo y evitar el desperdicio de tiempo valioso, conviene diseñar el mecanismo de tal manera que el pistón se mueva con mayor rapidez durante la carrera de retorno que en la

† K. H. Hunt, N. Fink y J. Nayar, "Linkage Geneva Mechanisms: A design Study in Mechanism Geometry," *Proc. Inst. Mech. Engr.*, vol. 174, no. 21, pp. 643-668, 1960; véase también J. Hirschhorn, *Kinematics and Dynamic of Plane Mechanisms*, McGraw-Hill, New York, 1964, pp. 349-353.

‡ *Op. cit.*

§ A. S. Hall, Jr., *Kinematics and Linkage Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

¶ D. Tesar y J. P. Vidosic, "Analysis of Approximate Four-Bar Straight-Line Mechanisms," *J. Eng. Ind.*, Vol. 87, no. 3, 1965.

carrera de trabajo, es decir, usar una fracción mayor del ciclo para ejecutar el trabajo que para el retorno.

Una medida de lo apropiado de un mecanismo desde este punto de vista, conocida con el nombre de *razón del tiempo de avance al tiempo de retorno*, se define mediante la fórmula

$$Q = \frac{\text{tiempo de la carrera de avance}}{\text{tiempo de la carrera de retorno}} \qquad (a)$$

Un mecanismo para el cual el valor de Q es grande, resulta más conveniente para esta clase de operaciones repetitivas que aquéllos que se caracterizan por valores pequeños de Q. Ciertamente, cualquier operación de esta naturaleza emplearía un mecanismo para el cual Q es mayor que la unidad. Debido a esto, los mecanismos con valores de Q superiores a la unidad se conocen como de *retorno rápido.*

Suponiendo que el motor impulsor opera a velocidad constante, es fácil encontrar la razón de tiempos. Como se indica en la figura 1-13, lo primero es determinar las dos posiciones de la manivela, AB_1 y AB_2, que marcan el principio y el fin de la carrera de trabajo. A continuación, después de observar la dirección de rotación de la manivela, se mide el ángulo de la manivela α que se recorre durante la carrera de avance y el ángulo restante de la manivela β, de la carrera de retorno. Luego, si el periodo del motor es τ, el tiempo de la carrera de avance es

$$\text{Tiempo de la carrera de avance} = \frac{\alpha}{2\pi}\tau \qquad (b)$$

y el de la carrera de retorno es

$$\text{Tiempo de la carrera de retorno} = \frac{\beta}{2\pi}\tau \qquad (c)$$

Por último, combinando las ecuaciones (a), (b) y (c) se obtiene la sencilla expresión que sigue para la razón de tiempos:

$$Q = \frac{\alpha}{\beta} \qquad (1\text{-}6)$$

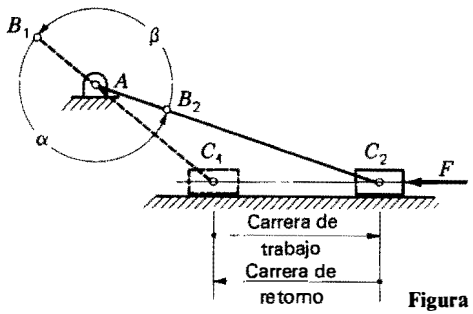


Figura 1-13 Mecanismo excéntrico de corredera y manivela.

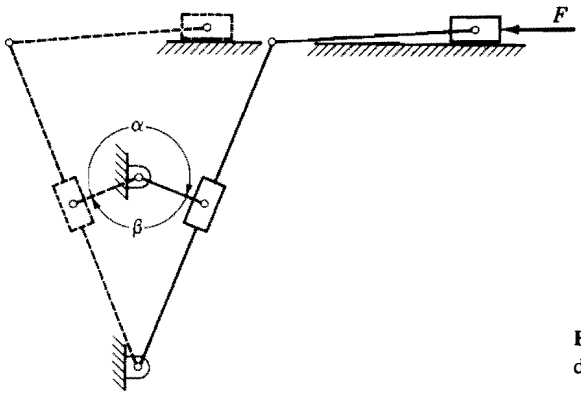


Figura 1-14 Mecanismo de Whitworth de retorno rápido.

Nótese que la razón de tiempos de un mecanismo de retorno rápido no depende de la cantidad de trabajo realizado o incluso de la velocidad del motor impulsor, sino que es una propiedad cinemática del propio mecanismo y se encuentra basándose exclusivamente en la geometría del dispositivo.

No obstante, se observará también que existe una dirección apropiada de rotación y una no apropiada en esta clase de dispositivo. Si se invirtiera el motor del ejemplo de la figura 1-13, los papeles de α y β se invertirían también y la razón de tiempos sería menor que 1. De donde, el motor debe girar en el sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj cuando se trata de este mecanismo, con el fin de asegurar la propiedad de retorno rápido.

Es factible encontrar muchos otros mecanismos con características de retorno rápido. Otro de los ejemplos clásicos es el *mecanismo de Whitworth*, llamado también *mecanismo de limadora o troquel de manivela,* y que se ilustra en la figura 1-14. Aunque la determinación de los ángulos α y β es diferente para cada mecanismo, la ecuación (1-6) se aplica a todos ellos.

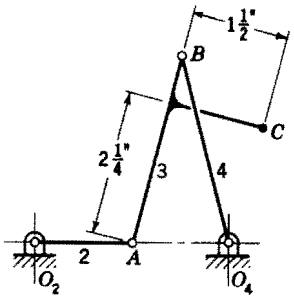
PROBLEMAS

1-1 Dibújense por lo menos seis ejemplos distintos de la aplicación de un eslabonamiento plano de cuatro barras de tipo común. Estos pueden encontrarse en talleres, aparatos domésticos, vehículos, maquinaria agrícola, etc.

1-2 Las longitudes de los eslabones de un eslabonamiento plano de cuatro barras son 1, 3, 5 y 5 pulg. Móntense en todas las combinaciones posibles y dibújense cuatro inversiones de cada uno. ¿Satisfacen estos eslabonamientos la ley de Grashof? Descríbase cada inversión por nombre, por ejemplo, mecanismo de manivela y oscilador o mecanismo de eslabón de arrastre.

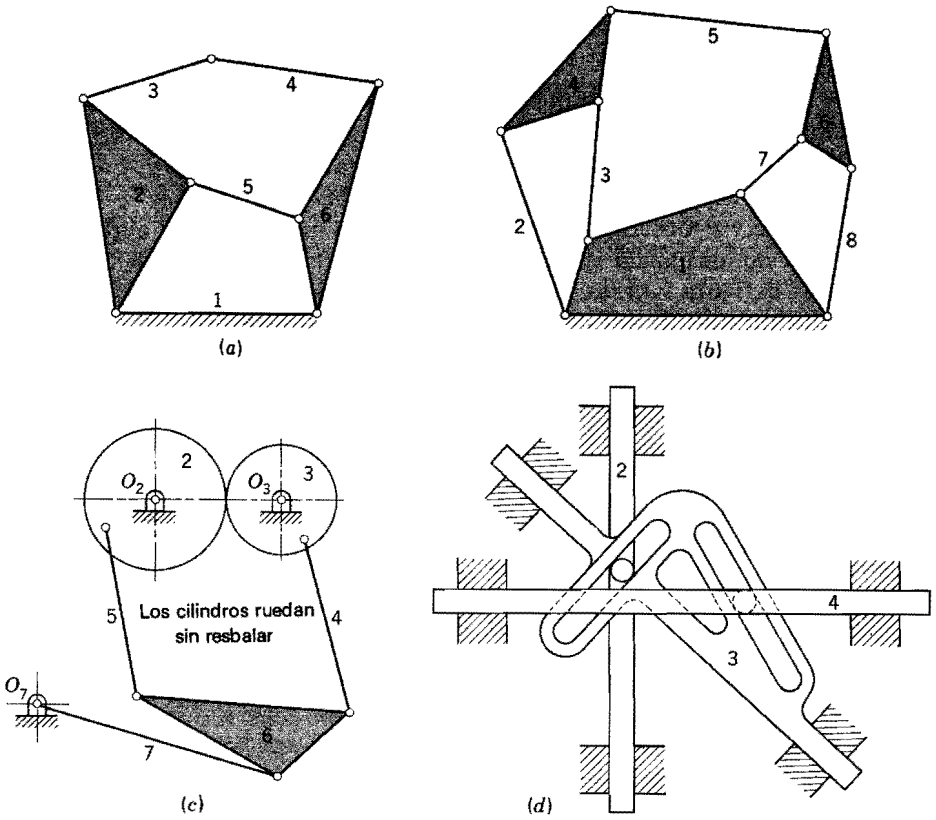
1-3 Un eslabonamiento de manivela-oscilador tiene un eslabón de referencia de 100 mm, una manivela de 25 mm, un acoplador de 90 mm y un oscilador de 75 mm. Dibújese el eslabonamiento y encuéntrense los valores máximo y mínimo del ángulo de transmisión. Localícense las dos posiciones de volquete y anótense los ángulos de la manivela correspondientes, así como los de transmisión.

1-4 En la figura, el punto C está sujeto al acoplador; trácese su trayectoria completa.



Problema 1-4

1-5 Encuéntrese la movilidad de cada uno de los mecanismos ilustrados en la figura que sigue.



Problema 1-5

1-6 Aplíquese el criterio de movilidad para encontrar un mecanismo plano que contenga un eslabón cuaternario móvil. ¿Cuántas inversiones de este mecanismo pueden hallarse?

1-7 Determínese la razón de tiempos del eslabonamiento del problema 1-2.

1-8 Diséñese un modelo práctico del mecanismo de eslabón de arrastre.

1-9 Trácese la gráfica de la curva completa del acoplador correspondiente al mecanismo de Roberts ilustrado en la figura 1-12*b*. Úsese $AB = CD = AD = 2.5$ pulg y $BC = 1.25$ pulg.

CAPÍTULO

DOS

POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

Al analizar el movimiento, el problema inicial y más fundamental que se encuentra es definir y manejar los conceptos de posición y desplazamiento. Puesto que se puede considerar que el movimiento es una serie de desplazamientos en el tiempo siguiendo posiciones sucesivas, es importante comprender con exactitud el significado del término *posición*; en otras palabras, es necesario establecer reglas o convenciones para que la definición sea precisa.

Aunque muchos de los conceptos de este capítulo puedan parecer intuitivos y casi triviales, aquí se explican muchas sutilezas que es obligatorio comprender para entender los siguientes capítulos.

2-1 SISTEMAS DE COORDENADAS

Al hablar de la posición de una partícula o de un punto, se está contestando en realidad a la pregunta: ¿en dónde se encuentra el punto o cuál es su ubicación? Se está haciendo referencia a algo que existe en la naturaleza y crea la interrogante de cómo expresarlo (en palabras, símbolos o números) de tal manera que su significado sea claro. Pronto se descubre que no se puede definir la posición en forma verdaderamente absoluta; la posición de un punto debe definirse expresándola en función de algún marco de referencia acordado, o sea, un sistema de coordenadas de referencia.

Como se ilustra en la figura 2-1*a*, una vez que se establece el sistema de coordenadas *xyz* como el marco de referencia, se dice que el punto *P* está localizado a *x* unidades a lo largo del eje *x*, *y* unidades a lo largo del eje *y* y *z* unidades a lo largo del eje *z a partir del origen O*. En la propia definición se observa que hay tres par-

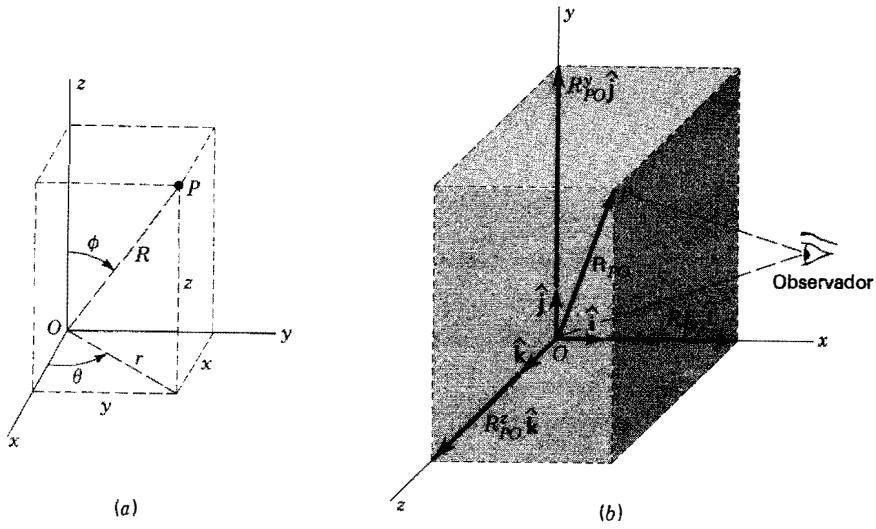


Figura 2-1 *a*) Sistema derecho de coordenadas tridimensionales; *b*) posición de un punto.

tes vitalmente importantes que dependen de la existencia del sistema de coordenadas de referencia:

1. El *origen* de las coordenadas O proporciona una ubicación acordada a partir de la cual se mide la situación del punto P.
2. Los *ejes de coordenadas* proporcionan *direcciones* acordadas (y *sentidos* acordados) a lo largo de las cuales se harán las mediciones; también ofrecen rectas y planos conocidos para definir y medir ángulos.
3. La unidad de distancia o distancia unitaria a lo largo de cualquiera de los ejes constituye una *escala* para cuantificar las distancias.

Estas observaciones no se restringen a las coordenadas cartesianas (x,y,z) del punto P. Las tres propiedades del sistema de coordenadas también son necesarias para definir las cilíndricas (r, θ, z), las esféricas (R, θ, ϕ) o cualesquiera otras coordenadas del punto P. Asimismo, se necesitarían las mismas propiedades si el punto P se restringiera a permanecer en un solo plano y se empleara un sistema de coordenadas bidimensional. No importa como se defina, el concepto de la posición de un punto no se puede relacionar sin definir un sistema de coordenadas de referencia.

2-2 POSICIÓN DE UN PUNTO

Como se ilustra en la figura 2-1*b*, el proceso físico que se sigue para observar la posición de un punto implica que el observador está siguiendo en realidad la

ubicación *relativa* de *dos* puntos, P y O, viéndolos, efectuando una comparación mental y reconociendo que el punto P posee una colocación determinada *con relación al punto O.* En esta determinación sobresalen dos propiedades, la distancia de O a P (basada en la distancia unitaria o en las dimensiones del cuadriculado del sistema de coordenadas de referencia) y la orientación angular relativa de la recta OP en el sistema de coordenadas. Estas dos propiedades, magnitud y dirección (y sentido), son precisamente las que se requieren en un vector; de donde, la *posición de un punto* se define como el *vector que va del origen de un sistema de coordenadas de referencia especificado al punto.* Aquí se eligió el símbolo $\mathbf{R}_{PO}$ para denotar la posición vectorial del punto P con relación al punto O.

Por consiguiente, el sistema de coordenadas de referencia está relacionado en una forma especial con un concepto particular del observador sobre lo que ve. ¿Cuál es esta relación? ¿Qué propiedades debe poseer este sistema de coordenadas para asegurar que las mediciones de posición hechas con respecto al mismo representen verdaderamente sus observaciones? La clave de esta relación es que el sistema de coordenadas es *estacionario* con respecto a dicho observador. En otras palabras, el observador se considera a sí mismo como un elemento estacionario en su sistema de coordenadas de referencia elegido. Si se mueve, ya sea recorriendo una distancia o girando, su sistema de coordenadas se mueve con él. De esta manera se asegura que los objetos que parecen estacionarios *con respecto a él*, es decir, tal y como los observa, no cambian sus posiciones dentro del sistema de coordenadas y sus vectores de posición permanecen constantes. Los puntos que percibe como móviles cuentan con vectores de posición variables.

Se notará que no se ha hecho mención de la *ubicación* real del observador dentro del marco de referencia. Se puede encontrar en cualquier punto dentro de dicho sistema; y no es necesario conocer su posición ya que las posiciones de los puntos observados se encuentran con relación al origen de las coordenadas, y no con respecto a la del observador.

Con frecuencia es conveniente expresar el vector de posición en términos de sus componentes a lo largo de los ejes de coordenadas

$$\mathbf{R}_{PO} = R^x_{PO}\hat{\mathbf{i}} + R^y_{PO}\hat{\mathbf{j}} + R^z_{PO}\hat{\mathbf{k}} \tag{2-1}$$

en donde los subíndices denotan la dirección de cada componente. De aquí en adelante, en esta obra se usarán los símbolos $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ para designar los vectores unitarios en las direcciones de los ejes x, y y z, respectivamente. En tanto que los vectores se denotan en esta obra utilizando negritas, la magnitud escalar de un vector se representa con el mismo símbolo en cursivas blancas. Por ejemplo, la magnitud del vector de posición es

$$R_{PO} = |\mathbf{R}_{PO}| = \sqrt{\mathbf{R}_{PO} \cdot \mathbf{R}_{PO}} = \sqrt{(R^x_{PO})^2 + (R^y_{PO})^2 + (R^z_{PO})^2} \tag{2-2}$$

El *vector unitario* en la dirección de $\mathbf{R}_{PO}$ se denota con el mismo símbolo en negritas con un signo de intercalación arriba:

$$\hat{\mathbf{R}}_{PO} = \frac{\mathbf{R}_{PO}}{R_{PO}} \tag{2-3}$$

La dirección de $\mathbf{R}_{PO}$ se puede expresar, entre otras maneras, mediante los cosenos directores

$$\cos\alpha = \frac{R^x_{PO}}{R_{PO}} \qquad \cos\beta = \frac{R^y_{PO}}{R_{PO}} \qquad \cos\gamma = \frac{R^z_{PO}}{R_{PO}} \tag{2-4}$$

en donde los ángulos α, β, y γ son, respectivamente, los ángulos medidos a partir de los ejes de coordenadas positivos hasta el vector $\mathbf{R}_{PO}$.

Uno de los medios para expresar el movimiento de un punto o una partícula consiste en definir sus componentes a lo largo de los ejes de referencia, como funciones de algún parámetro, por ejemplo, el tiempo

$$R^x_{PO} = R^x_{PO}(t) \qquad R^y_{PO} = R^y_{PO}(t) \qquad R^z_{PO} = R^z_{PO}(t) \tag{2-5}$$

Si se conocen estas relaciones, se puede hallar el vector de posición $\mathbf{R}_{PO}$ para cualquier instante t. Este es el caso general del movimiento de una partícula y se ilustra en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 2-1 Descríbase el movimiento de una partícula P cuya posición cambia con el tiempo según las ecuaciones $R^x_{PO} = a\cos 2\pi t$, $R^y_{PO} = a\,\text{sen}\,2\pi t$, y $R^z_{PO} = bt$.

SOLUCIÓN Al sustituir los valores de t, de 0 a 2, se obtienen los valores indicados en la tabla que sigue:

t	R^x_{PO}	R^y_{PO}	R^z_{PO}
0	a	0	0
$\frac{1}{4}$	0	a	$b/4$
$\frac{1}{2}$	$-a$	0	$b/2$
$\frac{3}{4}$	0	$-a$	$3b/4$
1	a	0	b
$\frac{5}{4}$	0	a	$5b/4$
$\frac{3}{2}$	$-a$	0	$3b/2$
$\frac{7}{4}$	0	$-a$	$7b/4$
2	a	0	$2b$

Como se indica en la figura 2-2, el punto describe un *movimiento helicoidal* con radio a, en torno al eje z, y con un avance b. Nótese que si $b = 0, R^z_{PO}(t) = 0$, la partícula en movimiento queda confinada al plano xy y describe un círculo cuyo centro se localiza en el origen.

Se han venido usando las palabras partícula y punto en forma intercambiable. Cuando se utiliza el vocablo *punto* se piensa en algo que carece de dimensiones, es decir, con longitud cero, anchura cero y espesor cero. Cuando se emplea el término partícula se piensa en algo cuyas dimensiones son tan pequeñas y sin importancia, es decir, un cuerpo material tan diminuto, que sus dimensiones son despreciables, un cuerpo lo suficientemente pequeño como para que sus magnitudes no tengan efecto sobre el análisis que vaya a realizarse.

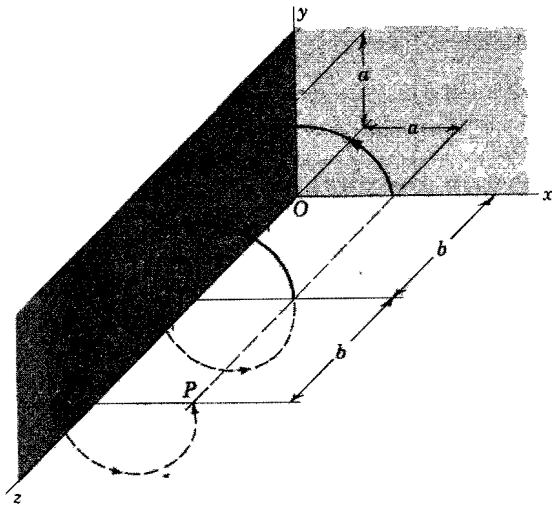


Figura 2-2 Movimiento helicoidal de una partícula.

Las posiciones sucesivas de un punto en movimiento definen una recta o una curva. Esta curva no tiene espesor dado que el punto carece de dimensiones; sin embargo, la curva tiene longitud puesto que el punto ocupa diferentes posiciones conforme varía el tiempo. Esta curva, que representa las posiciones sucesivas del punto, se denomina *trayectoria* o *lugar geométrico* del punto en movimiento en el sistema de coordenadas de referencia.

Si se necesitan tres coordenadas para describir la trayectoria de un punto en movimiento, se dice que éste tiene *movimiento espacial*. Si se puede describir por medio de dos coordenadas solamente, o sea, si se pueden elegir los ejes de coordenadas de tal manera que una coordenada siempre sea cero o constante, la trayectoria está contenida en un solo plano y se dice que el punto posee *movimiento plano*. Hay ocasiones en que la trayectoria de un punto se puede describir mediante una sola coordenada; lo que significa que dos de sus coordenadas espaciales de posición se pueden tomar como cero o constantes. En este caso el punto se mueve en línea recta y se dice que manifiesta un *movimiento rectilíneo*.

En cada uno de los tres casos descritos se supone que el sistema de coordenadas se elige de tal modo que se obtenga el número mínimo de coordenadas necesarias para describir el movimiento del punto. De donde, la descripción del movimiento rectilíneo sólo necesita una coordenada, un punto cuya trayectoria es una *curva plana* requiere dos coordenadas y un punto cuyo lugar geométrico es una curva en el espacio, que en ocasiones se denomina también *curva sesgada*, necesita tres coordenadas de posición.

2-3 DIFERENCIA DE POSICIÓN ENTRE DOS PUNTOS

Ahora se investigará la relación entre los vectores de posición de dos puntos diferentes; esta situación se ilustra en la figura 2-3*a*. En la sección anterior se demos-

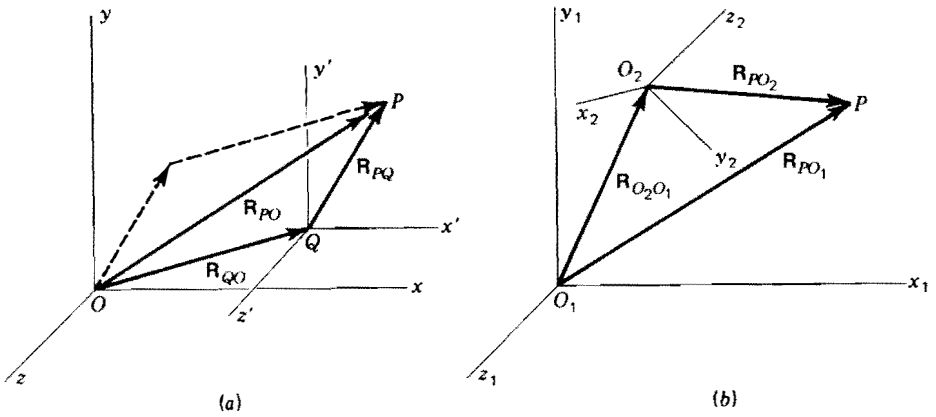


Figura 2-3 *a*) Diferencia de posición entre dos puntos, P y Q. *b*) Posición aparente de un punto P.

tró que un observador fijo en el sistema de coordenadas xyz consideraría las posiciones de los puntos P y Q comparándolas con la ubicación del origen. Las posiciones de los dos puntos se definen por medio de los vectores $\mathbf{R}_{PO}$ y $\mathbf{R}_{QO}$.

Al examinar la figura se observa que tales vectores están relacionados por un tercer vector $\mathbf{R}_{PQ}$, que es la *diferencia de posición* entre los puntos P y Q. En la figura se ve que esta relación es

$$\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{R}_{PO} - \mathbf{R}_{QO} \tag{2-6}$$

La interpretación física es ahora ligeramente distinta de la del propio vector de posición. El observador ya no está comparando la posición del punto P con la del origen; ahora la está comparando con la del punto Q. En otras palabras, está observando la posición del punto P como si se encontrara en otro sistema de coordenadas temporales $x'y'z'$, cuyo origen se localiza en Q, y cuyos ejes son paralelos† a los de su sistema básico de referencia xyz. Se suele aplicar cualquiera de estos puntos de vista para la interpretación, y es necesario comprender ambos porque se emplearán en desarrollos futuros.

Después de generalizar el concepto de posición relativa para incluir la diferencia de posición entre dos puntos cualesquiera, conviene retornar al estudio anterior del propio vector de posición. Se observa que es simplemente el caso especial en el que se conviene efectuar las mediciones utilizando el origen de coordenadas como segundo punto. De donde, para ser coherentes por lo que respecta a la notación, el vector de posición de un solo punto P se denota con el símbolo de doble subíndice $\mathbf{R}_{PO}$. No obstante, para mayor brevedad se convendrá que de aquí en adelante,

† El que estos sistemas de coordenadas tengan ejes paralelos es una condición conveniente más que necesaria. Sin embargo, este concepto se sostendrá a lo largo de esta obra en virtud de que no se pierde generalidad y sí se simplifica la concepción cuando los sistemas de coordenadas están en movimiento.

cuando no se especifique el segundo subíndice en forma explícita, se entiende que es el origen del sistema de coordenadas del observador.

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{PO} \tag{2-7}$$

2-4 POSICIÓN APARENTE DE UN PUNTO

Hasta ahora, al analizar el vector de posición, el punto de vista sustentado ha sido por completo el de un solo observador en un solo sistema de coordenadas. No obstante, a menudo resulta conveniente hacer observaciones en un sistema de coordenadas secundario, es decir, tal y como lo ve un segundo observador en un sistema de coordenadas distinto, y luego llevar esta información hacia el sistema de coordenadas básico. En la figura 2-3*b* se ilustra esta situación.

Si se pide a dos observadores, uno de los cuales utiliza el marco de referencia $x_1y_1z_1$ y el otro el $x_2y_2z_2$, que den la ubicación de un partícula en P, proporcionarían resultados distintos. El observador del primer sistema de coordenadas $x_1y_1z_1$ vería el vector $\mathbf{R}_{PO_1}$, mientras que el segundo, el que utiliza el sistema $x_2y_2z_2$, señalaría el vector de posición $\mathbf{R}_{PO_2}$. En la figura 2-3*b* se observa que estos vectores están relacionados por medio de la expresión

$$\mathbf{R}_{PO_1} = \mathbf{R}_{O_2O_1} + \mathbf{R}_{PO_2} \tag{2-8}$$

La diferencia en las posiciones de los dos orígenes no es la única incompatibilidad entre las dos observaciones de la posición del punto P. Puesto que los dos sistemas de coordenadas no están alineados,† los dos observadores usarían diferentes rectas de referencia para sus mediciones de la dirección; el primero daría las componentes medidas a lo largo de los ejes $x_1y_1z_1$, mientras que el segundo lo haría en las direcciones $x_2y_2z_2$.

Hay una tercera distinción de suma importancia entre estas dos observaciones que se hace evidente cuando se considera que los dos sistemas de coordenadas pueden estar en movimiento el uno con respecto al otro. Mientras que el punto P puede parecer estacionario con respecto a uno de los observadores, puede estar en movimiento con respecto al otro; dicho de otra manera, el vector de posición $\mathbf{R}_{PO_1}$ puede parecer constante al observador 1, en tanto que al observador 2 le parecerá que $\mathbf{R}_{PO_2}$ varía.

Cuando existe cualquiera de estas condiciones, será conveniente agregar un subíndice más a la notación usada para distinguir al observador que se está tomando en consideración. Cuando se está considerando la posición de P, vista por el observador que usa el sistema de coordenadas $x_1y_1z_1$, ésto se denotará con el símbolo $\mathbf{R}_{P●_1/1}$, o bien, puesto que O_1 es el origen para este observador,‡ por medio

† Nótese que la condición de que los sistemas de coordenadas tengan ejes paralelos se supuso para el vector de diferencia de posiciones, figura 2-3*a*; pero no así para el vector de posición aparente.

‡ Se observará que $\mathbf{R}_{PO_2/1}$ no se puede abreviar escribiéndolo $\mathbf{R}_{P/1}$, puesto que O_2 no es el origen que utiliza el observador 1.

de $\mathbf{R}_{P/1}$. Las observaciones hechas por la segunda persona, en el sistema de coordenadas $x_2y_2z_2$ se denotarán con los símbolos $\mathbf{R}_{PO_2/2}$ o $\mathbf{R}_{P/2}$. Con esta ampliación de la notación, la ecuación (2-8) se convierte en

$$\mathbf{R}_{P/1} = \mathbf{R}_{O_2/1} + \mathbf{R}_{P/2} \tag{2-9}$$

El vector $\mathbf{R}_{P/2}$ se denomina *posición aparente del punto P para un observador en el sistema de coordenadas 2,* y es obvio que de ninguna manera es igual al vector de posición aparente $\mathbf{R}_{P/1}$, visto por el observador 1.

Se han hecho notar ahora ciertas diferencias intrínsecas entre $\mathbf{R}_{P/1}$ y $\mathbf{R}_{P/2}$ y se ha encontrado la ecuación (2-9) para relacionarlos. No obstante, no existe razón alguna por la que las componentes de cualquiera de los vectores *deban* tomarse a lo largo de los ejes naturales del sistema de coordenadas del observador. Al igual que con todos los vectores, se pueden hallar las componentes a lo largo de cualquier conjunto conveniente de ejes.

Al aplicar la ecuación de la posición aparente (2-9) es necesario usar un solo conjunto coherente de ejes durante la evaluación numérica. Aunque el observador en el sistema de coordenadas 2 pensaría que lo más natural sería medir las componentes de $\mathbf{R}_{P/2}$ a lo largo de los ejes $x_2y_2z_2$, éstas se deben transformar en las componentes equivalentes en el sistema $x_1y_1z_1$, antes de que se lleve a cabo en realidad la adición

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{P/1} &= \mathbf{R}_{O_2/1} + \mathbf{R}_{P/2} \\
&= R^{x_1}_{O_2/1}\hat{\mathbf{i}}_1 + R^{y_1}_{O_2/1}\hat{\mathbf{j}}_1 + R^{z_1}_{O_2/1}\hat{\mathbf{k}}_1 + R^{x_1}_{P/2}\hat{\mathbf{i}}_1 + R^{y_1}_{P/2}\hat{\mathbf{j}}_1 + R^{z_1}_{P/2}\hat{\mathbf{k}}_1 \\
&= (R^{x_1}_{O_2/1} + R^{x_1}_{P/2})\hat{\mathbf{i}}_1 + (R^{y_1}_{O_2/1} + R^{y_1}_{P/2})\hat{\mathbf{j}}_1 + (R^{z_1}_{O_2/1} + R^{z_1}_{P/2})\hat{\mathbf{k}}_1 \\
&= R^{x_1}_{P/1}\hat{\mathbf{i}}_1 + R^{y_1}_{P/1}\hat{\mathbf{j}}_1 + R^{z_1}_{P/1}\hat{\mathbf{k}}_1
\end{aligned}$$

La adición se efectúa con la misma facilidad si todas las componentes vectoriales se transforman al sistema $x_2y_2z_2$ o bien, según sea el caso, a cualquier otro conjunto coherente de direcciones. Sin embargo, no se pueden sumar algebraicamente cuando se midieron a lo largo de ejes no coherentes. Por lo tanto, el subíndice adicional en el vector de posición aparente no especifica, un conjunto de direcciones que sea preciso usar en la evaluación de las componentes; sólo se limita a identificar el sistema de coordenadas en el que se define al vector, el sistema en el que el observador es estacionario.

2-5 POSICIÓN ABSOLUTA DE UN PUNTO

Ahora se verá el significado de *posición absoluta*. En la sección 2-2 se vio que todo vector de posición se define en relación con un segundo punto, el origen del sistema de coordenadas de referencia del observador. Se trata de un caso especial del vector de diferencia de posición que se vio en la sección 2-3, en el que el punto de referencia es el origen de las coordenadas.

En la sección 2-4 se hizo notar que quizá en ciertos problemas resulte conveniente considerar las posiciones aparentes de un solo punto, vistas por más de un observador, que utilicen sistemas de coordenadas diferentes. No obstante, cuando un problema en particular obliga a considerar varios sistemas de coordenadas, la aplicación conducirá a la identificación de un solo sistema de coordenadas como el primario o más fundamental. En la mayor parte de los casos, este es el sistema en el que se expresará el resultado final y casi siempre se considera que es estacionario; por lo anterior se le conoce como sistema *absoluto* de coordenadas. La *posición absoluta* de un punto se define como su posición aparente vista por un observador en el sistema absoluto de coordenadas.

Decidir cuál sistema de coordenadas se designe como absoluto (más básico) es arbitrario y no tiene importancia en el estudio de la cinemática. El hecho de que el sistema absoluto de coordenadas sea verdaderamente estacionario es un tanto discutible ya que, como se hizo ver, toda la información acerca de la posición (y el movimiento) se mide en relación con algo más; nada es verdaderamente absoluto en el sentido estricto. Por ejemplo, cuando se analiza la cinemática de una suspensión de automóvil, puede resultar conveniente elegir un sistema "absoluto" de coordenadas fijado a la estructura del auto, y estudiar el movimiento de la suspensión en relación con tal sistema. Así pues, no tiene importancia si el automóvil está o no en movimiento; los movimientos de la suspensión con relación a la estructura se definirían como absolutos.

Una convención común es asignarle al sistema absoluto de coordenadas el número 1 y utilizar otros números para los demás sistemas de coordenadas en movimiento. Puesto que se adopta esta convención en el curso de esta obra, los vectores de posición absoluta son los de posición aparente vistos por un observador dentro del sistema de coordenadas 1, y sus símbolos tienen la forma $\mathbf{R}_{P/1}$. Por brevedad, y con el fin de reducir su complejidad, también se convendrá en que cuando no se indique explícitamente el número del sistema de coordenadas se sobreentenderá que es 1; por ende, $\mathbf{R}_{P/1}$ se puede abreviar $\mathbf{R}_P$. Del mismo modo, la ecuación de la posición aparente (2-9) se puede escribir† como sigue

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{O_2} + \mathbf{R}_{P/2} \tag{2-10}$$

2-6 ECUACIÓN DE CIERRE DEL CIRCUITO

Hasta ahora el estudio sobre los vectores de diferencia de posición y de posición aparente ha sido bastante abstracto, con el propósito de desarrollar un fundamento riguroso para el análisis del movimiento en sistemas mecánicos. Ciertamente, la precisión tiene su propio mérito, porque este rigor es el que permite que la

† Si se repasan las secciones 2-1 se verá que el vector de diferencia de posición $\mathbf{R}_{PQ}$ se manejó por completo dentro del sistema absoluto de coordenadas, y es una abreviatura de la notación $\mathbf{R}_{PQ/1}$. No será necesario, tratar el caso completamente general $\mathbf{R}_{PQ/2}$, el vector de la diferencia de posición aparente.

ciencia prediga un resultado correcto, a pesar de los prejuicios y los sentimientos personales del analista. Sin embargo, los desarrollos tediosos no son interesantes a menos que lleven a aplicaciones en problemas de la vida real. Aunque existen todavía muchos principios fundamentales por descubrir, podría resultar conveniente mostrar ahora la relación entre los vectores de posición relativa que se vieron con anterioridad y algunos de los eslabonamientos típicos que se encuentran en las máquinas reales.

Uno de los mecanismos más común y útil es el eslabonamiento de cuatro barras. En la figura 2-4 se ilustra un ejemplo de éste, un dispositivo de sujeción. Un estudio breve del diagrama del conjunto revela que al elevar la manija de la mordaza, la barra gira alejándose de la superficie de sujeción, abriendo la mordaza. Al oprimir la manija, la barra gira hacia abajo y la mordaza se vuelve a cerrar. No obstante, si se desea diseñar este tipo de mordaza con exactitud, la cuestión no resulta tan sencilla. Quizá sea conveniente, por ejemplo, que la mor-

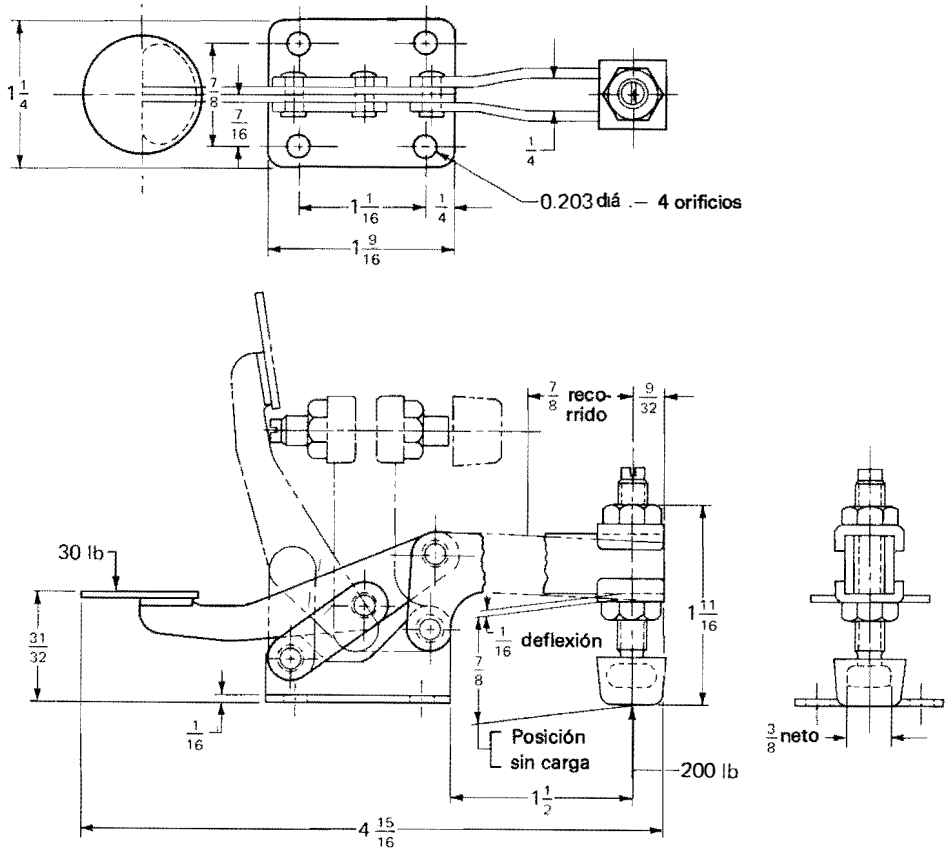


Figura 2-4 Diagrama de montaje de un mecanismo de sujeción manual.

daza se abra a una velocidad dada para determinada velocidad de elevación de la manija. Estas relaciones no son obvias; dependen de las dimensiones exactas de las diversas piezas y las relaciones o interacciones entre ellas. Para descubrir estas relaciones se necesita una descripción rigurosa de las características geométricas esenciales del dispositivo. Se pueden usar los vectores de diferencia de posición y de posición aparente para proporcionar tal descripción.

En la figura 2-5 se consignan los diagramas detallados de los eslabones individuales de la mordaza desmontada. Aunque en este caso no se indican, los dibujos detallados deben incluir todas las dimensiones, determinando así, de una vez por todas, la geometría completa de cada eslabón. La suposición de que todos los eslabones son *rígidos* asegura que se puede determinar con precisión la posición de cualquier punto en cualquiera de los eslabones, en relación con cualquier otro punto del mismo eslabón, por medio de la simple identificación de los puntos apropiados y fijando la escala correcta en los dibujos detallados.

No obstante, las características que se pierden en los dibujos detallados son las interrelaciones de las piezas individuales; esto es, las *restricciones* que aseguran que cada eslabón se moverá en relación con lo que lo rodea en la forma prescrita. Por supuesto, las cuatro articulaciones de pasador proporcionan estas restricciones. Sabiendo que tienen gran importancia en cualquier descripción de los eslabonamientos, estos centros de pasador se identificarán desde ahora con las letras A, B, C y D, y los puntos apropiados del eslabón 1 como A_1 y D_1, los del eslabón 2 como A_2 y B_2, etc. Como se ve en la figura 2-5, también se toma un sistema de coordenadas diferente unido rígidamente a cada eslabón.

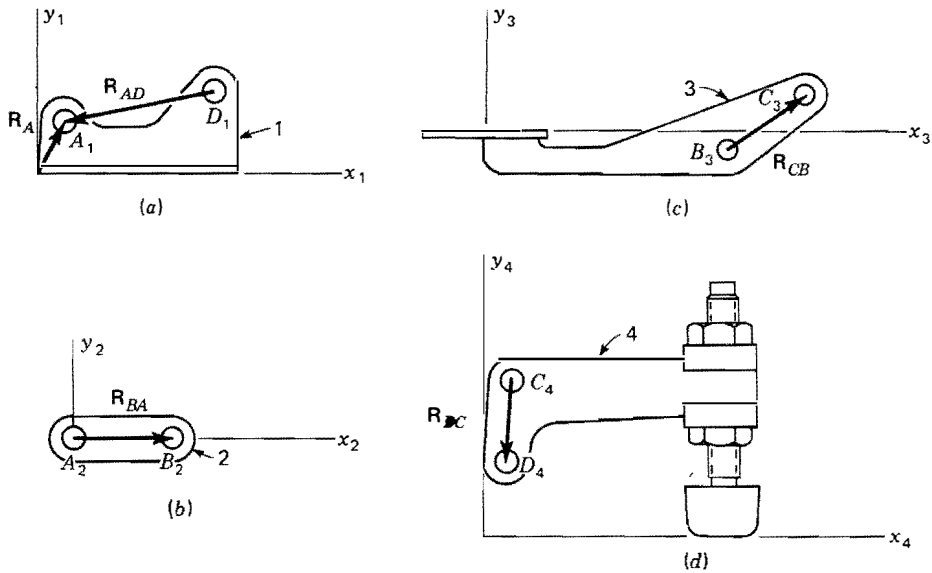


Figura 2-5 Diagrama detallado del mecanismo de sujeción de la figura 2-4: *a*) eslabón base, *b*) eslabón de conexión, *c*) manija, *d*) barra de sujeción.

En vista de que es necesario asociar las posiciones relativas de los centros de articulación sucesivos, se definen los vectores de diferencia de posición $\mathbf{R}_{AD}$ en el eslabón 1, $\mathbf{R}_{BA}$ en el eslabón 2, $\mathbf{R}_{CB}$ en el eslabón 3 y $\mathbf{R}_{DC}$ en el eslabón 4. También se hace notar aquí que cada uno de estos vectores parece ser constante a los ojos de un observador que se encuentre fijo en el sistema de coordenadas de ese eslabón en particular; las magnitudes de estos vectores se pueden obtener a partir de las dimensiones constantes de los eslabones.

También es factible escribir una ecuación vectorial para describir las restricciones impuestas por cada articulación de revoluta (de pasador). Nótese que sea cual fuere la posición o el observador seleccionados, los dos puntos que describen a cada centro de pasador, por ejemplo, A_1 y A_2, siguen siendo coincidentes. Por consiguiente,

$$\mathbf{R}_{A_2A_1} = \mathbf{R}_{B_2B_1} = \mathbf{R}_{C_4C_3} = \mathbf{R}_{D_1D_4} = 0 \tag{2-11}$$

Desarrollemos ahora las ecuaciones vectoriales para la posición absoluta de cada uno de los centros de pasador. Puesto que el eslabón 1 es el marco de referencia, las posiciones absolutas son aquellas definidas en relación con un observador en el sistema de coordenadas 1. Por supuesto, el punto A_1 se localiza en la posición descrita por $\mathbf{R}_A$. A continuación se establece una conexión matemática del eslabón 2 con el 1 mediante la expresión

$$\mathbf{R}_{A_2} = \mathbf{R}_{A_1} + \overset{0}{\mathbf{R}}_{A_2A_1} = \mathbf{R}_A \tag{a}$$

Después de efectuar la transferencia al otro extremo del eslabón 2, se fija el eslabón 3

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{BA} \tag{b}$$

Al conectar las articulaciones C y D en la misma forma se obtiene

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_{CB} = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{BA} + \mathbf{R}_{CB} \tag{c}$$

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{R}_C + \mathbf{R}_{DC} = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{BA} + \mathbf{R}_{CB} + \mathbf{R}_{DC} \tag{d}$$

Por último, se transfiere de regreso al punto A a través del eslabón 1

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_D + \mathbf{R}_{AD} = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{BA} + \mathbf{R}_{CB} + \mathbf{R}_{DC} + \mathbf{R}_{AD} \tag{e}$$

y de esto se obtiene

$$\mathbf{R}_{BA} + \mathbf{R}_{CB} + \mathbf{R}_{DC} + \mathbf{R}_{AD} = 0 \tag{2-12}$$

Esta importante expresión se conoce con el nombre de *ecuación de cierre del circuito* para la mordaza. Como se muestra en la figura 2-6, expresa el hecho de que el mecanismo forma un circuito cerrado y, por ende, el polígono constituido por los vectores de diferencia de posición que pasan por las articulaciones y los eslabones sucesivos, debe mantenerse cerrado cuando el mecanismo se mueve. Las longitudes constantes de éstos vectores aseguran que los centros de articulación permanezcan separados a distancias constantes, que es el requisito de los eslabones

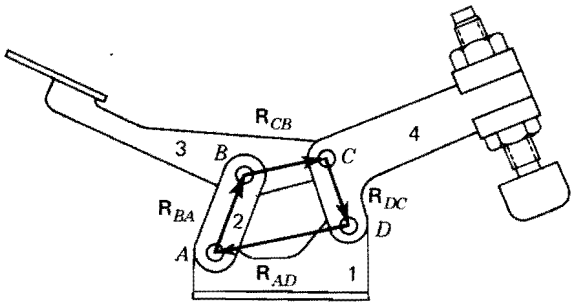


Figura 2-6 Ecuación de cierre del circuito.

rígidos. Las rotaciones relativas entre vectores sucesivos indican los movimientos dentro de las articulaciones de pasador, en tanto que la rotación de cada vector de diferencia de posición individual manifiesta el movimiento de rotación de un eslabón en particular. Por ende, la ecuación de cierre del circuito se cumple dentro de todas las restricciones importantes que determinan la forma de operación de esta mordaza en particular. Constituye una descripción matemática, o *modelo*, del eslabonamiento, y muchos de los desarrollos posteriores incluidos en el curso de esta obra se basan en este modelo como punto de partida.

Por supuesto, la forma de la ecuación de cierre del circuito depende del tipo de eslabonamiento de que se trate. Esto se ilustra con otro ejemplo, el *mecanismo de Ginebra* o *cruz de Malta* que aparece en la figura 2-7. Una de las primeras aplicaciones que se hicieron de este mecanismo fue para evitar el dar cuerda ex-

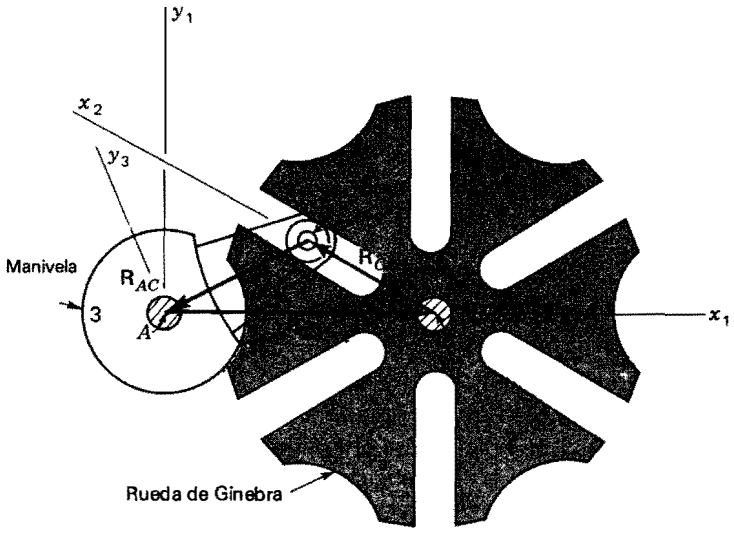


Figura 2-7 Mecanismo de Ginebra o cruz de Malta.

cesiva a un reloj. Hoy en día se emplea profusamente como dispositivo divisor, por ejemplo, en una fresadora con cambiador automático de herramienta.

Aunque el armazón del mecanismo, el eslabón 1, no se muestra en la figura, constituye una de las piezas importantes del mismo porque mantiene a los dos ejes con los centros A y B a una separación constante. Por lo tanto, se define el vector $\mathbf{R}_{BA}$ para indicar esta dimensión. La manivela izquierda, eslabón 3, va unida a un eje que casi siempre gira a velocidad constante y lleva un rodillo en C, que corre dentro de la ranura de la rueda de Ginebra. El vector $\mathbf{R}_{AC}$ tiene una magnitud constante igual a la longitud de la manivela, que es la distancia del centro del rodillo C hasta el centro del eje A. La rotación de este vector en relación con el eslabón 1 se utilizará más adelante para describir la velocidad angular de la manivela. El eje x_2 se alinea a lo largo de una ranura de la rueda; de donde, el rodillo está obligado a moverse dentro de dicha ranura, y el vector $\mathbf{R}_{C/2}$ gira igual que la rueda, el eslabón 2. Del mismo modo, su longitud variable $\Delta\mathbf{R}_{C/2}$ muestra el movimiento de deslizamiento relativo que se lleva a cabo entre el rodillo del eslabón 3 y la ranura del eslabón 2.

Basándose en la misma figura, se ve que la ecuación de cierre del circuito para este mecanismo es

$$\mathbf{R}_{BA} + \mathbf{R}_{C/2} + \mathbf{R}_{AC} = 0 \tag{2-13}$$

Nótese que el término $\mathbf{R}_{C/2}$ es equivalente al $\mathbf{R}_{CB}$, puesto que el punto B es el origen del sistema de coordenadas 2.

Esta forma de la ecuación de cierre del circuito es un modelo matemático válido en tanto el rodillo C se mantenga dentro de la ranura, a lo largo de x_2. Sin embargo, esta condición no se cumple en el curso completo del ciclo del movimiento. Una vez que el rodillo sale de la ranura, el movimiento se controla por medio de dos arcos circulares pareados en los eslabones 2 y 3. Así pues, para esta porción del ciclo se requiere una nueva forma de la ecuación de cierre del circuito.

Por supuesto, los mecanismos se pueden conectar de tal modo que se forme una cadena cinemática de varios circuitos; en cuyo caso se requerirá más de una ecuación de cierre del circuito para representar al sistema en su totalidad. No obstante, los procedimientos para obtener las ecuaciones son idénticos a los que se ilustraron en los ejemplos anteriores.

2-7 ANÁLISIS GRÁFICO DE LA POSICIÓN DE MECANISMOS PLANOS

Cuando las trayectorias de los puntos móviles de un mecanismo se encuentran en un solo plano o en planos paralelos, se le asigna el nombre de *mecanismo plano*. Puesto que una porción substancial de las investigaciones incluidas en esta obra se relacionan con mecanismos planos, queda plenamente justificado el desarrollo de métodos especiales adecuados para este género de problemas. Como se verá en la sección siguiente, la naturaleza de la ecuación de cierre del circuito lleva a menu-

do a la resolución de ecuaciones simultáneas no lineales, cuando se sigue un planteamiento analítico que con frecuencia resulta abrumador. Con todo, particularmente en el caso de mecanismos planos, si se sigue un método gráfico, la solución es casi siempre directa.

En primer lugar se hará una revisión sucinta del proceso de la adición vectorial. Dos vectores **A** y **B** cualesquiera conocidos se pueden sumar gráficamente como se ilustra en la figura 2-8*a*. Según la escala seleccionada, los vectores se trazan haciendo coincidir la punta de uno con el origen del otro, en cualquier orden y su suma **C** se identifica como

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{2-14}$$

Nótese que se usan tanto las magnitudes como las direcciones y sentidos de los dos vectores **A** y **B** para efectuar la adición, y que tanto la magnitud como la dirección (y sentido) de la suma **C** se encuentran como parte del resultado.

La operación de la sustracción vectorial gráficamente se ilustra en la figura 2-8*b*, en donde los vectores se trazan con sus puntas coincidentes, para resolver la ecuación

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} - \mathbf{B} \tag{2-15}$$

Estas operaciones vectoriales gráficas se deben estudiar con gran cuidado y comprender con toda claridad, ya que se emplean con amplitud en todo este texto.

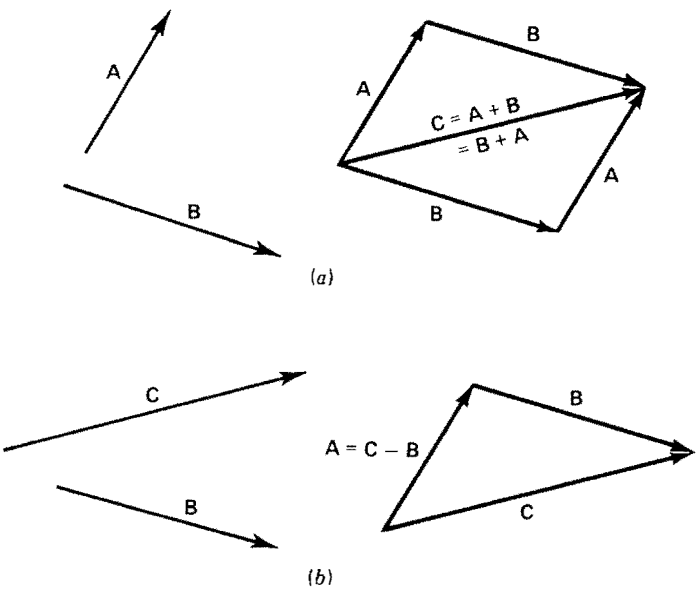


Figura 2-8 *a*) Adición de vectores. *b*) Sustracción de vectores.

Una ecuación vectorial tridimensional

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{B} \qquad (a)$$

se puede dividir en componentes a lo largo de cualesquiera ejes convenientes, lo que lleva a las tres ecuaciones escalares:

$$C^x = D^x + E^x + B^x \qquad C^y = D^y + E^y + B^y \qquad C^z = D^z + E^z + B^z \qquad (b)$$

Puesto que son componentes de la misma ecuación vectorial, estas tres expresiones escalares deben ser coherentes. Si sucede que, al mismo tiempo, las tres son linealmente independientes, se pueden resolver en forma simultánea para las tres incógnitas, que pueden ser tres magnitudes, tres direcciones† o cualquier combinación de tres magnitudes y direcciones. Sin embargo, para algunas combinaciones el problema es marcadamente no lineal y muy difícil de resolver. Por lo tanto, el estudio del problema tridimensional se demorará hasta el capítulo 11, que es cuando se necesitará.

Una ecuación vectorial bidimensional se puede resolver para dos incógnitas: dos magnitudes, dos direcciones o una magnitud y una dirección. En algunas circunstancias es conveniente indicar las cantidades conocidas ($\surd$) y las desconocidas (o) arriba de cada vector en una ecuación, como sigue:

$$\overset{o\surd}{\mathbf{C}} = \overset{\surd\surd}{\mathbf{D}} + \overset{\surd\surd}{\mathbf{E}} + \overset{\surd o}{\mathbf{B}} \qquad (c)$$

en donde el primer símbolo ($\surd$ u o) colocado arriba de cada vector indica su magnitud y el segundo su dirección. Otra forma equivalente es

$$C\hat{C} = D\hat{D} + E\hat{E} + B\hat{B} \qquad (d)$$

Cualquiera de estas ecuaciones identifica con claridad las incógnitas y señala si se puede llegar a una solución. En la ecuación (*e*), los vectores **D** y **E** están definidos por completo y se pueden sustituir con su suma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{E} \qquad (e)$$

lo que da

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad (2\text{-}16)$$

De la misma manera, cualquier ecuación vectorial en el plano, si puede resolverse, podrá reducirse a una expresión de tres términos con dos incógnitas.

Dependiendo de las formas de las dos incógnitas, es factible encontrar cuatro

†N. del R. T. En la literatura en inglés sobre la materia se aplica la palabra *dirección* implicando también la idea de *sentido* (como se aplica en las obras correspondientes en español). Dada la frecuencia con la que se manejará tal concepto en este texto, y con el fin de no complicar la redacción del mismo, se usará el término *dirección* con la connotación mencionada.

casos distintos. Chace†,‡ los clasifica de acuerdo con las incógnitas; es decir, los casos y sus incógnitas correspondientes son:

Caso 1 Magnitud y dirección del mismo vector, por ejemplo, C, $\hat{\mathbf{C}}$.
Caso 2*a* Magnitudes de dos vectores diferentes, por ejemplo, A, B.
Caso 2*b* Magnitud de un vector y dirección de otro, por ejemplo, A, $\hat{\mathbf{B}}$.
Caso 2*c* Direcciones de dos vectores diferentes, por ejemplo, $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$.

Se ilustrarán gráficamente las soluciones de estos cuatro casos en esta sección y, en la siguiente, aplicando un método analítico.

En el caso 1 las dos incógnitas son la magnitud y la dirección del mismo vector. Este caso se puede resolver mediante la adición o la sustracción gráficas directas de los vectores restantes, que estén completamente definidos. Esta situación se ilustró en la figura 2-8.

Para el caso 2*a* se deben encontrar dos magnitudes, por ejemplo, A y B

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} \tag{2-17}$$

La solución de este caso se muestra en la figura 2-9, y los pasos comprendidos son los siguientes:

1. Se elige un sistema de coordenadas y un factor de escala, y se traza el vector **C**.
2. Se traza una recta que pase por el origen de **C**, paralela a $\hat{\mathbf{A}}$.

† Milton A. Chace, *Development and Application of Vector Mathematics for Kinematic Analysis of Three-Dimensional Mechanisms,* tesis de doctorado, Universidad de Michigan, Ann Arbor, Mich., 1954, p. 19.

‡ Véase la tabla 11-1 en donde aparecen todos los casos.

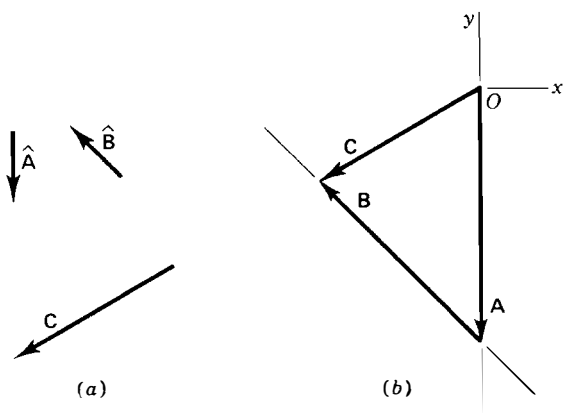


Figura 2-9 Solución gráfica del caso 2*a*. (*a*) dados: **C**, $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$; *b*) solución para A y B.

3. Se traza otra recta que pase por el extremo de **C** paralela a $\hat{\mathbf{B}}$.
4. La intersección de estas dos rectas define ambas magnitudes, A y B, que pueden ser positivas o negativas.

Se observa que el caso 2*a* tiene una solución única a menos que las rectas sean colineales; si son paralelas, pero distintas, las dos magnitudes, A y B, son infinitas.

Para el caso 2*b* se encuentra una magnitud y una dirección de vectores distintos, póngase por caso, A y $\hat{\mathbf{B}}$,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{2-18}$$

La solución, que se presenta en la figura 2-10, se obtiene en el orden que se indica a continuación:

1. Se elige un sistema de coordenadas y un factor de escala, y se traza el vector **C**.
2. Se traza una recta que pase por el origen de **C** paralela a $\hat{\mathbf{A}}$.
3. Se ajusta un compás con la magnitud de B, de acuerdo con la escala elegida, y se construye un arco circular cuyo centro se localice en el extremo de **C**.
4. Las dos intersecciones de la recta y el arco definen los dos conjuntos de solución A, $\hat{\mathbf{B}}$ y A', $\hat{\mathbf{B}}'$.

Por último, para el caso 2*c*, se encuentran las direcciones de dos vectores, $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{2-19}$$

Los pasos de esta solución se muestran en la figuras 2-11.

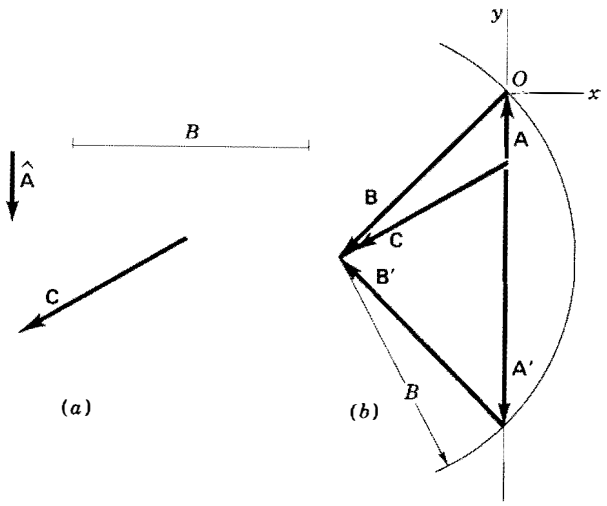


Figura 2-10 Solución gráfica del caso 2*b*: *a*) dados **C**, $\hat{\mathbf{A}}$, y B; *b*) solución para A, $\hat{\mathbf{B}}$ y A', $\hat{\mathbf{B}}'$.

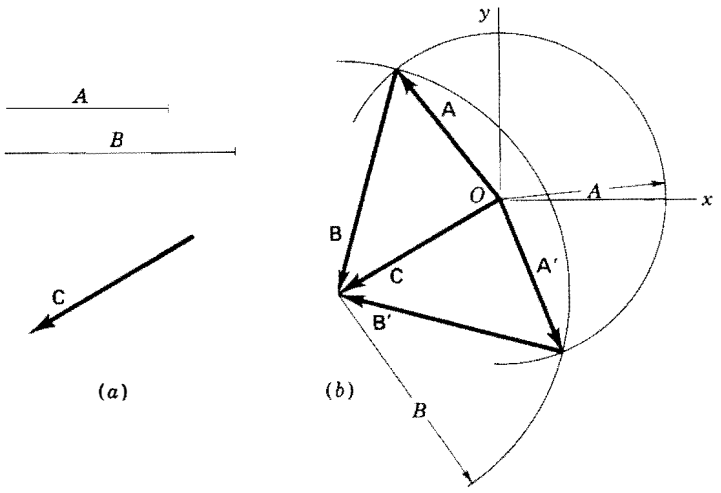


Figura 2-11 Solución gráfica del caso 2*c*: *a*) dados: C, *A* y *B*; *b*) solución para $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{A}}'$, $\hat{\mathbf{B}}'$.

1. Se elige un sistema de coordenadas y un factor de escala, y se traza el vector **C**.
2. Se traza un arco circular de radio *A* con centro situado en el origen de **C**.
3. Se traza un arco circular de radio *B* con centro localizado en el extremo de **C**.
4. Las dos intersecciones de estos arcos definen los dos conjuntos de soluciones $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{A}}'$, $\hat{\mathbf{B}}'$. Se observará que es factible encontrar una solución real sólo si $A + B \geq C$.

Ahora se aplicarán estos procedimientos para resolver la ecuación de cierre del circuito. Para ilustrar la situación, considérese el mecanismo de corredera-manivela ilustrado en la figura 2-12*a*. En estas circunstancias, el eslabón 2 es una manivela restringida a girar en torno al pivote fijo *A*; el eslabón 3 es la biela y el eslabón 4, la corredera. La ecuación de cierre del circuito, que se obtiene aplicando el método de la sección 2-6, es

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_{BA} + \mathbf{R}_{CB} \qquad (f)$$

El problema del análisis de posición es determinar los valores de todas las variables de posición (las posiciones de todos los puntos y articulaciones) dadas las dimensiones de cada eslabón, y el valor (o valores) de la variable independiente (o variables independientes), es decir, aquellas que se escogen para representar el grado (o grados) de libertad del mecanismo. En el mecanismo de corredera-manivela, cuando la corredera se desplaza a una ubicación conocida $\mathbf{R}_C$, es preciso encontrar los ángulos desconocidos θ_2 y θ_3, las direcciones de $\hat{\mathbf{R}}_{BA}$ y $\hat{\mathbf{R}}_{CB}$. Después de identificar las dimensiones conocidas de los eslabones,

$$\vec{\mathbf{R}}_C = \vec{\mathbf{R}}_{BA} + \vec{\mathbf{R}}_{CB} \qquad (g)$$

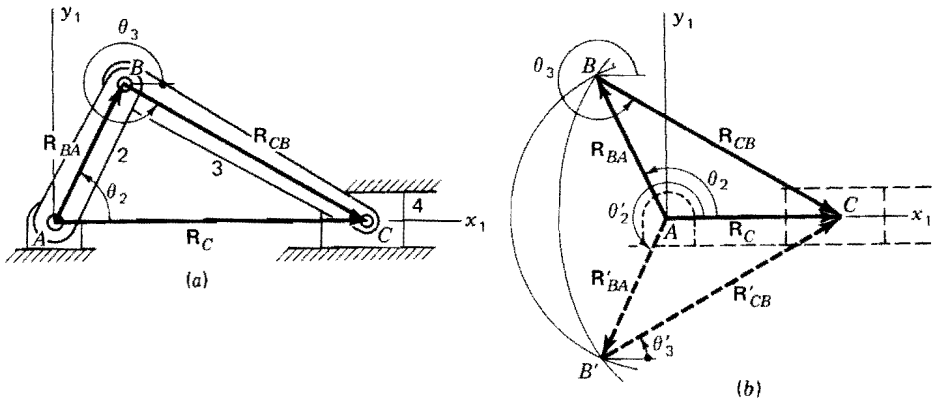


Figura 2-12 *a*) Mecanismo de corredera-manivela. *b*) Análisis gráfico de la posición.

se reconoce que se trata del caso 2*c* de la ecuación de cierre del circuito. El procedimiento gráfico de resolución que se explicó con anterioridad se aplica en la figura 2-12*b*. Nótese que se encuentran dos soluciones posibles, θ_2, θ_3 y θ'_2, θ'_3, que corresponden a dos configuraciones diferentes del eslabonamiento, es decir, dos maneras de ensamblar los eslabones, siendo ambas coherentes con la posición dada de la corredera. Estas dos soluciones son raíces igualmente válidas para la ecuación de cierre del circuito, y es necesario escoger entre ambas, según la aplicación de que se trate.

Como ejemplo adicional, véase el eslabonamiento de cuatro barras ilustrado en la figura 2-13. En este caso se desea encontrar la posición del punto del acoplador *P* correspondiente a un ángulo de la manivela en particular, θ_2. La ecuación de cierre del circuito es

$$\overset{\vee\vee}{\mathbf{R}}_{BA} + \overset{\vee_o}{\mathbf{R}}_{CB} = \overset{\vee\vee}{\mathbf{R}}_{DA} + \overset{\vee_o}{\mathbf{R}}_{CD} \qquad (h)$$

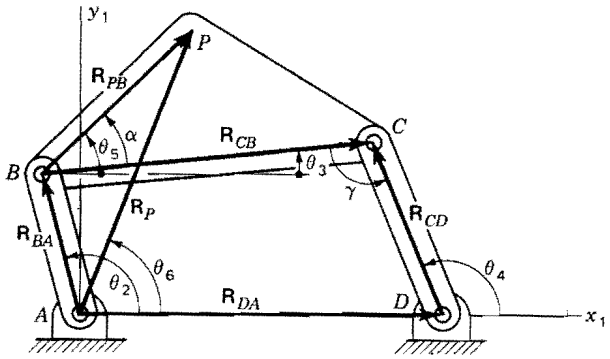


Figura 2-13 Eslabonamiento de cuatro barras.

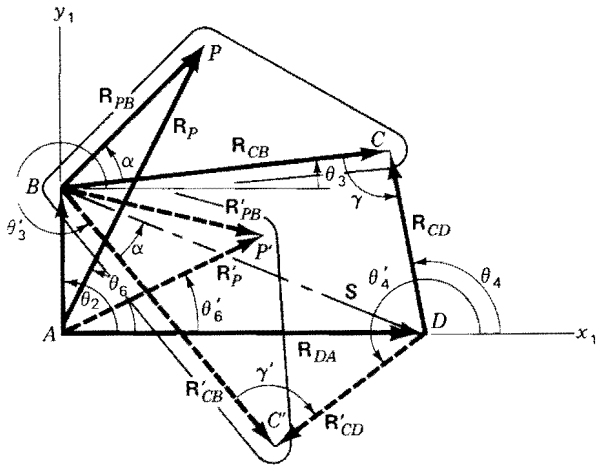


Figura 2-14 Análisis gráfico de posición del eslabonamiento de cuatro barras.

y la posición del punto P está dada por la ecuación de diferencia de posición

$$\overset{\infty}{\mathbf{R}}_P = \overset{\vee\vee}{\mathbf{R}}_{BA} + \overset{\vee\circ}{\mathbf{R}}_{PB} \tag{i}$$

Aunque parece que esta ecuación tiene tres incógnitas, se pueden reducir a dos después de resolver la ecuación de cierre del circuito (*h*), observando la relación angular constante entre $\mathbf{R}_{PB}$ y $\mathbf{R}_{CB}$,

$$\theta_5 = \theta_3 + \alpha \tag{j}$$

La resolución gráfica de este problema se inicia combinando los dos términos conocidos de la ecuación (*h*), localizando así las posiciones de los puntos B y D, como se muestra en la figura 2-14,

$$\mathbf{S} = \overset{\vee\vee}{\mathbf{R}}_{DA} - \overset{\vee\vee}{\mathbf{R}}_{BA} = \overset{\vee\circ}{\mathbf{R}}_{CB} - \overset{\vee\circ}{\mathbf{R}}_{CD} \tag{k}$$

Se aplica entonces el procedimiento de resolución para el caso 2*c*, dos direcciones desconocidas, para encontrar la ubicación del punto C; y se obtienen dos soluciones posibles, θ_3, θ_4 y θ'_3, θ'_4.

A continuación se aplica la ecuación (*j*) para determinar las dos direcciones posible de $\hat{\mathbf{R}}_{PB}$. Luego se puede resolver la ecuación (*i*), siguiendo los procedimientos para el caso 1. Por último se obtienen dos soluciones para la solución del punto $\mathbf{R}_P$ y $\mathbf{R}'_P$; y ambas son soluciones válidas para las ecuaciones (*h*) a (*j*); aunque pudo suceder que la posición $\mathbf{R}'_P$ no se lograra físicamente a partir de la configuración ilustrada en la figura 2-13, sin desmontar el mecanismo.

Partiendo de los ejemplos de la corredera-manivela y el eslabonamiento de cuatro barras, es obvio que el análisis gráfico de la posición requiere precisamente de las mismas construcciones que se elegirían por razones naturales al dibujar a escala el mecanismo en la posición que se está considerando. En virtud de esto, el procedimiento se antoja trivial y parecería que no merece en realidad el título de

análisis; sin embargo, esto suele ser en extremo engañoso. Como se verá en las siguientes secciones, el análisis de posición de un mecanismo es un problema algebraico no lineal cuando se trata por métodos analíticos o de computadora. A decir verdad, constituye el problema más difícil dentro del análisis cinemático y esta es la razón primordial por la que las técnicas gráficas de resolución han conservado su atractivo dentro del análisis de los mecanismos planos.

2-8 SOLUCIONES DE ÁLGEBRA COMPLEJA DE ECUACIONES VECTORIALES EN EL PLANO

En problemas en el plano, con frecuencia conviene expresar un vector especificando su magnitud y dirección en *notación polar*

$$\mathbf{R} = R\angle\theta \tag{2-20}$$

En la figura 2-15*a*, el vector bidimensional

$$\mathbf{R} = R^x\hat{\mathbf{i}} + R^y\hat{\mathbf{j}} \tag{2-21}$$

tiene dos componentes rectangulares de magnitudes

$$R^x = R\cos\theta \qquad R^y = R\,\text{sen}\,\theta \tag{2-22}$$

siendo

$$R = \sqrt{(R^x)^2 + (R^y)^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{R^y}{R^x} \tag{2-23}$$

Se observará que aquí se eligió arbitrariamente aceptar la raíz cuadrada positiva para la magnitud R al calcularla a partir de las componentes de **R**. Por consiguiente, se debe tener sumo cuidado al interpretar los signos de R^x y R^y por separado al decidir lo referente al cuadrante de θ. Nótese que *θ se define como el ángulo que va del eje positivo x al extremo positivo del vector* **R**, *medido en torno al origen del vector, y es positivo cuando se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*.

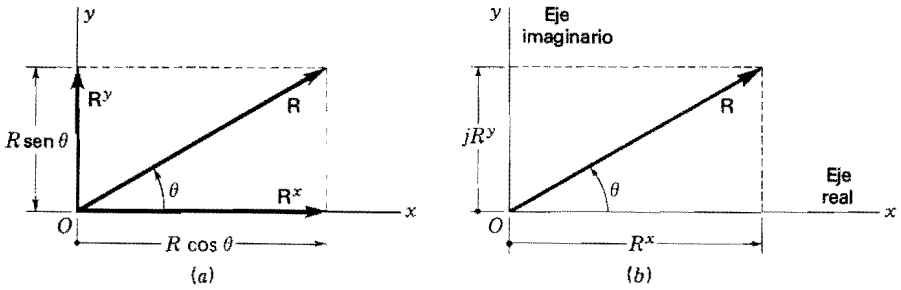


Figura 2-15 Correlación de los vectores en el plano y los números complejos.

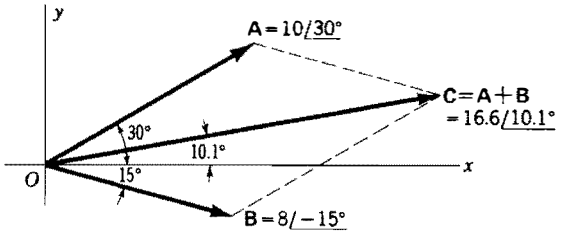


Figura 2-16 Ejemplo 2-2.

Ejemplo 2-2 Exprésense los vectores $\mathbf{A} = 10/30°$ y $\mathbf{B} = 8/-15°$ en notación rectangular† y hállese su suma.

SOLUCIÓN Los vectores se muestran en la figura 2-16 y son:

$$\mathbf{A} = 10\cos 30°\,\hat{\mathbf{i}} + 10\,\text{sen}\,30°\,\hat{\mathbf{j}} = 8.66\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{B} = 8\cos(-15°)\,\hat{\mathbf{i}} + 8\,\text{sen}(-15°)\,\hat{\mathbf{j}} = 7.73\hat{\mathbf{i}} - 2.07\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (8.66 + 7.73)\hat{\mathbf{i}} + (5.00 - 2.07)\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 16.39\hat{\mathbf{i}} + 2.93\hat{\mathbf{j}}$$

La magnitud de la resultante se calcula tomando como base la ecuación (2-23)

$$C = \sqrt{16.39^2 + 2.93^2} = 16.6$$

al igual que el ángulo

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2.93}{16.39} = 10.1°$$

El resultado final en notación para el plano es

$$\mathbf{C} = 16.6/10.1° \qquad \textit{Resp.}$$

Otra manera de abordar analíticamente los problemas vectoriales bidimensionales es a través del álgebra compleja. Aunque los números complejos no son vectores, se pueden usar para representar vectores en un plano, eligiendo un origen y los ejes real e imaginario. En los problemas cinemáticos bidimensionales, estos ejes se pueden escoger según convenga para que coincidan con los ejes x_1y_1 del sistema absoluto de coordenadas.

Como se ilustra en la figura 2-15*b*, la localización de cualquier punto en el plano se puede especificar ya sea por su vector de posición absoluta o mediante sus coordenadas real e imaginaria correspondientes

$$\mathbf{R} = R^x + jR^y \tag{2-24}$$

en donde el operador j se define como el número imaginario unitario

$$j = \sqrt{-1} \tag{2-25}$$

† Muchas calculadoras están equipadas para realizar directamente conversiones polares a rectangulares y viceversa.

La utilidad real de los números complejos en el análisis en el plano se debe a la facilidad con la que se pueden pasar a la forma polar. Si se usa la notación compleja rectangular para el vector **R**, se puede escribir

$$\mathbf{R} = R\underline{/\theta} = R\cos\theta + jR\,\text{sen}\,\theta \tag{2-26}$$

Sin embargo, si se emplea la por lo demás bien conocida ecuación de Euler de la trigonometría,

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\,\text{sen}\,\theta \tag{2-27}$$

R también se puede escribir en la forma *polar compleja* como

$$\mathbf{R} = Re^{j\theta} \tag{2-28}$$

en donde la magnitud y la dirección del vector se indican explícitamente. Como se verá en los dos capítulos siguientes, la expresión de un vector en esta forma es muy útil cuando es necesario derivar.

Se obtendrá cierta familiarización con las útiles técnicas de manejo de vectores escritos en las formas complejas polares, resolviendo una vez más los cuatro casos de la ecuación de cierre del circuito. Si la ecuación (2-16) se expresa en la forma compleja polar se obtiene

$$Ce^{j\theta_C} = Ae^{j\theta_A} + Be^{j\theta_B} \tag{2-29}$$

En el caso 1, las dos incógnitas son C y θ_C. La resolución se inicia separando las partes real e imaginaria; y luego, mediante la sustitución de la ecuación de Euler (2-27), se obtiene

$$C(\cos\theta_C + j\,\text{sen}\,\theta_C) = A(\cos\theta_A + j\,\text{sen}\,\theta_A) + B(\cos\theta_B + j\,\text{sen}\,\theta_B) \qquad (a)$$

Al igualar los términos reales e imaginarios por separado, se obtienen dos ecuaciones reales correspondientes a las componentes horizontal y vertical de la ecuación vectorial bidimensional:

$$C\cos\theta_C = A\cos\theta_A + B\cos\theta_B \qquad (b)$$

$$C\,\text{sen}\,\theta_C = A\,\text{sen}\,\theta_A + B\,\text{sen}\,\theta_B \qquad (c)$$

Si se elevan al cuadrado y suman estas dos expresiones se elimina θ_C y se encuentra una solución para C

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\theta_B - \theta_A)} \tag{2-30}$$

La raíz cuadrada positiva se escogió arbitrariamente; la raíz cuadrada negativa daría una solución negativa para C con una diferencia de 180° en θ_C. El ángulo θ_C se encuentra como sigue

$$\theta_C = \tan^{-1}\frac{A\,\text{sen}\,\theta_A + B\,\text{sen}\,\theta_B}{A\cos\theta_A + B\cos\theta_B} \tag{2-31}$$

en donde los signos del numerador y el denominador se deben considerar por separado al determinar el cuadrante apropiado† de θ_C. Sólo se encuentra una solución para el caso 1, como se ilustró con anticipación en la figura 2-8.

Para el caso 2*a* las dos incógnitas de la ecuación (2-29) son las dos magnitudes A y D. En este caso la solución gráfica es la que se dio en la figura 2-9. Una manera conveniente de resolverlo en la forma compleja polar es dividir primero la ecuación (2-29) entre $e^{j\theta_A}$

$$Ce^{j(\theta_C-\theta_A)} = A + Be^{j(\theta_B-\theta_A)} \qquad (d)$$

Si se compara esta ecuación con la figura 2-17, se ve que la división entre la forma compleja polar de un *vector unitario* $e^{j\theta_A}$ tiene el efecto de hacer girar los ejes real e imaginario en el ángulo θ_A, de tal suerte que el eje real queda a lo largo del vector **A**. Ahora es factible usar la ecuación de Euler (2-27) para separar las componentes real e imaginaria.

$$C\cos(\theta_C - \theta_A) = A + B\cos(\theta_B - \theta_A) \qquad (e)$$

$$C\,\text{sen}(\theta_C - \theta_A) = B\,\text{sen}(\theta_B - \theta_A) \qquad (f)$$

y se observa que el vector **A**, que ahora es real, se eliminó de una de las ecuaciones. La solución para B se encuentra con facilidad:

$$B = C\frac{\text{sen}(\theta_C - \theta_A)}{\text{sen}(\theta_B - \theta_A)} \qquad (2\text{-}32)$$

La solución para la otra magnitud desconocida, A, se calcula exactamente de la misma manera. Si la ecuación (2-29) se divide entre $e^{j\theta_B}$, el eje real se alinea a lo

† Las calculadoras de diferentes marcas varían entre sí en lo que respecta al manejo de las unidades y el cuadrante de los ángulos. Es necesario que cada persona se familiarice con las características de su propia calculadora.

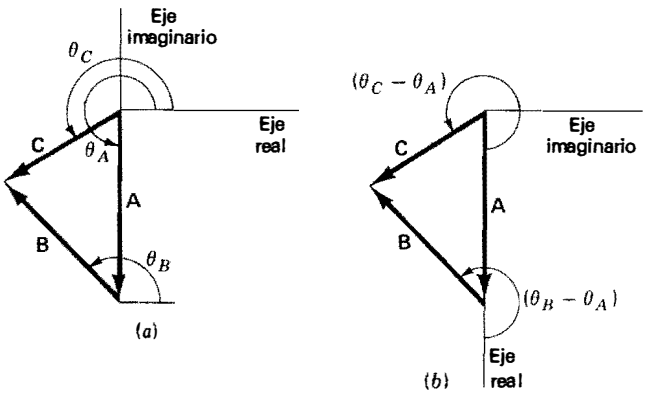


Figura 2-17 Rotación de los ejes mediante la división de la ecuación compleja polar entre $e^{j\theta_A}$. *a*) Ejes originales, *b*) ejes después de la rotación.

largo del vector **B**. Luego, la ecuación se separa en las partes real e imaginaria y se obtiene

$$A = C\frac{\operatorname{sen}(\theta_C - \theta_B)}{\operatorname{sen}(\theta_A - \theta_B)} \tag{2-33}$$

Al igual que antes, el caso 2*a* ofrece una sola solución.

La solución gráfica para el caso 2*b* es la que se ilustró en la figura 2-10. Las dos incógnitas son A y θ_B. El proceso se inicia alineando el eje real a lo largo del vector **A** y separando las partes real e imaginaria, como se hizo en el caso 2*a*. Las soluciones se obtienen de un modo directo a partir de las ecuaciones (*e*) y (*f*)

$$\theta_B = \theta_A + \operatorname{sen}^{-1}\frac{C\operatorname{sen}(\theta_C - \theta_A)}{B} \tag{2-34}$$

$$A = C\cos(\theta_C - \theta_A) - B\cos(\theta_B - \theta_A) \tag{2-35}$$

Nótese que el término del arco seno tiene un doble valor y, por ende, el caso 2*b* conduce a dos soluciones distintas, A, θ_B y A', θ'_B.

El caso 2*c* tiene como incógnitas a los dos ángulos θ_A y θ_B. La solución gráfica se presentó en la figura 2-11. En esta situación se alinea el eje real a lo largo del vector **C**,

$$C = Ae^{j(\theta_A - \theta_C)} + Be^{j(\theta_B - \theta_C)} \tag{g}$$

Si se usa la ecuación de Euler para separar las componentes y luego reacomodar los términos, se obtiene

$$A\cos(\theta_A - \theta_C) = C - B\cos(\theta_B - \theta_C) \tag{h}$$

$$A\operatorname{sen}(\theta_A - \theta_C) = -B\operatorname{sen}(\theta_B - \theta_C) \tag{i}$$

Las dos ecuaciones se elevan al cuadro y se suman, lo que da

$$A^2 = C^2 + B^2 - 2BC\cos(\theta_B - \theta_C) \tag{j}$$

Esto se reconoce como la ley de los cosenos para el triángulo vectorial. Esta expresión se puede resolver para θ_B como sigue

$$\theta_B = \theta_C \mp \cos^{-1}\frac{C^2 + B^2 - A^2}{2CB} \tag{2-36}$$

Pasando C al otro miembro de la ecuación (*h*), antes de elevar al cuadrado y sumar se obtiene otra forma de la ley de los cosenos, según la cual

$$\theta_A = \theta_C \pm \cos^{-1}\frac{C^2 + A^2 - B^2}{2CA} \tag{2-37}$$

Los signos más o menos en estas dos ecuaciones son un recordatorio de que cada uno de los arcos cosenos tienen dos valores y, en consecuencia, cada uno de θ_B y

θ_A tienen dos soluciones. Estos dos pares de ángulos se suelen combinar naturalmente como θ_A, θ_B y θ'_A, θ'_B, bajo la restricción expresada en la ecuación (*i*) antes citada. Por ende, el caso 2*c* tiene dos soluciones distintas, como se ilustra en la figura 2-11.

2-9 SOLUCIONES DE CHACE PARA ECUACIONES VECTORIALES EN EL PLANO

Como se vio en la sección previa, el álgebra aplicada para resolver incluso las ecuaciones vectoriales en el plano más simples suele hacerse en extremo abrumadora. Chace fue el primero en aprovechar la brevedad de la notación vectorial en la obtención de soluciones explícitas en forma cerrada, tanto para ecuaciones vectoriales bidimensionales como tridimensionales.† En esta sección se estudiarán sus soluciones para ecuaciones en el plano, por lo que respecta a los cuatro casos de la ecuación de cierre del circuito. Las soluciones tridimensionales se expondrán en el capítulo 11, que se ocupa de los mecanismos espaciales.

Aquí se volverá a usar la ecuación (2-16), que es la expresión vectorial típica en el plano, que dada en términos de magnitudes y vectores unitarios se puede escribir como sigue

$$C\hat{\mathbf{C}} = A\hat{\mathbf{A}} + B\hat{\mathbf{B}} \tag{2-38}$$

y puede contener dos incógnitas consistentes en dos magnitudes, dos direcciones o una magnitud y una dirección.

El caso 1 es la situación en el que la magnitud y la dirección del mismo vector, por ejemplo, C y $\hat{\mathbf{C}}$, constituyen las dos incógnitas. El método de solución para este caso se ilustró en el ejemplo 2-2. La forma general de la solución es

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{i}} + (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{j}} + \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{j}} \tag{2-39}$$

En el caso 2*a*, las incógnitas son las magnitudes de dos vectores diferentes, por ejemplo, A y B. El método de Chace para este caso consiste en eliminar una de las incógnitas tomando el producto escalar de cada vector con uno nuevo escogido de tal manera que se elimine una de las incógnitas. Se puede eliminar el vector $\mathbf{B}$ tomando el producto escalar de cada término de la ecuación con $\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{k}}$.

$$\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{k}}) = A\hat{\mathbf{A}} \cdot (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{k}}) + B\hat{\mathbf{B}} \cdot (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{k}}) \qquad (a)$$

Por lo tanto, puesto que $\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{k}}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{B}} \cdot (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{k}}) = 0$; de donde,

$$A = \frac{\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{k}})}{\hat{\mathbf{A}} \cdot (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{k}})} \tag{2-40}$$

† M. A. Chace, "Vector Analysis of Linkages", *J. Eng. Ind.*, serie B, vol. 55, no. 3, pp. 289-297, agosto 1963.

La magnitud desconocida B se obtiene del mismo modo

$$B = \frac{\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})}{\hat{\mathbf{B}} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})} \tag{2-41}$$

Para el caso 2*b*, las incógnitas son la magnitud de un vector y la dirección de otro, por ejemplo A y $\hat{\mathbf{B}}$. La resolución del caso se inicia eliminando a A de la ecuación (2-38)

$$\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}) = B\hat{\mathbf{B}} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}) \tag{b}$$

Ahora, basándose en la definición del producto escalar de dos vectores,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \phi$$

se observa que

$$B\hat{\mathbf{B}} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}) = B \cos \phi \tag{c}$$

en donde ϕ es el ángulo comprendido entre los vectores $\hat{\mathbf{B}}$ y $(\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})$. En consecuencia,

$$\cos \phi = \hat{\mathbf{B}} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}) \tag{d}$$

Los vectores $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}$ son perpendiculares entre sí y, por ende, se está en libertad de elegir otro sistema de coordenadas $\hat{\lambda}\hat{\mu}$ que tenga las direcciones $\hat{\lambda} = \hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}$ y $\hat{\mu} = \hat{\mathbf{A}}$. En este sistema de referencia, el vector unitario desconocido $\hat{\mathbf{B}}$ se puede escribir como

$$\hat{\mathbf{B}} = \cos \phi \, (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \operatorname{sen} \phi \, \hat{\mathbf{A}} \tag{e}$$

Si se hace ahora la sustitución de la ecuación (*d*) en la (*b*) y se resuelve para cos ϕ, se obtiene

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})}{B} \tag{f}$$

Luego,

$$\operatorname{sen} \phi = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \pm \frac{1}{B} \sqrt{B^2 - [\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2} \tag{g}$$

Sustituyendo las ecuaciones (*f*) y (*g*) en (*e*) y multiplicando ambos miembros por la magnitud conocida B se obtiene

$$\mathbf{B} = [\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})](\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}) \pm \sqrt{B^2 - [\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2} \, \hat{\mathbf{A}} \tag{2-42}$$

Para determinar el vector $\mathbf{A}$ es posible que se desee aplicar en forma directa la ecuación (2-38) y hacer la sustracción vectorial. De otra manera, si se sustituye la (2-42) y se reordena, da

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} - [\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})](\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}) \pm \sqrt{B^2 - [\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2} \, \hat{\mathbf{A}} \tag{h}$$

Los dos primeros términos de esta ecuación se pueden simplificar como se indica en la figura 2-18*a*. La dirección $\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}$ se localiza a 90° en el mismo sentido del

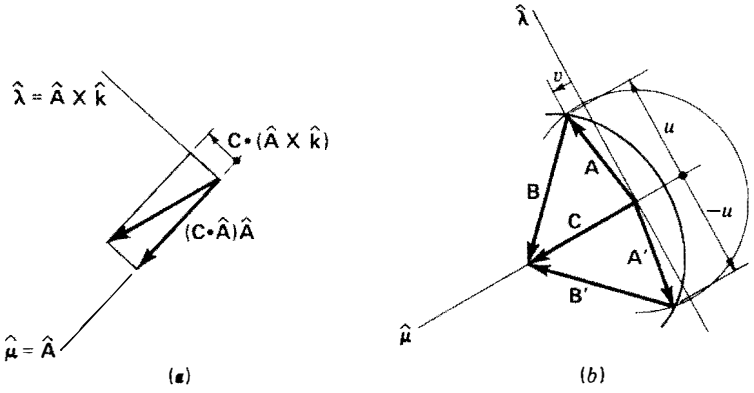


Figura 2-18

movimiento de las manecillas del reloj, a partir de la dirección $\hat{\mathbf{A}}$. La magnitud $\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})$ es la proyección de $\mathbf{C}$ en la dirección $\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}}$; de donde, cuando se resta de $\mathbf{C}$, $[\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})](\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})$ el resultado es un vector de magnitud $\mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{A}}$ en la dirección $\hat{\mathbf{A}}$. Con esta sustitución, la ecuación (*h*) se convierte en

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{A}} \mp \sqrt{B^2 - [\mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2}\right] \hat{\mathbf{A}} \tag{2-43}$$

Finalmente, en el caso 2*c* las incógnitas son las direcciones de dos vectores diferentes, por ejemplo $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$. Este caso se ilustra en la figura 2-18*b*, en donde se dan el vector $\mathbf{C}$ y las dos magnitudes A y B. El problema se resuelve encontrando los puntos de intersección de dos círculos de radios A y B. El proceso se inicia definiendo un nuevo sistema de coordenadas $\hat{\boldsymbol{\lambda}}\hat{\boldsymbol{\mu}}$ cuyos ejes se dirigen de tal modo que $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \hat{\mathbf{C}} \times \hat{\mathbf{k}}$ y $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\mathbf{C}}$, como se muestra en la figura. Si las coordenadas de uno de los puntos de intersección en el sistema $\hat{\boldsymbol{\lambda}}\hat{\boldsymbol{\mu}}$ se designan como u y v, entonces,

$$\mathbf{A} = u\hat{\boldsymbol{\lambda}} + v\hat{\boldsymbol{\mu}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = -u\hat{\boldsymbol{\lambda}} + (C - v)\hat{\boldsymbol{\mu}} \tag{*i*}$$

La ecuación del círculo de radio A es

$$u^2 + v^2 = A^2 \tag{*j*}$$

El círculo de radio B tiene la ecuación

$$u^2 + (v - C)^2 = B^2$$

o bien,

$$u^2 + v^2 - 2Cv + C^2 = B^2 \tag{*k*}$$

Al restar la ecuación (*k*) de la (*j*) y resolviendo para v se obtiene

$$v = \frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C} \tag{*l*}$$

Al sustituir esto en la (*j*) y después de resolver para u da

$$u = \pm\sqrt{A^2 - \left(\frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C}\right)^2} \qquad (m)$$

El paso final consiste en sustituir estos valores de u y v en las ecuaciones (*i*) y reemplazar $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ y $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ según sus definiciones. Los resultados son

$$\mathbf{A} = \pm\sqrt{A^2 - \left(\frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C}\right)^2}\,(\hat{\mathbf{C}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C}\hat{\mathbf{C}} \qquad (2\text{-}44)$$

$$\mathbf{B} = \mp\sqrt{A^2 - \left(\frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C}\right)^2}\,(\hat{\mathbf{C}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \frac{B^2 - A^2 + C^2}{2C}\hat{\mathbf{C}} \qquad (2\text{-}45)$$

2-10 ANÁLISIS ALGEBRAICO DE LA POSICIÓN DE ESLABONAMIENTOS PLANOS

Esta sección ilustra varios métodos algebraicos para abordar el análisis de posición de mecanismos planos. Las tres principales ventajas de estos, en comparación con el planteamiento gráfico de la sección 2-7, son 1) la mayor exactitud que se puede lograr, 2) el hecho de que son apropiados para hacer las evaluaciones en computadora o calculadora y 3) el hecho de que una vez que se encuentra la forma de la solución, se puede evaluar para cualquier conjunto de dimensiones o posiciones diferentes de los eslabones, sin necesidad de reiniciar el proceso. Como se verá, la principal desventaja es que la naturaleza de las ecuaciones suele conducir a manipulaciones algebraicas tediosas para encontrar la forma de la solución.

Regresemos al análisis del mecanismo de corredera-manivela ilustrado en la figura 2-12, que se resolvió gráficamente en la sección 2-7. Una de las maneras más comunes de plantear este problema desde el punto de vista algebraico es observar en la figura que la posición vertical del punto B se puede relacionar con la longitud y el ángulo del eslabón 2, o bien, del 3. Por consiguiente

$$R_{BA} \operatorname{sen} \theta_2 = -R_{CB} \operatorname{sen} \theta_3 \qquad (a)$$

de modo que

$$\operatorname{sen} \theta_3 = -\frac{R_{BA}}{R_{CB}} \operatorname{sen} \theta_2 \qquad (b)$$

Asimismo, por la geometría de la figura 2-12*a*, es evidente que

$$R_C = R_{BA} \cos \theta_2 + R_{CB} \cos \theta_3 \qquad (c)$$

que se puede reordenar para que quede

$$R_C - R_{BA} \cos \theta_2 = R_{CB} \cos \theta_3 \qquad (d)$$

Luego, elevando al cuadrado las ecuaciones (*a*) y (*d*), se elimina la incógnita θ_3

$$R_C^2 - 2R_C R_{BA} \cos \theta_2 + R_{BA}^2 = R_{CB}^2 \qquad (e)$$

Esta ecuación se puede resolver para el ángulo desconocido θ_2 como una función de la posición de la corredera R_C,

$$\theta_2 = \cos^{-1} \frac{R_C^2 + R_{BA}^2 - R_{CB}^2}{2R_C R_{BA}} \qquad (2\text{-}46)$$

Sustituyendo este resultado en la (*d*) se obtiene una ecuación que puede resolverse para el otro ángulo desconocido θ_3,

$$\theta_3 = \cos^{-1} \frac{R_C^2 + R_{CB}^2 - R_{BA}^2}{2R_C R_{CB}} \qquad (2\text{-}47)$$

Aunque trascendentes, se trata de soluciones de forma cerrada que se pueden evaluar rápidamente para cualquier conjunto de parámetros dimensionales en cualquier posición R_C de la corredera.

En las aplicaciones más usuales del mecanismo de corredera-manivela, se da el ángulo de esta última, θ_2, y lo que es preciso hallar es el ángulo de la biela, θ_3, y la posición de la corredera R_C. Este problema se puede resolver recordando que dado

$$\cos \theta_3 = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_3}$$

según la ecuación (*b*), se tiene que

$$\cos \theta_3 = \frac{1}{R_{CB}} \sqrt{R_{CB}^2 - R_{BA}^2 \text{sen}^2 \theta_2} \qquad (2\text{-}48)$$

en donde se eligió la raíz cuadrada positiva de tal modo que corresponda a la figura 2-12*a*; la raíz cuadrada negativa designa un montaje diferente de los eslabones en el que el pistón está a la izquierda del punto *A*. Por lo expresado en las ecuaciones (*c*) y (2-48), la posición del punto *C* es

$$R_C = R_{BA} \cos \theta_2 + \sqrt{R_{CB}^2 - R_{BA}^2 \text{sen}^2 \theta_2} \qquad (2\text{-}49)$$

Al inciar el análisis algebraico, es posible que el estudiante se pregunte cómo se reconocerán las ecuaciones "apropiadas" a partir de la figura, cómo se sabrá en dónde buscar o cuándo se tienen las suficientes ecuaciones. Una de las ventajas del método del álgebra compleja de la sección 2-8 es que es una guía en el desarrollo de estas ecuaciones iniciales. Haciendo referencia una vez más a la figura 2-12*a*, se puede escribir la ecuación de cierre del circuito en la forma polar compleja

$$R_C = R_{BA} e^{j\theta_2} + R_{CB} e^{j\theta_3} \qquad (f)$$

en donde x_1 se toma como el eje real. Al aplicar la fórmula de Euler (2-27), se pueden separar los términos real e imaginario de la ecuación anterior. Las dos ecuaciones que resultan son precisamente las que se obtienen de la figura como las ecuaciones (*c*) y (*a*).

Ya sea que estas ecuaciones se obtengan directamente de la figura o por el uso de la ecuación compleja polar de cierre del circuito, el proceso de resolución se puede desarrollar como se describió antes, recurriendo a las operaciones necesarias para resolver simultáneamente estas ecuaciones. Sin embargo, con el método del álgebra compleja, con frecuencia se puede reconocer la ecuación de cierre del circuito original como uno de los cuatro casos estándar y, por ende, se escribe inmediatamente la solución basándose en las deducidas en la sección 2-8. Por ejemplo, las ecuaciones (2-46) y (2-47) resultan directamente por la forma de la ecuación (*f*) como caso 2*c*, y al sustituir los símbolos apropiados en la solución estándar, ecuaciones (2-36) y (2-37). Del mismo modo, las ecuaciones (2-48) y (2-49) son ejemplos del caso 2*b* y pudo hallarse directamente de las ecuaciones (2-34) y (2-35).

Para resolver el mismo problema aplicando el método de Chace, se principia escribiendo la ecuación de cierre del circuito basándose en la figura 2-12*a*

$$R_C\hat{\mathbf{R}}_C = R_{BA}\hat{\mathbf{R}}_{BA} + R_{CB}\hat{\mathbf{R}}_{CB} \qquad (g)$$

Si se da θ_2, las incógnitas de esta ecuación son la magnitud R_C y la dirección $\hat{\mathbf{R}}_{CB}$. La solución corresponde al caso 2*b* y se encuentra haciendo las sustituciones apropiadas en las ecuaciones (2-42) y (2-43),

$$\mathbf{R}_{CB} = -[\mathbf{R}_{BA}\cdot(\hat{\mathbf{R}}_C\times\hat{\mathbf{k}})](\hat{\mathbf{R}}_C\times\hat{\mathbf{k}}) + \sqrt{R_{CB}^2 - [\mathbf{R}_{BA}\cdot(\hat{\mathbf{R}}_C\times\hat{\mathbf{k}})]^2}\,\hat{\mathbf{R}}_C \qquad (2\text{-}50)$$

$$\mathbf{R}_C = [\mathbf{R}_{BA}\cdot\hat{\mathbf{R}}_C + \sqrt{R_{CB}^2 - [\mathbf{R}_{BA}\cdot(\hat{\mathbf{R}}_C\times\hat{\mathbf{k}})]^2}]\hat{\mathbf{R}}_C \qquad (2\text{-}51)$$

Ejemplo 2-3 Úsense las ecuaciones de Chace para encontrar la posición de la corredera ilustrada en la figura 2-12, siendo $R_{BA} = 25$ mm, $R_{CB} = 75$ mm, y $\theta_2 = 150°$.

SOLUCIÓN Poniendo los datos en forma vectorial se tiene

$$\mathbf{R}_{BA} = 25(\cos 150)\hat{\mathbf{i}} + 25(\text{sen } 150)\hat{\mathbf{j}} = -21.7\hat{\mathbf{i}} + 12.5\hat{\mathbf{j}}$$
$$R_{CB} = 75 \qquad \hat{\mathbf{R}}_C = \hat{\mathbf{i}}$$

Nótese que $\hat{\mathbf{R}}_C \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$. Así pues, después de las sustituciones en la (2-51) da

$$\mathbf{R}_C = \{(-21.7\hat{\mathbf{i}} + 12.5\hat{\mathbf{j}})\cdot\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{(75)^2 - [(-21.7\hat{\mathbf{i}} + 12.5\hat{\mathbf{j}})\cdot\hat{\mathbf{j}}]^2}\}\hat{\mathbf{i}}$$
$$= 50.2\hat{\mathbf{i}} \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

El análisis del eslabonamiento de cuatro barras es un problema clásico cuya solución data desde hace poco más de un siglo. La solución gráfica se ilustró en las figuras 2-13 y 2-14. Este mismo problema se presenta aquí para ilustrar con mayor amplitud las técnicas algebraicas de solución, y la notación utilizada se define en la figura 2-19.

En esta ilustración se observa que *s* es la distancia diagonal *BD*. Se puede escribir la ley de los cosenos para el triángulo *BAD* y, una vez más, para el triángulo *BCD*. En términos de las longitudes de los eslabones y los ángulos definidos en dicha figura, se tiene

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2} \tag{h}$$

$$\gamma = \pm \cos^{-1} \frac{r_3^2 + r_4^2 - s^2}{2r_3 r_4} \tag{i}$$

en donde los signos más o menos se refieren a las dos soluciones para el ángulo de transmisión γ y γ', respectivamente. La ley de los cosenos se puede volver a escribir para los mismos dos triángulos con el fin de hallar los ángulos ϕ y ψ.,

$$\phi = \cos^{-1} \frac{r_1^2 + s^2 - r_2^2}{2r_1 s} \tag{j}$$

$$\psi = \cos^{-1} \frac{r_4^2 + s^2 - r_3^2}{2r_4 s} \tag{k}$$

en donde se observa, como lo señala la figura, que las magnitudes de ϕ y ψ son menores que 180°, y que ψ siempre es positivo en tanto que sen ϕ lleva el mismo signo que sen θ_2. Con base en esto se encuentran los ángulos desconocidos θ_3 y θ_4,

$$\theta_4 = 180° - \phi \mp \psi \tag{2-52}$$

$$\theta_3 = \theta_4 - \gamma \tag{2-53}$$

en donde los signos menos o más representan una vez más, respectivamente, las dos cerraduras θ_4 y θ_4'.

Para resolver el mismo problema aplicando el método de Chace, primero se construye el vector

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{l}$$

Luego, el triángulo BCD da la ecuación vectorial

$$\mathbf{s} = r_3\hat{\mathbf{r}}_3 - r_4\hat{\mathbf{r}}_4 \tag{m}$$

en donde se desconocen las dos direcciones $\hat{\mathbf{r}}_3$ y $\hat{\mathbf{r}}_4$. Este es el caso 2c y las soluciones están dadas por las ecuaciones (2-44) y (2-45). Después de efectuar las sustituciones correspondientes da

$$\mathbf{r}_3 = \pm\sqrt{r_3^2 - \left(\frac{r_3^2 - r_4^2 + s^2}{2s}\right)^2}(\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \frac{r_3^2 - r_4^2 + s^2}{2s}\hat{\mathbf{s}} \tag{2-54}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_4 = \pm\sqrt{r_3^2 - \left(\frac{r_3^2 - r_4^2 + s^2}{2s}\right)^2}(\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \frac{r_4^2 - r_3^2 + s^2}{2s}\hat{\mathbf{s}} \tag{2-55}$$

El conjunto superior de signos proporciona la solución para el eslabonamiento cruzado; y, por ende, el conjunto inferior se aplica al eslabonamiento abierto de la figura 2-19.

Al resolver el mismo problema con álgebra compleja, se podría adaptar la solución estándar del caso 2c, como se hizo antes. No obstante, si no se hace así, ilustrará algunas técnicas útiles de manipulación. Se principia escribiendo la

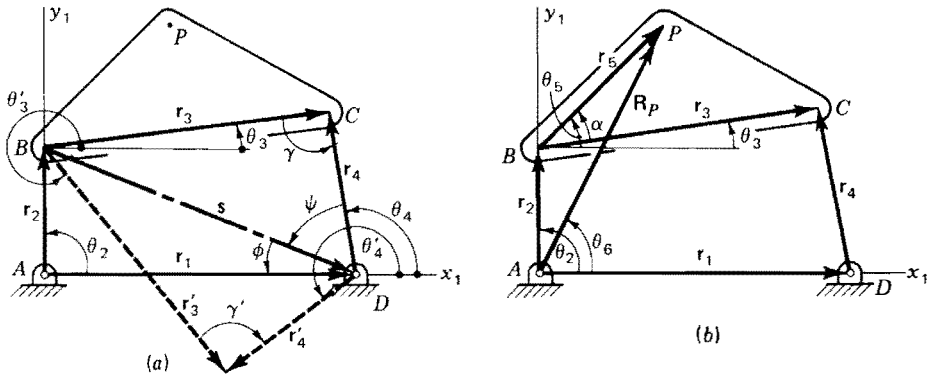


Figura 2-19

ecuación de cierre del circuito en la forma compleja polar. Con la notación de la figura 2-19 se tiene que

$$r_2 e^{j\theta_2} + r_3 e^{j\theta_3} = r_1 + r_4 e^{j\theta_4} \qquad (n)$$

en donde se elige x_1 como el eje real. Si se aplica la fórmula de Euler, se separan las partes real e imaginaria de la ecuación

$$r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 = r_1 + r_4 \cos\theta_4 \qquad (o)$$

$$r_2 \operatorname{sen}\theta_2 + r_3 \operatorname{sen}\theta_3 = r_4 \operatorname{sen}\theta_4 \qquad (p)$$

en donde los ángulos θ_3 y θ_4 son las dos incógnitas. A continuación se reacomodan estas ecuaciones para aislar los términos en θ_3

$$r_3 \cos\theta_3 = r_4 \cos\theta_4 - r_2 \cos\theta_2 + r_1$$

$$r_3 \operatorname{sen}\theta_3 = r_4 \operatorname{sen}\theta_4 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

y se elevan al cuadrado y suman ambas ecuaciones

$$r_3^2 = r_4^2 + r_2^2 + r_1^2 + 2r_1 r_4 \cos\theta_4 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2 - 2r_2 r_4 \cos(\theta_4 - \theta_2) \qquad (q)$$

eliminando así a la incógnita θ_3.

Se puede combinar un cierto número de las cantidades conocidas de esta ecuación y reducir su complejidad observando que, de acuerdo con la figura,

$$s^x = r_1 - r_2 \cos\theta_2 \qquad (r)$$

$$s^y = -r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad (s)$$

$$\gamma = \cos^{-1} \frac{r_3^2 + r_4^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\theta_2}{2r_3 r_4} \qquad (2\text{-}56)$$

en donde esta última ecuación es equivalente a las (h) e (i), antes mencionadas. Después de hacer las sustituciones y reacomodar, la (q) se reduce a

$$s^x \cos\theta_4 + s^y \operatorname{sen}\theta_4 - r_3 \cos\gamma + r_4 = 0 \qquad (t)$$

Al manejar tanto el seno como el coseno del mismo ángulo desconocido en una sola ecuación, a veces conviene sustituir las identidades de la mitad de un ángulo que se deducen en la trigonometría,

$$\cos\eta = \frac{1-\tan^2(\eta/2)}{1+\tan^2(\eta/2)} \qquad \operatorname{sen}\eta = \frac{2\tan(\eta/2)}{1+\tan^2(\eta/2)} \qquad (2\text{-}57)$$

Al hacer las sustituciones correspondientes en la (t), se eliminan las fracciones y se reacomodan los términos, se obtiene una ecuación cuadrática,

$$(r_4 - r_3\cos\gamma - s^x)\tan^2\frac{\theta_4}{2} + 2s^y\tan\frac{\theta_4}{2} + (r_4 - r_3\cos\gamma + s^x) = 0 \qquad (u)$$

de la que se llega a dos soluciones

$$\tan\frac{\theta_4}{2} = \frac{-s^y \mp \sqrt{(s^y)^2 - r_4^2 + 2r_3r_4\cos\gamma - r_3^2\cos^2\gamma + (s^x)^2}}{r_4 - r_3\cos\gamma - s^x} \qquad (v)$$

Cuando se hacen las sustituciones de lo expresado en (r), (s) y (2-56), esto se reduce a

$$\tan\frac{\theta_4}{2} = \frac{-s^y \mp r_3\sqrt{1-\cos^2\gamma}}{r_4 - r_3\cos\gamma - s^x} \qquad (w)$$

Por consiguiente,

$$\theta_4 = 2\tan^{-1}\frac{r_2\operatorname{sen}\theta_2 \mp r_3\operatorname{sen}\gamma}{r_4 - r_1 + r_2\cos\theta_2 - r_3\cos\gamma} \qquad (2\text{-}58)$$

Se puede hallar la solución para la otra incógnita, el ángulo θ_3, siguiendo un procedimiento completamente análogo. Al aislar los términos en θ_4 de las ecuaciones (o) y (p) antes de elevar al cuadrado y sumar, se elimina θ_4 y queda una ecuación cuadrática que puede resolverse para θ_3. La solución es

$$\theta_3 = 2\tan^{-1}\frac{-r_2\operatorname{sen}\theta_2 \pm r_4\operatorname{sen}\gamma}{r_3 + r_1 - r_2\cos\theta_2 - r_4\cos\gamma} \qquad (2\text{-}59)$$

Una vez resuelto el eslabonamiento de cuatro barras básico, se busca una expresión para la posición del punto P del acoplador. De la figura 2-19 y utilizando la notación compleja polar, se escribe

$$\mathbf{R}_P = R_P e^{j\theta_6} = r_2 e^{j\theta_2} - r_5 e^{j(\theta_3+\alpha)} \qquad (2\text{-}60)$$

Esto se reconoce como caso 1 porque R_P y θ_6 son las dos incógnitas. Se pueden encontrar directamente las soluciones aplicando las ecuaciones (2-30) y (2-31),

$$R_P = \sqrt{r_2^2 + r_5^2 + 2r_2r_5\cos(\theta_3 + \alpha - \theta_2)} \qquad (2\text{-}61)$$

$$\theta_6 = \tan^{-1}\frac{r_2\operatorname{sen}\theta_2 + r_5\operatorname{sen}(\theta_3 + \alpha - \theta_2)}{r_2\cos\theta_2 + r_5\cos(\theta_3 + \alpha - \theta_2)} \qquad (2\text{-}62)$$

Se observa que estas dos ecuaciones dan valores dobles que provienen de los valores dobles para θ_3, y corresponden a las dos cerraduras del eslabonamiento.

EJEMPLO 2-4 Calcúlese y trácese la gráfica de la curva del acoplador de un eslabonamiento de cuatro barras con las siguientes proporciones: $r_1 = 200$ mm, $r_2 = 100$ mm, $r_3 = 250$ mm, $r_4 = 300$ mm, $r_5 = 150$ mm, y $\alpha = -45°$. La notación es la que se define en la figura 2-19.

SOLUCIÓN Para cada ángulo θ_2, de la manivela, el ángulo de transmisión γ se evalúa partiendo de la ecuación (2-56). A continuación, se aplica la (2-59) para obtener θ_3. Por último, la posición del punto del acoplador se calcula aplicando las ecuaciones (2-61) y (2-62). Las soluciones para los primeros ángulos de la manivela se dan en la tabla 2-1. La curva completa del acoplador aparece en la figura 2-20. Nótese que sólo se calcula y representa gráficamente una de las dos soluciones.

Tabla 2-1 Cálculo de la curva del acoplador para el ejemplo 2-4

θ_2, grados	γ, grados	θ_3, grados	R_P, mm	θ_6, grados	R_P^x, mm	R_P^y, mm
0.0	18.2	110.5	212	42.6	162	136
10.0	18.9	99.4	232	36.9	186	139
20.0	21.0	87.8	245	33.7	204	136
30.0	23.9	77.5	250	31.5	213	131
40.0	27.4	69.2	248	30.5	213	126
50.0	31.3	62.9	241	30.7	207	123
60.0	35.2	58.4	230	31.8	196	121
70.0	39.2	55.2	218	33.5	182	120
80.0	43.1	53.8	205	36.3	166	121
90.0	46.9	51.8	199	38.4	149	118

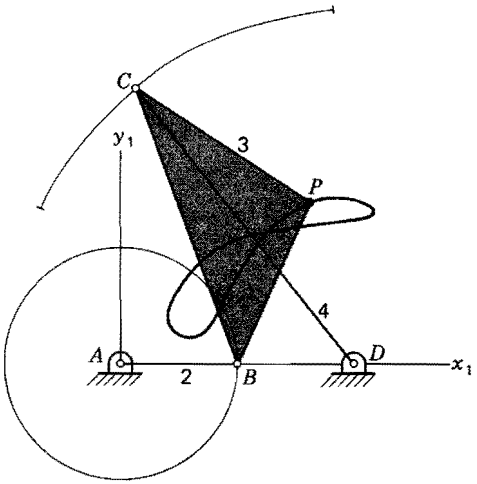


Figura 2-20 Gráfica de la curva del acoplador del ejemplo 2-4.

Antes de abandonar el tema del eslabonamiento de cuatro barras, consideremos una vez más la ecuación (2-56) que define al ángulo de transmisión. Al variar el ángulo de la manivela, θ_2, se pueden hallar los extremos del ángulo de transmisión γ derivando la ecuación (2-56) con respecto a θ_2 e igualando el resultado a cero. Esto demuestra que los extremos ocurren en $\theta_2 = 0$ y $\theta_2 = 180°$, y están dados por

$$\frac{r_3^2 + r_4^2 - (r_1 + r_2)^2}{2r_3r_4} \leq \cos\gamma \leq \frac{r_3^2 + r_4^2 - (r_1 - r_2)^2}{2r_3r_4} \tag{2-63}$$

Por supuesto, lo anterior presupone que la manivela de entrada es capaz de describir una rotación completa. Si no se trata de una cadena de Grashof (Sec. 1-8) o del tipo de manivela-oscilador o doble manivela, la manivela estará limitada a un intervalo de valores de θ_2. Fuera de este intervalo, los cálculos presentarán ciertas dificultades; la magnitud del argumento del arco coseno de la ecuación (2-56) será mayor que la unidad y no se encontrará una solución real para γ. Los límites de este intervalo están dados por

$$\frac{r_1^2 + r_2^2 - (r_3 + r_4)^2}{2r_1r_2} \leq \cos\theta_2 \leq \frac{r_1^2 + r_2^2 - (r_3 - r_4)^2}{2r_1r_2} \tag{2-64}$$

2-11 DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO EN MOVIMIENTO

Hasta ahora, este estudio se ha ocupado exclusivamente de una sola posición instantánea de un punto; pero como se desea estudiar el movimiento, es preciso interesarse en la relación entre una sucesión de posiciones.

En la figura 2-21, una partícula, situada originalmente en el punto P, se está moviendo a lo largo de la trayectoria indicada y, en un instante posterior, llega a la posición P'. El *desplazamiento* $\mathbf{\Delta R}_P$ del punto durante el intervalo de tiempo se define como el *cambio neto de posición*,

$$\mathbf{\Delta R}_P = \mathbf{R}'_P - \mathbf{R}_P \tag{2-65}$$

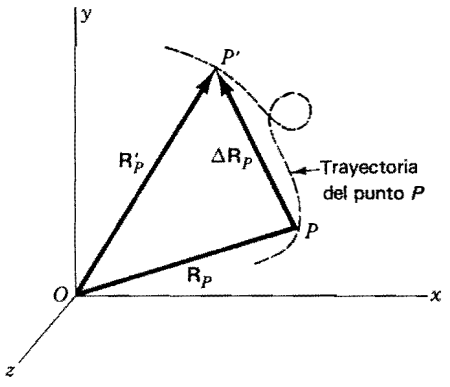


Figura 2-21 Desplazamiento de un punto en movimiento.

El desplazamiento es una cantidad vectorial que tiene la magnitud y la dirección del vector que va del punto P al P'.

Es importante hacer notar que el desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_P$ es el cambio *neto* de posición y no depende de la trayectoria particular seguida entre los puntos P y P'. Su magnitud *no* es necesariamente igual a la longitud de la trayectoria (la distancia recorrida) y la dirección *no* es necesariamente a lo largo de la tangente a la trayectoria, aunque ambas cosas son verdaderas cuando el desplazamiento es infinitesimalmente pequeño. Ni siquiera es necesario conocer la verdadera trayectoria seguida entre P y P', para poder encontrar el vector desplazamiento, siempre y cuando se conozcan las posiciones inicial y final.

2-12 DIFERENCIA DE DESPLAZAMIENTOS ENTRE DOS PUNTOS

En esta sección se estudia la diferencia en los desplazamientos de dos puntos en movimiento. Se verá en particular el caso en el que los dos puntos móviles son partículas del mismo cuerpo rígido. Esta situación se ilustra en la figura 2-22, en donde el cuerpo rígido 2 se mueve desde una posición inicial definida por $x_2y_2z_2$ a otra posterior definida por $x_2'y_2'z_2'$.

Según la (2-6), la diferencia de posición entre los dos puntos P y Q del cuerpo 2 en el instante inicial es

$$\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q \qquad (a)$$

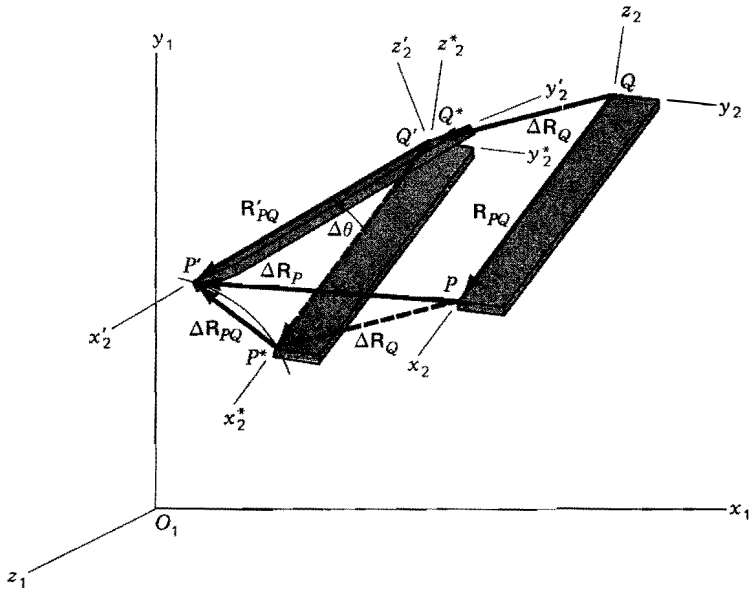


Figura 2-22 Diferencia de desplazamiento entre dos puntos del mismo cuerpo rígido.

Después de efectuarse el desplazamiento del cuerpo 2, los dos puntos se localizan en P' y Q'. En ese instante, la diferencia de posición es

$$\mathbf{R}'_{PQ} = \mathbf{R}'_P - \mathbf{R}'_Q \qquad (b)$$

Durante el intervalo de tiempo en el que se desarrolla el movimiento, los dos puntos sufrieron los desplazamientos individuales $\Delta\mathbf{R}_P$ y $\Delta\mathbf{R}_Q$, respectivamente.

Como su nombre lo implica, la *diferencia de desplazamiento* entre los dos puntos se define como la diferencia neta entre sus desplazamientos respectivos y se le asigna el símbolo $\Delta\mathbf{R}_{PQ}$

$$\Delta\mathbf{R}_{PQ} = \Delta\mathbf{R}_P - \Delta\mathbf{R}_Q \qquad (2\text{-}66)$$

Nótese que esta ecuación corresponde al triángulo vectorial PP^*P' de la figura 2-22. Como se dijo en la sección anterior, el desplazamiento sólo depende del cambio *neto* de posición y no de la trayectoria seguida. Por lo tanto, no importa cómo se desplazó realmente el cuerpo que contiene a los puntos P y Q, se tiene la libertad de concebir la trayectoria como se desee. La ecuación (2-66) conduce a pensar en el desplazamiento como si se hubiera efectuado en dos etapas. En primer lugar, el cuerpo se traslada (se desliza sin rotación) desde $x_2y_2z_2$ hasta $x_2^*y_2^*z_2^*$; en el curso de este movimiento, todas las partículas, incluyendo a P y Q, tienen el mismo desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_Q$. A continuación, se concibe el cuerpo como si girara en torno al punto Q' describiendo el ángulo $\Delta\theta$ hasta llegar a la posición final $x'_2y'_2z'_2$.

Mediante el manejo de la (2-66) se puede obtener una interpretación diferente

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{R}_{PQ} &= (\mathbf{R}'_P - \mathbf{R}_P) - (\mathbf{R}'_Q - \mathbf{R}_Q)\\ &= (\mathbf{R}'_P - \mathbf{R}'_Q) - (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q)\end{aligned} \qquad (c)$$

y luego, basándose en las ecuaciones (a) y (b),

$$\Delta\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{R}'_{PQ} - \mathbf{R}_{PQ} \qquad (2\text{-}67)$$

Esta ecuación corresponde al triángulo vectorial $Q'P^*P'$ de la figura 2-22 y demuestra que la diferencia de desplazamiento, definida como la diferencia entre dos desplazamientos, es igual al cambio neto entre los vectores de diferencia de posición.

En cualquiera de las dos interpretaciones, se está ilustrando el *teorema de Euler*, el cual afirma que *cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido es equivalente a la suma de una translación neta de un punto* (Q) *y una rotación neta del cuerpo en torno a ese punto.* También se ve que sólo la rotación contribuye a la diferencia de desplazamiento entre dos puntos del mismo cuerpo rígido, es decir, *no existe diferencia alguna entre los desplazamientos de dos puntos cualesquiera del mismo cuerpo rígido como resultado de una translación.* (Véase la sección 2-13 en donde se da la definición del término translación.)

En vista de lo antes expuesto, es factible representar la diferencia de desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_{PQ}$ como el desplazamiento del punto P que vería un observador que se mueve junto, coincidiendo siempre con el punto Q; *pero sin girar* con el

cuerpo en movimiento, es decir, utilizando siempre los ejes de coordenadas absolutas $x_1y_1z_1$ para medir la dirección. Es importante entender con claridad la diferencia entre la interpretación de un observador que se mueve con el punto Q, pero sin girar, y el caso del observador que está *sobre* el cuerpo en movimiento. Para un observador colocado sobre el cuerpo 2, los dos puntos P y Q parecerían estacionarios, es decir, ninguno aparentaría tener un desplazamiento ya que no se mueven en relación con el observador, y la diferencia de desplazamiento vista por un observador que guarda esta posición sería cero.

2-13 ROTACIÓN Y TRANSLACIÓN

Aplicando el concepto de diferencia de desplazamiento entre dos puntos del mismo cuerpo rígido, ahora se puede definir la translación y la rotación.

La *translación se define como un estado de movimiento de un cuerpo para el que la diferencia de desplazamiento entre dos puntos cualesquiera, P y Q del mismo, es cero* o bien, basándose en la ecuación de la diferencia de desplazamiento (2-66),

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{R}_{PQ} &= \Delta\mathbf{R}_P - \Delta\mathbf{R}_Q = 0 \\ \Delta\mathbf{R}_P &= \Delta\mathbf{R}_Q \end{aligned} \tag{2-68}$$

lo cual afirma que *los desplazamientos de dos puntos cualesquiera del cuerpo son iguales*. La rotación es un estado de movimiento del cuerpo para el que puntos diferentes del mismo presentan desplazamientos diferentes.

En la figura 2-23*a* se ilustra una situación en la que el cuerpo se ha movido a lo largo de una trayectoria curva, de la posición x_2y_2 a la $x'_2y'_2$. A pesar del hecho de que las trayectorias de los puntos son curvas,† $\Delta\mathbf{R}_P$ sigue siendo igual a $\Delta\mathbf{R}_Q$ y el cuerpo ha sufrido una translación. Se observa que en la translación las trayec-

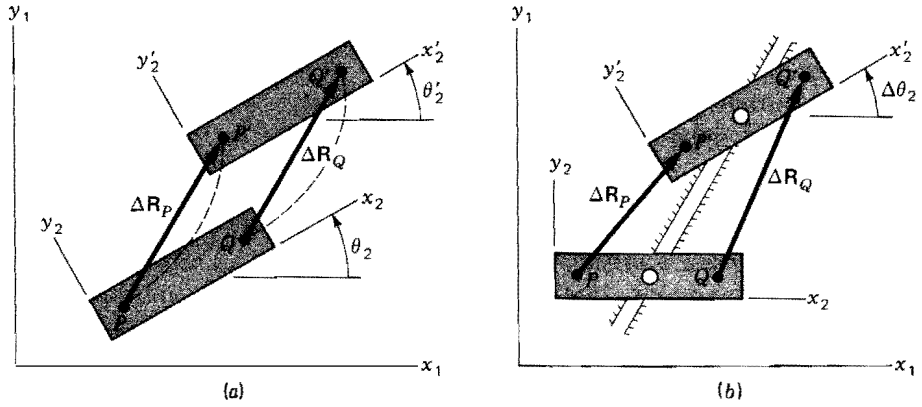


Figura 2-23 *a*) Translación $\Delta\mathbf{R}_P = \Delta\mathbf{R}_Q$, $\Delta\theta_2 = 0$; *b*) rotación: $\Delta\mathbf{R}_P \neq \Delta\mathbf{R}_Q$, $\Delta\theta_2 \neq 0$.

† La translación en la que las trayectorias de los puntos no son rectas se denomina en ocasiones *translación curvilínea*.

torias de los puntos, descritas por dos puntos cualesquiera del cuerpo, son idénticas y no existe cambio alguno en la orientación angular entre el sistema de coordenadas en movimiento y el sistema de coordenadas del observador, dicho de otra manera $\Delta\theta_2 = \theta_2' - \theta_2 = 0$.

En la figura 2-23*b*, el punto central del cuerpo en movimiento está restringido a moverse siguiendo una trayectoria rectilínea. Con todo, conforme lo hace, el cuerpo gira de tal manera que $\Delta\theta_2 = \theta_2' - \theta_2 \neq 0$ y los desplazamientos $\Delta\mathbf{R}_P$ y $\Delta\mathbf{R}_Q$ no son iguales. Incluso aunque no exista un punto obvio del cuerpo en torno al cual haya girado, el sistema de coordenadas $x_2'y_2'$ ha cambiado su orientación angular relativa a x_1y_1, y se dice que el cuerpo efectuó una rotación. Nótese que las trayectorias de los puntos descritas por P y Q no son iguales.

En estos dos ejemplos se ve que la rotación o la translación de un cuerpo no se pueden definir basándose en el movimiento de un solo punto; y que se trata de movimientos característicos de un cuerpo o de un sistema de coordenadas. No se puede hablar de "rotación de un punto" porque no tiene significado hablar de la orientación angular de un punto. También es incorrecto asociar los términos rotación y translación con las características rectilíneas y curvilíneas de la trayectoria de un solo punto. Aunque no importa qué puntos del cuerpo se elijan, es preciso comparar el movimiento de dos o más puntos para contar con definiciones significativas de estos términos.

2-14 DESPLAZAMIENTO APARENTE

Ya se hizo notar que el desplazamiento de un punto en movimiento no depende de la trayectoria particular recorrida; sin embargo, puesto que el desplazamiento se calcula a partir de los vectores de posición de los puntos extremos de la trayectoria, es esencial conocer el sistema de coordenadas del observador.

Considérese una partícula P_3 que se mueve a lo largo de una trayectoria conocida en un sistema de coordenadas $x_2y_2z_2$, que, a su vez, se mueve con respecto al sistema de referencia absoluto $x_1y_1z_1$, como se ilustra en la figura 2-24. Definamos también otro punto P_2 que esté rígidamente fijo al cuerpo en movimiento 2, es decir, que sea estacionario con respecto al sistema de coordenadas $x_2y_2z_2$, y que inicialmente coincida con el punto P_3.

Tal y como la ve un observador absoluto (en el sistema de coordenadas $x_1y_1z_1$), después de un intervalo de tiempo determinado, la partícula P_3, parece haberse movido a una nueva ubicación P_3', con el desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_{P_3}$. El punto P_2, al formar parte del cuerpo 2, se mueve de un modo diferente a P_3, llega a una nueva ubicación P_2' con el desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_{P_2}$.

No obstante, la situación parece muy diferente si la observa una persona colocada en el sistema de coordenadas móviles $x_2y_2z_2$. Este observador sólo ve el

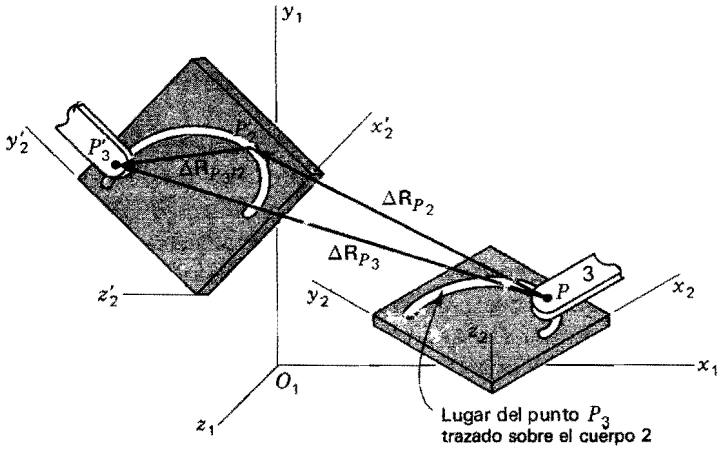


Figura 2-24 Desplazamiento aparente de un punto.

desplazamiento aparente $\Delta\mathbf{R}_{P_3/2}$ de la partícula P_3, conforme recorre la trayectoria en su sistema de coordenadas. Puesto que la trayectoria está fija en un sistema de coordenadas, no detecta su movimiento y, por ende, no observa el mismo desplazamiento de P_3 que percibe el observador absoluto. El punto P_2 se antoja estacionario a los ojos de este observador y, por lo tanto, $\Delta\mathbf{R}_{P_2/2} = 0$.

Según el triángulo vectorial ilustrado en la figura 2-24, es evidente que las percepciones de los dos observadores están relacionadas por la *ecuación de desplazamiento aparente*

$$\Delta\mathbf{R}_{P_3} = \Delta\mathbf{R}_{P_2} + \Delta\mathbf{R}_{P_3/2} \tag{2-69}$$

Se puede tomar esta ecuación como la definición del vector de desplazamiento aparente, aunque también es primordial entender los conceptos físicos que intervienen. Nótese que el vector de desplazamiento aparente relaciona los desplazamientos absolutos de dos *puntos coincidentes* que son partículas de *diferentes cuerpos en movimiento.* Nótese también que no existe restricción alguna para la ubicación real del observador que se mueve junto con el sistema de coordenadas 2, sólo que debe estar fijo en ese sistema, de manera que no perciba el desplazamiento del punto P_2.

Uno de los usos principales del desplazamiento aparente es determinar un desplazamiento absoluto. No es raro encontrar en las máquinas un punto semejante al P_3 que esté restringido a moverse siguiendo una ranura, trayectoria o curso definido por la forma de otro eslabón móvil 2. En tales casos quizá resulte mucho más conveniente medir o calcular $\Delta\mathbf{R}_{P_2}$ y $\Delta\mathbf{R}_{P_3/2}$ en combinación con la (2-69), que medir directamente el desplazamiento absoluto $\Delta\mathbf{R}_{P_3}$.

2-15 DESPLAZAMIENTO ABSOLUTO

Al reflexionar sobre la definición y el concepto del vector de desplazamiento aparente, se llega a la conclusión de que el desplazamiento absoluto de un punto móvil, $\Delta\mathbf{R}_{P_3/1}$, es el caso especial de un desplazamiento aparente en el que el observador está fijo en el sistema de coordenadas absolutas. Como se explicó en el caso del vector de posición, a menudo se abrevia la notación usando $\Delta\mathbf{R}_{P_3}$, o simplemente $\Delta\mathbf{R}_P$, y cuando no se indica en forma explícita, se presupone un observador absoluto.

Es probable que se pueda lograr una mejor comprensión física del desplazamiento aparente relacionándolo con el desplazamiento absoluto. Imagínese un automóvil P_3 que recorre una carretera y está siendo seguido por un observador absoluto a cierta distancia hacia un lado. Considérese cómo este observador percibe visualmente el movimiento del automóvil. Aunque puede no estar consciente de todos los pasos que se citan a continuación, el argumento aquí es que el observador imagina primero un punto P_{1_0} que coincide con P_3, el cual define en su mente como estacionario; quizá se relacione con un punto fijo de la carretera o un árbol cercano, por ejemplo. Luego compara sus observaciones posteriores del automóvil P_3 con las de P_1, para detectar el desplazamiento. Nótese que no hace la comparación con su propia ubicación, sino con el punto inicial P_1. En este caso, la ecuación de desplazamiento aparente se convierte en una identidad:

$$\Delta\mathbf{R}_{P_3} = \Delta\mathbf{R}^{0}_{P_1} + \Delta\mathbf{R}_{P_3/1}$$

PROBLEMAS†

2-1 Descríbase y trácese el lugar geométrico de un punto A que se mueve obedeciendo las ecuaciones $R^x_A = at\cos 2\pi t$, $R^y_A = at\,\text{sen}\,2\pi t$, $R^z_A = 0$.

2-2 Encuéntrese la diferencia de posición del punto P al punto Q de la curva $y = x^2 + x - 16$, en donde $R^x_P = 2$ y $R^x_Q = 4$.

2-3 La trayectoria de un punto en movimiento se define mediante la ecuación $y = 2x^2 - 28$. Encuéntrese la diferencia de posición del punto P al punto Q si $R^x_P = 4$ y $R^x_Q = -3$.

2-4 La trayectoria de un punto en movimiento P se define mediante la ecuación $y = 60 - x^3/3$. ¿Cuál es el desplazamiento del punto si su movimiento principia cuando $R^x_P = 0$ y concluye cuando $R^x_P = 3$?

2-5 Si el punto A se mueve sobre el lugar geométrico del problema 2-1, hállese el desplazamiento desde $t = 2$ hasta $t = 2.5$.

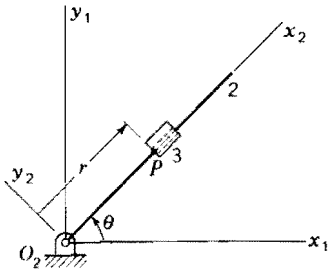
2-6 La posición de un punto está dada por la ecuación $\mathbf{R} = 100e^{j2\pi t}$. ¿Cuál es la trayectoria de dicho punto? Determínese el desplazamiento del punto, de $t = 0.10$ a $t = 0.40$.

2-7 La ecuación $\mathbf{R} = (t^2 + 4)e^{-j\pi t/10}$ define la posición de un punto. ¿En qué dirección está girando el vector de posición? ¿En dónde se localiza el punto cuando $t = 0.10$ a $t = 0$? ¿Cuál puede ser el siguien-

† Al asignar los problemas, es posible que el profesor desee especificar el método de resolución que deba aplicarse, en vista de la diversidad de planteamientos que se han presentado en el texto.

te valor de t si la dirección del vector de posición debe ser la misma que cuando $t = 0$? ¿Cuál es el desplazamiento de la primera a la segunda posición del punto?

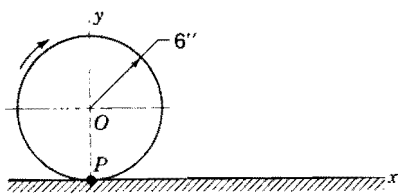
2-8 La ubicación de un punto se define con la ecuación $\mathbf{R} = (4t + 2)e^{j\pi t^2/30}$ en donde t es el tiempo en segundos. El movimiento del punto se inicia en $t = 0$. ¿Cuál es el desplazamiento durante los tres primeros segundos? Encuéntrese el cambio en la orientación angular del vector de posición durante el mismo intervalo de tiempo.

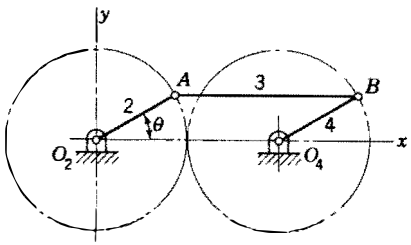


Problema 2-9

2-9 El eslabón 2 de la figura gira obedeciendo a la ecuación $\theta = \pi t/4$. El bloque 3 se desliza hacia afuera sobre el eslabón 2 siguiendo la ecuación $r = t^2 + 2$. ¿Cuál es el desplazamiento absoluto $\Delta\mathbf{R}_{P_1}$ desde $t = 1$ hasta $t = 2$? ¿Cuál es el desplazamiento aparente $\Delta\mathbf{R}_{P_3/2}$?

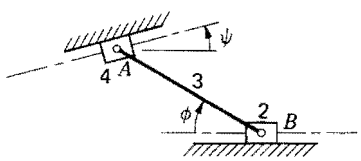
2-10 Una rueda cuyo centro se encuentra en O se mueve rodando sin deslizamiento, de tal modo que su centro se desplaza 10 pulg hacia la derecha. ¿Cuál es el desplazamiento del punto P sobre la periferia durante este intervalo?

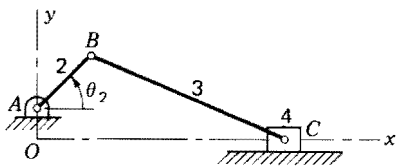




Problema 2-10 Rueda en movimiento y **Problema 2-11** $R_{AO_2} = R_{BO_4} = 3$ pulg, $R_{BA} = R_{O_4O_2} = 6$ pulg.

2-11 Un punto Q se mueve desde A hasta B a lo largo del eslabón 3 mientras que el eslabón 2 gira desde $\theta_2 = 30°$ a $\theta_2' = 120°$. Encuéntrese el desplazamiento absoluto de Q.





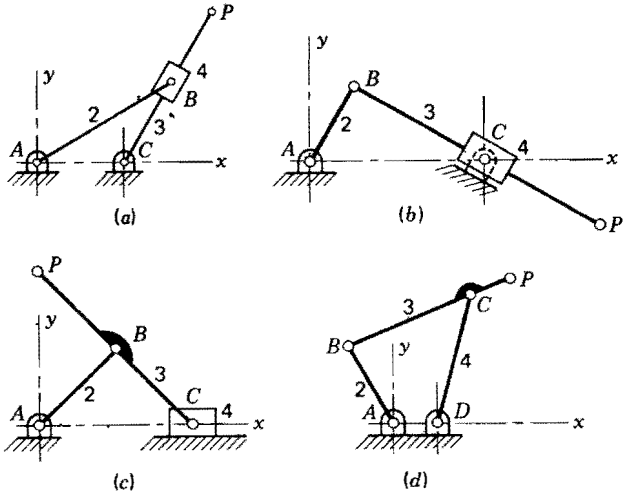
Problema 2-12 $R_{AB} = 200$ mm, $\psi = 15°$; **Problema 2-13** $R_{AO} = 1$ pulg, $R_{BA} = 2.5$ pulg, $R_{CB} = 7$ pulg.

2-12 El eslabonamiento ilustrado se impulsa moviendo el bloque corredizo 2. Escríbase la ecuación de cierre del circuito y resuélvase analíticamente el caso para la posición del bloque corredizo 4. Verifíquese gráficamente el resultado para la posición en la que $\phi = -45°$.

2-13 El mecanismo excéntrico de corredera-manivela se impulsa por la manivela giratoria 2. Escríbase la ecuación de cierre del circuito. Encuéntrese la posición de la corredera 4 en función de θ_2.

2-14 Escríbase un programa de calculadora para encontrar la suma de cualquier número de vectores bidimensionales expresados en formas rectangulares o polares combinadas. Es necesario que el resultado se pueda obtener en cualquiera de las dos formas, haciendo que la magnitud y el ángulo de la forma polar tenga sólo valores positivos.

2-15 Escríbase un programa de computadora para trazar la gráfica de la curva del acoplador de cualquier forma de manivela-oscilador o doble manivela del eslabonamiento de cuatro barras. El programa debe aceptar cuatro longitudes de los eslabones y coordenadas rectangulares o polares del punto del acoplador en relación con éste.



Problema 2-16 (*a*) $R_{CA} = 2$ pulg, $R_{BA} = 3.5$ pulg, $R_{PC} = 4$ pulg. (*b*) $R_{CA} = 40$ mm, $R_{BA} = 20$ mm, $R_{PB} = 65$ mm; (*c*) $R_{BA} = R_{CB} = R_{PB} = 25$ mm; (*d*) $R_{DA} = 1$ pulg, $R_{BA} = 2$ pulg, $R_{CB} = R_{DC} = 3$ pulg, $R_{PB} = 4$ pulg.

2-16 Para cada eslabonamiento ilustrado en la figura, hállese la trayectoria del punto *P*: *a*) mecanismo invertido de corredera-manivela; *b*) segunda inversión del mecanismo de corredera-manivela; *c*) mecanismo de línea recta; *d*) mecanismo de eslabón de arrastre.

CAPÍTULO

TRES

VELOCIDAD

3-1 DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

En la figura 3-1 un punto en movimiento se observa primero en la ubicación P, definida por el vector de posición absoluta $\mathbf{R}_P$. Después de un breve intervalo de tiempo, Δt, se observa que su posición ha cambiado a P', definida por $\mathbf{R}'_P$. Se recordará que, según la ecuación (2-65), el desplazamiento durante este intervalo de tiempo se define como

$$\Delta \mathbf{R}_P = \mathbf{R}'_P - \mathbf{R}_P$$

La *velocidad promedio* del punto durante el intervalo Δt es $\Delta \mathbf{R}_P/\Delta t$. Su *velocidad instantánea* (que de aquí en adelante se llamará simplemente *velocidad*) se define por el límite de esta razón para un intervalo de tiempo infinitesimalmente pequeño y está dada por

$$\mathbf{V}_P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_P}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{R}_P}{dt} \tag{3-1}$$

Puesto que $\Delta \mathbf{R}_P$ es un vector, hay *dos* convergencias al tomar este límite, la *magnitud* y la *dirección*. Por lo tanto, la velocidad de un punto es una cantidad vectorial igual a la rapidez de cambio de su posición respecto al tiempo. Al igual que los vectores de posición y desplazamiento, el vector velocidad se define para un punto específico; "velocidad" no se debe aplicar a una recta, sistema de coordenadas, volumen u otra colección de puntos, puesto que la velocidad en cada punto puede diferir.

Se recordará que las definiciones de los vectores de posición $\mathbf{R}_P$ y $\mathbf{R}'_P$ dependen de la ubicación y orientación del sistema de coordenadas del observador. Por

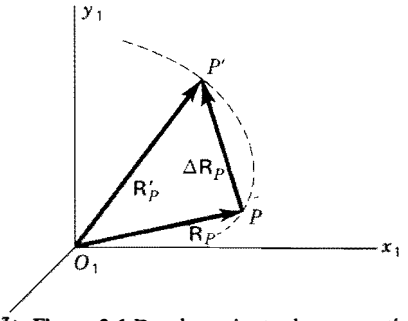


Figura 3-1 Desplazamiento de una partícula móvil.

otro lado, el vector desplazamiento $\Delta \mathbf{R}_P$ y el velocidad $\mathbf{V}_P$ son independientes de la ubicación inicial del sistema de coordenadas o de la posición del observador dentro de éste. No obstante, la velocidad $\mathbf{V}_P$ depende críticamente del movimiento del observador o del sistema de coordenadas, en caso de haberlo; por esto se supone que el observador es estacionario dentro del sistema de coordenadas. Si el sistema de coordenadas que interviene es el absoluto, la velocidad se considera *velocidad absoluta* y se denota con el símbolo $\mathbf{V}_{P|1}$ o, sencillamente, $\mathbf{V}_P$. Esto concuerda con la notación que se utiliza para el desplazamiento absoluto.

3-2 ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO

Cuando un cuerpo rígido se traslada, como se vio en la sección 2-13, el movimiento de cualquier partícula individual es igual al movimiento de todas las demás del mismo cuerpo. Sin embargo, cuando el cuerpo gira, dos partículas arbitrariamente escogidas P y Q no describen el mismo movimiento y un sistema de coordenadas fijo al cuerpo no se mantiene paralelo a su orientación inicial; dicho de otra manera, el cuerpo sufre cierto desplazamiento angular $\Delta\theta$.

Los desplazamientos angulares no se estudiaron detalladamente en el capítulo 2 porque, en general, no se pueden tratar como vectores. La razón es que no obedecen las reglas usuales de la adición vectorial; si se describen varios desplazamientos angulares brutos en sucesión, en tres dimensiones, el resultado depende del orden en que se producen.

Para ilustrar esto, considérese el rectángulo *ABCO* de la figura 3-2*a*. El cuerpo rectangular se gira primero —90° en torno al eje y y luego se gira +90° alrededor del eje x. Se ve que la posición final del cuerpo está en el plano yz. En la figura 3-2*b* el cuerpo ocupa la misma posición inicial y se gira nuevamente alrededor de los mismos ejes, describiendo los mismos ángulos y en las mismas direcciones; no obstante, la primera rotación la desarrolla en torno al eje x y la segunda alrededor del eje y. El orden de las rotaciones se invierte y la posición final del rectángulo ahora se ve que es en el plano xz y no en el plano yz, como lo fue antes. Puesto que esta característica no corresponde a la ley conmutativa de la adición

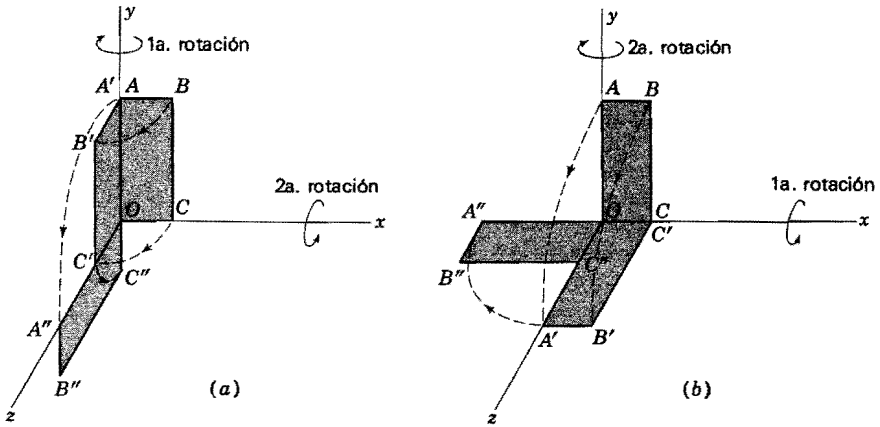


Figura 3-2 Los desplazamientos angulares no se pueden sumar vectorialmente porque el resultado depende del orden en que se sumen.

vectorial, los desplazamientos angulares tridimensionales no se pueden manejar como vectores.

Por otra parte, los desplazamientos angulares que ocurren alrededor del mismo eje o de ejes paralelos, sí obedecen la ley conmutativa. Asimismo, los desplazamientos angulares infinitesimalmente pequeños son conmutativos. Para evitar confusiones, se tratarán todos los desplazamientos angulares finitos como cantidades escalares; no obstante, se tendrá la ocasión de tratar los desplazamientos angulares infinitesimales como vectores.

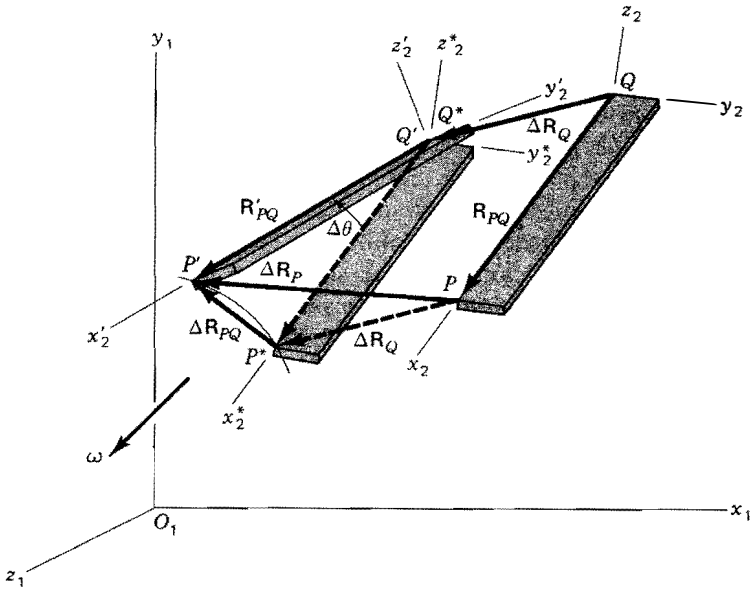


Figura 3-3 Diferencia de desplazamiento entre dos puntos del mismo eslabón rígido.

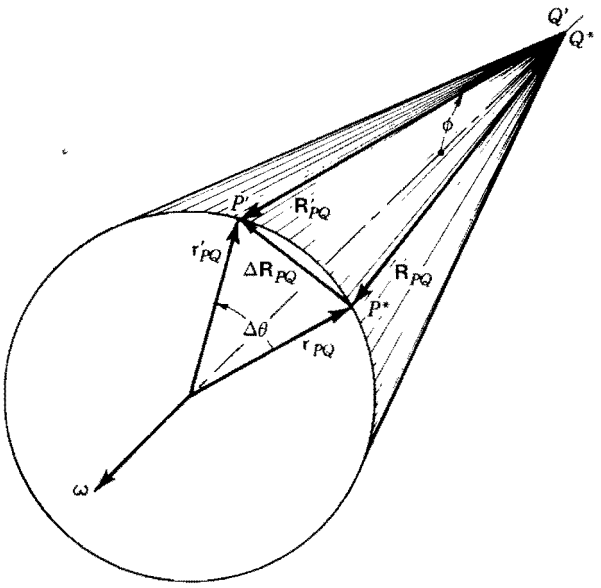


Figura 3-4 Diferencia de desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_{PQ}$ según la ve un observador en traslación.

En la figura 3-3 se recuerda la definición de la diferencia de desplazamiento entre dos puntos, P y Q, fijos en el mismo cuerpo rígido. Como se señaló en la sección 2-12, el vector diferencia desplazamiento es atribuible por completo a la rotación del cuerpo; en un cuerpo que describe una traslación no hay diferencia de desplazamiento entre sus puntos. Se llegó a esta conclusión representando el desplazamiento como un suceso que ocurre en dos pasos. En primer lugar, se supuso que el cuerpo realiza una traslación a lo largo del desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_Q$ hasta la posición $x_2^* y_2^* z_2^*$. Luego, se hizo que el cuerpo girara alrededor del punto Q^* hasta la posición $x_2' y_2' z_2'$.

Otra manera de representar la diferencia de desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_{PQ}$ es concebir un sistema de coordenadas móviles cuyo origen se desplaza junto con el punto Q; pero cuyos ejes se mantienen paralelos a los ejes absolutos $x_1 y_1 z_1$. Nótese que este sistema de coordenadas no sufre rotación. Un observador que se encuentre en este sistema de coordenadas no observa movimiento alguno en el punto Q, porque permanece en el origen de su sistema. Para el desplazamiento del punto P observará el vector diferencia de desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_{PQ}$. A este observador le parece que el punto Q se mantiene fijo y que el cuerpo gira en torno a este punto fijo, como se ilustra en la figura 3-4.

No importa si el observador está ubicado en el sistema de coordenadas básico o en el móvil descrito, el cuerpo parece girar describiendo cierto ángulo total $\Delta\theta$ en su desplazamiento de $x_2 y_2 z_2$ a $x_2' y_2' z_2'$. Si se considera el punto de vista del observador fijo, la ubicación del eje de rotación no es obvia. Tal y como lo ve el observador en traslación, el eje pasa por el punto Q aparentemente estacionario; todos

los puntos del cuerpo parecen describir trayectorias circulares en torno a este eje, y cualquier recta que se encuentre en el cuerpo, cuya dirección sea normal a este eje, parece sufrir un desplazamiento angular idéntico $\Delta\theta$.

La *velocidad angular* de un cuerpo en rotación se define ahora como la cantidad vectorial $\boldsymbol{\omega}$ cuya dirección es la misma que la del eje instantáneo de rotación. La magnitud del vector velocidad angular se define como la rapidez de cambio respecto al tiempo de la orientación angular de cualquier recta en el cuerpo cuya dirección sea normal al eje de rotación. Si el desplazamiento angular de cualquiera de estas rectas se designa como $\Delta\theta$ y el intervalo de tiempo como Δt, la magnitud del vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{3-2}$$

Puesto que se ha acordado que las rotaciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj son positivas, el sentido del vector $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje de rotación se define de acuerdo con la regla de la mano derecha.

3-3 DIFERENCIA DE VELOCIDADES ENTRE PUNTOS DEL MISMO CUERPO RÍGIDO

En la figura 3-5*a* se ilustra otra vista del desplazamiento del mismo cuerpo rígido que se representó en la figura 3-3. Esta es la que vería un observador ubicado en el sistema de coordenadas absolutas y que mira directamente a lo largo del eje de rotación del cuerpo en movimiento, desde la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$. En esta vista, el desplazamiento angular $\Delta\theta$ se observa en su tamaño real, y *todas* las rectas del cuerpo describen este mismo ángulo durante el desplazamiento. Los vectores de desplazamiento y los de diferencia de posición no aparecen necesariamente en su tamaño real, sino que más bien se perciben escorzados bajo este ángulo de visión.

En la figura 3-5*b* se presenta la rotación del mismo cuerpo rígido, con el mismo ángulo de observación pero, en este caso, desde el punto de vista del observador en traslación. Por tanto, esta figura corresponde a la base del cono ilustrado en la figura 3-4. Se observa que los dos vectores identificados por $\mathbf{r}_{PQ}$ y $\mathbf{r}'_{PQ}$ son las vistas escorzadas de $\mathbf{R}_{PQ}$ y $\mathbf{R}'_{PQ}$ y, según la figura 3-4, es evidente que sus magnitudes son

$$r_{PQ} = r'_{PQ} = R_{PQ} \operatorname{sen} \phi \tag{a}$$

en donde ϕ es el ángulo constante desde el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ hasta el vector diferencia de posición giratorio $\mathbf{R}_{PQ}$ conforme describe el cono.

Si se observa nuevamente la figura 3-5*b*, se ve que también se puede interpretar como un dibujo a escala correspondiente a la ecuación (2-67). Ilustra el hecho de que el vector diferencia de desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_{PQ}$ es igual al cambio vec-

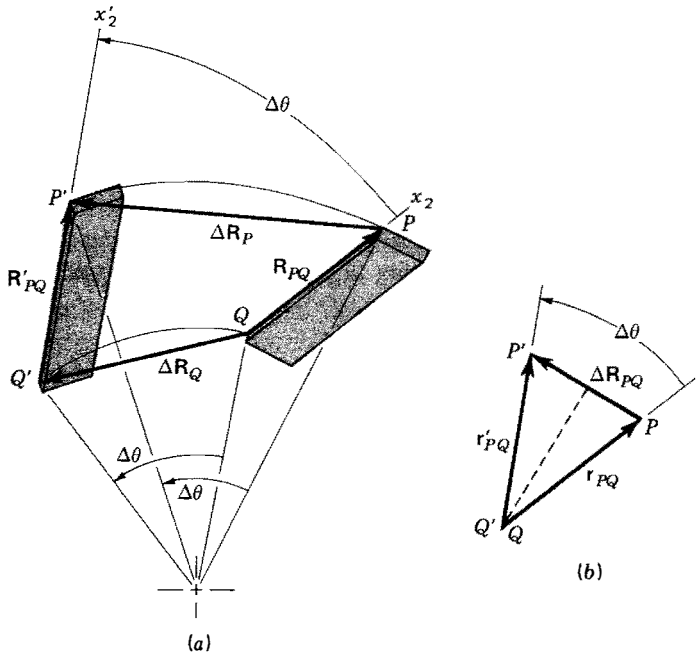


Figura 3-5 *a*) Vista verdadera de los desplazamientos angulares de la figura 3-3. *b*) Sustracción vectorial para obtener la diferencia de desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_{PQ}$.

torial en la diferencia de posición absoluta $\mathbf{R}_{PQ}$ producida durante el desplazamiento

$$\Delta\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{R}'_{PQ} - \mathbf{R}_{PQ} \tag{b}$$

Ahora ya es posible calcular la magnitud del vector diferencia de desplazamiento $\Delta\mathbf{R}_{PQ}$. En la figura 3-5*b*, en donde aparece en su tamaño verdadero, se traza su mediatriz, lo que muestra que

$$\Delta R_{PQ} = 2r_{PQ} \operatorname{sen} \frac{\Delta\theta}{2} \tag{c}$$

y, según la (*a*)

$$\Delta R_{PQ} = 2(R_{PQ} \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen} \frac{\Delta\theta}{2} \tag{d}$$

Si se impone ahora la limitación de movimientos pequeños, el seno del término de desplazamiento angular puede aproximarse mediante el ángulo mismo,

$$\Delta R_{PQ} \approx 2(R_{PQ} \operatorname{sen} \phi) \frac{\Delta\theta}{2} = \Delta\theta \, R_{PQ} \operatorname{sen} \phi \tag{e}$$

Si se divide entre el pequeño incremento de tiempo Δt, observando que la magnitud R_{PQ} y el ángulo ϕ son constantes durante el intervalo, y tomando el límite, se obtiene

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R_{PQ}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t}\right) R_{PQ} \operatorname{sen} \phi = \omega R_{PQ} \operatorname{sen} \phi \qquad (f)$$

Si se recuerda que la definición de ϕ lo establece como el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{R}_{PQ}$, se pueden restablecer los atributos vectoriales de la ecuación anterior, reconociéndola como la forma de un producto vectorial. Por ende

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_{PQ}}{\Delta t} = \frac{d\,\mathbf{R}_{PQ}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{PQ} \qquad (g)$$

Esta forma es tan importante y tan útil que tiene su propio nombre y símbolo; se le conoce como *vector diferencia de velocidad* y se denota por $\mathbf{V}_{PQ}$

$$\mathbf{V}_{PQ} = \frac{d\mathbf{R}_{PQ}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{PQ} \qquad (3\text{-}3)$$

Ahora recordemos la ecuación de la diferencia de desplazamiento (2-66),

$$\Delta \mathbf{R}_P = \Delta \mathbf{R}_Q + \Delta \mathbf{R}_{PQ} \qquad (h)$$

Si esta ecuación se divide entre Δt y se toma el límite, se obtiene

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_Q}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_{PQ}}{\Delta t} \qquad (i)$$

que, por las ecuaciones (3-1) y (3-3), se convierte en

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_Q + \mathbf{V}_{PQ} \qquad (3\text{-}4)$$

Esta ecuación extremadamente importante recibe el nombre de *ecuación de la diferencia de velocidad*; junto con la (3-3) constituye una de las bases primarias de todas las técnicas de análisis de la velocidad. La ecuación (3-4) se puede escribir para dos puntos cualesquiera sin restricción alguna; no obstante, como se verá repasando la deducción anterior, la (3-3) no se debe aplicar a cualquier par arbitrario de puntos. *Esta forma es válida sólo si los dos puntos están fijos al mismo cuerpo rígido*. Tal vez pueda recordarse mejor esta restricción si todos los subíndices se escriben en forma explícita

$$\mathbf{V}_{P_2Q_2} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_{P_2Q_2} \qquad (j)$$

pero, por brevedad, se acostumbra suprimir casi siempre los subíndices del número de eslabón. Nótese que estos son los mismos en toda la ecuación (*j*). Si se realiza un intento erróneo de aplicación de la (3-3), cuando los puntos P y Q no forman parte del mismo eslabón, dicho error quedará al descubierto ya que no se verá con claridad qué factor $\boldsymbol{\omega}$ se debe usar.

3-4 ANÁLISIS GRÁFICO DE LA VELOCIDAD; POLÍGONOS DE VELOCIDADES

Uno de los principales métodos de análisis de velocidad es el gráfico. Como se vio en el análisis gráfico de la posición, se emplea primordialmente en problemas bidimensionales cuando se tiene sólo una posición que requiere solución. Sus principales ventajas son que se obtiene con gran rapidez una solución y que se acrecentan la concepción y la comprensión del problema al aplicar el método gráfico.

Como ejemplo inicial del análisis gráfico de la velocidad, consideremos el movimiento bidimensional del eslabón no restringido ilustrado en la figura 3-6*a*. Supóngase que se conocen las velocidades de los puntos A y B, y se desea determinar la velocidad del punto C y la velocidad angular del eslabón. Se supone que ya se trazó un diagrama a escala del eslabón, figura 3-6*a*, en el instante considerado, es decir, que ya se completó un análisis de posición y que se pueden medir los vectores diferencia de posición basándose en este diagrama.

A continuación se considera la ecuación de la diferencia de velocidad (3-4) relacionando los puntos A y B,

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{BA} \qquad (a)$$

en donde las dos incógnitas son la magnitud y la dirección del vector diferencia de velocidad $\mathbf{V}_{BA}$, como se indica arriba de este símbolo en la ecuación. En la figura 3-6*b* se muestra la solución gráfica de la ecuación. Después de elegir una escala para representar los vectores velocidad, se trazan a escala los vectores $\mathbf{V}_A$ y $\mathbf{V}_B$ partiendo de un origen común y en las direcciones especificadas. El vector que se extiende entre los puntos de $\mathbf{V}_A$ y $\mathbf{V}_B$ es el vector diferencia de velocidad $\mathbf{V}_{BA}$ y es correcto, dentro de los límites de exactitud de la gráfica, tanto por lo que respecta a su magnitud como a su dirección.

Ahora se puede hallar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del eslabón aplicando la ecuación (3-3)

$$\mathbf{V}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BA} \qquad (b)$$

Puesto que el eslabón tiene movimiento plano, el vector $\boldsymbol{\omega}$ es perpendicular al plano de movimiento, es decir, perpendicular a los vectores $\mathbf{V}_{BA}$ y $\mathbf{R}_{BA}$. Por ende, al considerar las magnitudes de la ecuación anterior

$$V_{BA} = \omega R_{BA}$$

o bien,

$$\omega = V_{BA}/R_{BA} \qquad (c)$$

Por lo tanto, la magnitud numérica de ω se encuentra midiendo a escala V_{BA} en la figura 3-6*b*, y R_{BA} en la figura 3-6*a*, teniendo cuidado de aplicar adecuadamente los factores de escala para las unidades; una de las prácticas más comunes es evaluar ω en radianes por segundo.

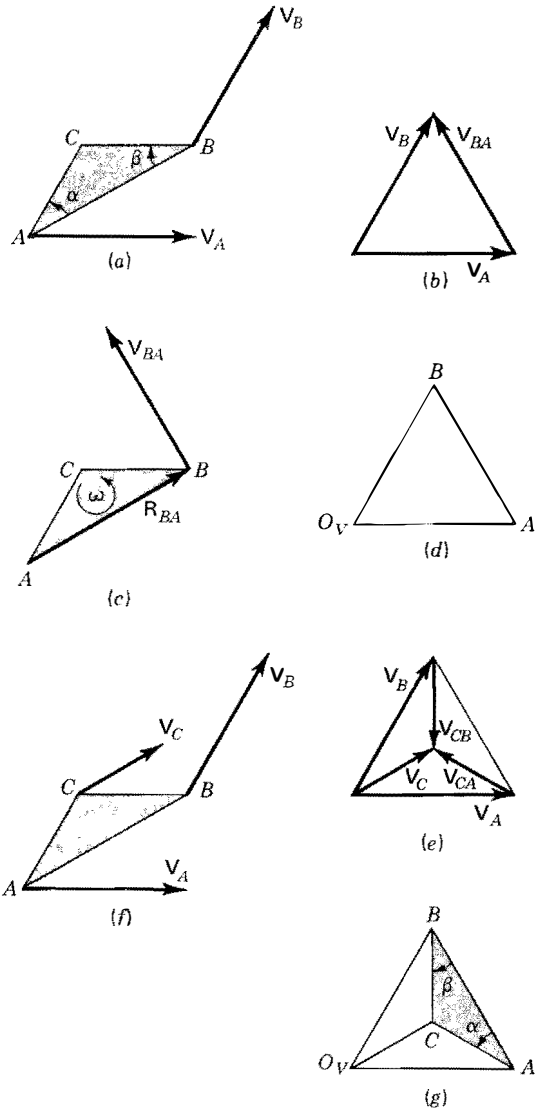


Figura 3-6

La magnitud ω no es una solución completa del vector velocidad angular; y también se debe determinar la dirección. Como se hizo notar antes, el vector $\boldsymbol{\omega}$ es perpendicular al plano del propio eslabón porque el movimiento es plano. Sin embargo, esto nada dice acerca de si $\boldsymbol{\omega}$ sale del plano de la figura o entra al mismo. Esto se determina como se ilustra en la figura 3-6*c*. Si se toma el punto de vista de un observador en traslación, es decir, moviéndose con el punto A pero sin girar, se puede representar al eslabón como si girara en torno al punto A. La diferencia de

velocidad $\mathbf{V}_{BA}$ es la única velocidad detectada por este observador; de donde, al interpretar $\mathbf{V}_{BA}$ como indicadora de la dirección de rotación del punto B en torno al A, se encuentra la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ que, en este ejemplo, es opuesto al del movimiento de las manecillas del reloj. Aunque no con una notación estrictamente vectorial, una buena práctica, que se seguirá en este libro, en problemas bidimensionales es indicar la solución final en la forma $\omega = 15$ rad/s cmr (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj), con lo que se indica tanto la magnitud como la dirección.

La costumbre de trazar los diagramas vectoriales con líneas gruesas, como en la figura 3-6*b*, facilita su lectura; pero cuando el diagrama es la solución gráfica de una ecuación, no es muy exacto. Por esta razón se acostumbra construir la solución gráfica con líneas delgadas bien definidas, usando un lápiz de dibujo de punta dura, como se muestra en la figura 3-6*d*. La solución se inicia eligiendo una escala y un punto, que se identifica como O_V, para representar la velocidad cero. Las velocidades absolutas, tales como $\mathbf{V}_A$ y $\mathbf{V}_B$, se trazan con sus orígenes en O_V, y sus extremos se identifican como los puntos A y B. Entonces la recta que va *de A a B* representa la diferencia de velocidad $\mathbf{V}_{BA}$. Al continuar con este desarrollo, se verá que estas identificaciones en los vértices son suficientes para determinar la notación precisa de todas las diferencias de velocidades representadas por las rectas del diagrama. Por ejemplo, nótese que $\mathbf{V}_{BA}$ se representa con el vector que va *del* punto *B al* punto *A*. Con esta convención de identificación, no es necesario usar puntas de flecha o notaciones adicionales que nada hacen más que complicar el diagrama. Un diagrama de esta índole se denomina *polígono de velocidades* y, como se verá más tarde, contribuye enormemente a facilitar la aplicación de las técnicas gráficas de solución.

Sin embargo, uno de los peligros de esta convención es que el analista comenzará a pensar que la técnica es una serie de "trucos" gráficos y correrá el riesgo de olvidarse de que cada recta trazada puede y debe estar por completo justificada mediante una ecuación vectorial correspondiente. Las gráficas sólo constituyen una técnica conveniente de resolución y no un sustituto de una base teórica bien fundada.

Volviendo a la figura 3-6*c*, pudo pensarse que el hecho de que el vector $\mathbf{V}_{BA}$ fuera perpendicular a $\mathbf{R}_{BA}$ es simple coincidencia. No obstante, si se reexamina la ecuación (*b*), se observará que era un resultado obligatorio, que proviene del producto vectorial con el vector $\boldsymbol{\omega}$. En el paso siguiente se aprovechará esta propiedad.

Ahora que se ha encontrado $\boldsymbol{\omega}$, determinamos la velocidad absoluta del punto C. Esta se puede relacionar mediante las ecuaciones de la diferencia de velocidad con las velocidades absolutas de los puntos A y B

$$\overset{\infty}{\mathbf{V}}_C = \overset{\vee\vee}{\mathbf{V}}_A + \overset{\circ\vee}{\mathbf{V}}_{CA} = \overset{\vee\vee}{\mathbf{V}}_B + \overset{\circ\vee}{\mathbf{V}}_{CB} \qquad (d)$$

Puesto que los puntos A, B y C forman parte del mismo eslabón rígido, cada uno de los vectores de diferencia de velocidad $\mathbf{V}_{CA}$ y $\mathbf{V}_{CB}$, es de la forma $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, utilizando $\mathbf{R}_{CA}$ y $\mathbf{R}_{CB}$, respectivamente. Como resultado de ello, $\mathbf{V}_{CA}$ es perpen-

dicular a $\mathbf{R}_{CA}$, y $\mathbf{V}_{CB}$ es perpendicular a $\mathbf{R}_{CB}$. Las direcciones de estos dos términos se indican, por ende, como elementos conocidos en la ecuación (*d*).

Puesto que ya se determinó $\boldsymbol{\omega}$, es fácil calcular las magnitudes de $\mathbf{V}_{CA}$ y $\mathbf{V}_{CB}$, aplicando una fórmula del tipo de la (*e*); no obstante, se supondrá que esto no se hace. Por el contrario, se construye la solución gráfica para la (*d*). Esta ecuación afirma que un vector que es perpendicular a $\mathbf{R}_{CA}$ se debe sumar a $\mathbf{V}_A$ y que el resultado será igual a la suma de $\mathbf{V}_B$ y un vector perpendicular a $\mathbf{R}_{CB}$. La solución se ilustra en la figura 3-6*e*. En la práctica, la solución se continúa sobre el mismo diagrama como en la figura 3-6*d*, y conduce a la figura 3-6*g*. Se traza una recta perpendicular a $\mathbf{R}_{CA}$ (que representa a $\mathbf{V}_{CA}$), partiendo del punto *A* (representando la adición a $\mathbf{V}_A$); del mismo modo se traza una recta perpendicular a $\mathbf{R}_{CB}$, partiendo del punto *B*. El punto de intersección de estas dos rectas se identifica con el símbolo *C* y representa la solución de la ecuación (*d*). La recta que va de O_V al punto *C* representa ahora la velocidad absoluta $\mathbf{V}_C$. Esta velocidad se puede transferir nuevamente al eslabón e interpretarse como $\mathbf{V}_C$, tanto en magnitud como en dirección, como se indica en la figura 3-6*f*.

Si se observa el sombreado y los ángulos marcados con α y β en la figura 3-6*g* y *a*, se ve uno conducido a investigar si los dos triángulos identificados por *ABC* en cada una de estas figuras son semejantes, como parecen ser. Al revisar los pasos de construcción se ve que, en efecto, lo son porque los vectores de diferencia de velocidad $\mathbf{V}_{BA}$, $\mathbf{V}_{CA}$ y $\mathbf{V}_{CB}$, son perpendiculares a los vectores de diferencia de posición respectivos, $\mathbf{R}_{BA}$, $\mathbf{R}_{CA}$, y $\mathbf{R}_{CB}$. Esta propiedad sería verdadera independientemente de la forma del eslabón en movimiento; una figura de forma semejante aparecería en el polígono de velocidades. Sus lados se trazan siempre a escala, mayor o menor en un factor, iguales a la velocidad angular del eslabón, y siempre está girado 90° en la dirección de la velocidad angular. Las propiedades resultan del hecho de que cada vector de diferencia de velocidad entre dos puntos del eslabón tiene la forma de un producto vectorial del mismo vector $\boldsymbol{\omega}$ con el vector de diferencia de posición correspondiente. Esta figura de forma semejante en el polígono de velocidades se designa comúnmente como *imagen de velocidades* del eslabón, y cualquier eslabón en movimiento poseerá una imagen de velocidades correspondiente en el polígono de velocidades.

Si se hubiera conocido inicialmente el concepto de imagen de velocidades, se hubiera podido acelerar considerablemente el proceso de resolución. Una vez que ha progresado hasta la solución el estado ilustrado en la figura 3-6*d*, se conocen los puntos de la imagen de velocidades *A* y *B*. Se pueden utilizar estos dos puntos como base de un triángulo semejante a la forma del eslabón e identificar directamente el punto imagen *C*, sin necesidad de escribir la ecuación (*d*). Es preciso tener cuidado para no permitir que el triángulo se invierta entre el diagrama de posiciones y la imagen de velocidades; pero la solución puede desarrollarse con rapidez, exactitud y en forma natural, conduciendo a la figura 3-6*g*. Aquí se debe tener nuevamente la precaución de que todos los pasos de la solución se basen en ecuaciones vectoriales estrictamente deducidas y no en trucos geométricos. Es conveniente seguir escribiendo las ecuaciones vectoriales correspondientes hasta estar por completo familiarizado con el procedimiento.

Para aumentar la familiarización con las técnicas gráficas de análisis de la velocidad, se analizan a continuación dos ejemplos típicos.

Ejemplo 3-1 El eslabonamiento de cuatro barras cuyo dibujo a escala se ilustra en la figura 3-7*a* con todas las dimensiones necesarias, se impulsa mediante la manivela 2 con una velocidad angular constante $\omega_2 = 900$ rpm cmr. Calcúlense las velocidades instantáneas de los puntos E y F, y las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4 en la posición indicada.

SOLUCIÓN Para obtener una solución gráfica primero se calcula la velocidad angular del eslabón 2 en radianes por segundo. En este caso es

$$\omega_2 = \left(900 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 94.2 \text{ rad/s cmr} \tag{1}$$

A continuación se observa que el punto A permanece fijo y se calcula la velocidad del punto B

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A^{0} + \mathbf{V}_{BA} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_{BA}$$

$$V_B = (94.2 \text{ rad/s})(\tfrac{4}{12} \text{ pie}) = 31.4 \text{ pie/s} \tag{2}$$

Se observa que se utilizó la forma $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ para la diferencia de velocidad y no para la velocidad absoluta $\mathbf{V}_B$ directamente. En la figura 3-7*b* se escogió el punto O_V y un factor de escala de velocidades. Asimismo, se observa que el punto imagen A coincide con O_V y se traza la recta AB perpendicular a $\mathbf{R}_{BA}$ y hacia la izquierda, debido a la dirección opuesta a la del movimiento de las manecillas del reloj de ω_2; esta recta representa a $\mathbf{V}_{BA}$.

Si se tratara en este momento de escribir directamente una ecuación para la velocidad del punto E, al contar las incógnitas se descubre que aún no puede resolverse. De donde, a continuación se escriben dos ecuaciones para la velocidad del punto C. Puesto que las velocidades de los puntos C_3 y C_4 deben ser iguales (los eslabones 3 y 4 están juntos articulados mediante pasador en C),

$$\overset{\infty}{\mathbf{V}}_C = \overset{\searrow}{\mathbf{V}}_B + \overset{\searrow}{\mathbf{V}}_{CB} = \mathbf{V}_D^{0} + \overset{\curvearrowright}{\mathbf{V}}_{CD} \tag{3}$$

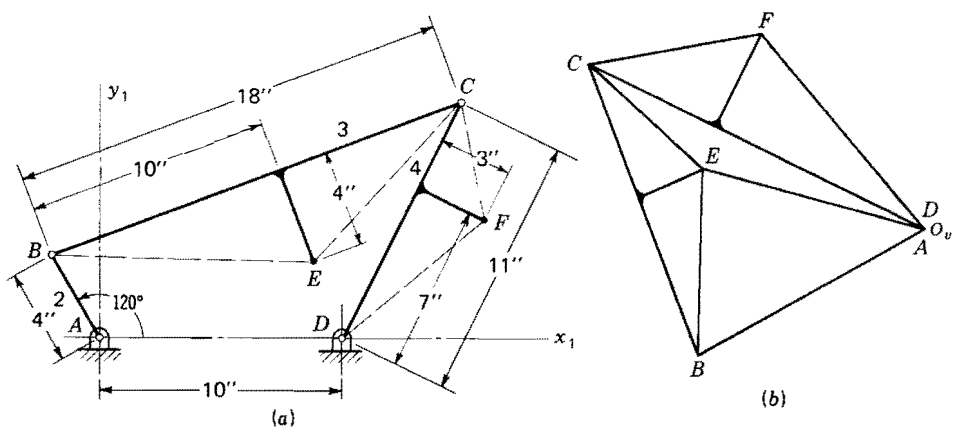


Figura 3-7 Análisis gráfico de velocidad de un eslabonamiento de cuatro barras, ejemplo 3-1 *a*) diagrama a escala; *b*) polígono de velocidades.

Ahora se trazan dos rectas en el polígono de velocidades; la recta BC se dibuja a partir de B y perpendicular a $\mathbf{R}_{CB}$, y la recta DC se traza desde D (coincidente con O_V en vista de que $\mathbf{V}_D = 0$) perpendicular a $\mathbf{R}_{CD}$. Luego se marca el punto de intersección identificándolo con la letra C. Cuando se miden a escala las longitudes de estas rectas, se encuentra que $V_{CB} = 38.4$ pie/s y $V_C = V_{CD} = 45.6$pie/s. Ahora pueden hallarse las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4 como sigue:

$$\omega_3 = \frac{V_{CB}}{R_{CB}} = \frac{38.4 \text{ pie/s}}{18/12 \text{ pie}} = 25.6 \text{ rad/s cmr} \qquad \textit{Resp.} \tag{4}$$

$$\omega_4 = \frac{V_{CD}}{R_{CD}} = \frac{45.5 \text{ pie/s}}{11/12 \text{ pie}} = 49.6 \text{ rad/s cmr} \qquad \textit{Resp.} \tag{5}$$

en donde se hallaron las direcciones de $\boldsymbol{\omega}_3$ y $\boldsymbol{\omega}_4$ aplicando la técnica ilustrada en la figura 3-6*c*.

Ahora se tienen varios métodos para hallar $\mathbf{V}_E$. En uno de ellos se mide R_{EB} a partir del dibujo a escala que aparece en la figura 3-7*a* y, a continuación, puesto que los puntos B y E forman parte del eslabón 3, se puede calcular †.

$$V_{EB} = \omega_3 R_{EB} = (25.6 \text{ rad/s})\left(\frac{10.8}{12} \text{ pie}\right) = 23.0 \text{ pie/s} \tag{6}$$

Ahora es factible trazar ya la recta BE en el polígono de velocidades, dibujándola a la escala apropiada y perpendicular a $\mathbf{R}_{EB}$, resolviendo así ‡ la ecuación de diferencia de velocidades

$$\overset{\infty}{\mathbf{V}}_E = \overset{\vee\vee}{\mathbf{V}}_B + \overset{\vee\vee}{\mathbf{V}}_{EB} \tag{7}$$

El resultado es

$$V_E = 27.6 \text{ pie/s} \qquad \textit{Resp.}$$

tal y como se miden a escala en el polígono de velocidades.

Por otro lado se puede hallar V_E partiendo de

$$\overset{\infty}{\mathbf{V}}_E = \overset{\vee\vee}{\mathbf{V}}_C + \overset{\vee\vee}{\mathbf{V}}_{EC} \tag{8}$$

mediante un procedimiento idéntico al que se empleó con la ecuación (7). Esta solución produciría el triángulo $O_V EC$ en el polígono de velocidades.

Supóngase que se desea calcular $\mathbf{V}_E$ sin el paso intermedio que representa calcular $\boldsymbol{\omega}$. En este caso se escriben simultáneamente las ecuaciones (7) y (8),

$$\overset{\infty}{\mathbf{V}}_E = \overset{\vee\vee}{\mathbf{V}}_B + \overset{a\vee}{\mathbf{V}}_{EB} = \overset{\vee\vee}{\mathbf{V}}_C + \overset{a\vee}{\mathbf{V}}_{EC} \tag{9}$$

Se trazan las rectas EB (perpendicular a $\mathbf{R}_{EB}$) y EC (perpendicular a $\mathbf{R}_{EC}$) en el polígono de velocidades, se encuentra su intersección y así se resuelve la ecuación (9).

Sin embargo, es probable que el método más sencillo de resolver para $\mathbf{V}_E$, es sacar ventaja del concepto de la imagen de velocidades del eslabón 3. Reconociendo que ya se encontraron los puntos B y C de la imagen de velocidades, se puede construir el triángulo BEC en el polígono de velocidades, semejante al triángulo BEC en el diagrama a escala del eslabón 3. Esto ubica al punto E en el polígono de velocidades, dando con ello una solución para $\mathbf{V}_E$.

† *No* hay restricción alguna en esta deducción que requiera que R_{EB} se encuentre a lo largo de la parte material del eslabón 3, para poder aplicar la ecuación (6).

‡ Nótese que los valores numéricos *no* se deben sustituir de manera directa en la ecuación (7); esta ecuación requiere una adición vectorial, *no escalar*, y este es justamente el propósito de construir el polígono de velocidades.

También puede encontrarse el vector velocidad $\mathbf{V}_F$ por cualquiera de los métodos anteriores, usando los puntos *C*, *D* y *F* del eslabón 4. El resultado es

$$V_F = 31.8 \text{ pie/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 3-2 El mecanismo de corredera-manivela excéntrico que se ilustra en la figura 3-8*a*, está impulsado por la corredera 4 con una rapidez $V_C = 10$ m/s hacia la izquierda, en la fase indicada. Determínese la velocidad instantánea del punto *D* y las velocidades angulares de los eslabones 2 y 3.

SOLUCIÓN Se escoge la escala de velocidades y el polo O_V y se traza $\mathbf{V}_C$, localizando con ello el punto *C* como se ilustra en la figura 3-8*b*. Luego se escriben ecuaciones simultáneas para la velocidad del punto *B*

$$\overset{\omega}{\mathbf{V}}_B = \overset{\vee\vee}{\mathbf{V}}_C + \overset{o\vee}{\mathbf{V}}_{BC} = \overset{0}{\cancel{\mathbf{V}_A}} + \overset{o\vee}{\mathbf{V}}_{BA} \tag{10}$$

y se resuelve para la ubicación del punto *B* en el polígono de velocidades.

Una vez determinados los puntos *B* y *C*, se puede construir la imagen de velocidades del eslabón 3 como se indica, para localizar el punto *D*; después se mide a escala la recta $O_V D$, lo que da

$$V_D = 12.0 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Las velocidades angulares de los eslabones 2 y 3 son

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{R_{BA}} = \frac{10.0 \text{ m/s}}{0.05 \text{ m}} = 200 \text{ rad/s cmr} \qquad \textit{Resp.} \tag{11}$$

$$\omega_3 = \frac{V_{BC}}{R_{BC}} = \frac{7.5 \text{ m/s}}{0.14 \text{ m}} = 53.6 \text{ rad/s cmr} \qquad \textit{Resp.} \tag{12}$$

En este segundo problema de ejemplo, figura 3-8*b*, la imagen de velocidades de cada eslabón se indica en este polígono. Si se desarrolla por completo el análisis de cualquier problema, se tendrán imágenes de velocidades para cada eslabón del mecanismo. Los siguientes puntos son ciertos en general y se pueden verificar en los ejemplos anteriores:

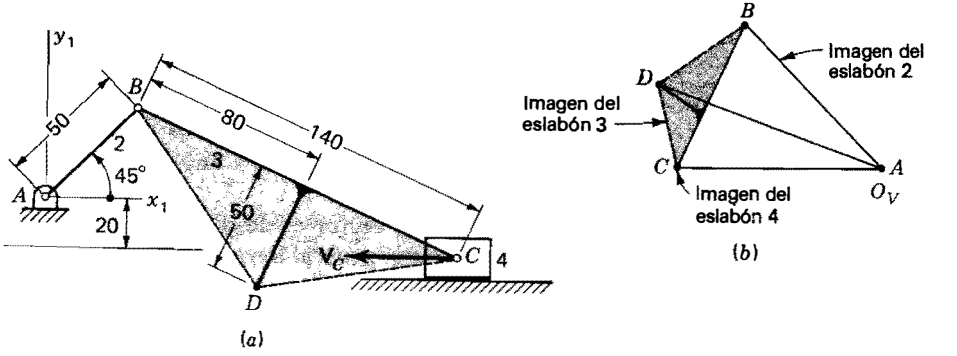


Figura 3-8 Ejemplo 3-2: *a*) diagrama a escala de un mecanismo de corredera y manivela (las dimensiones se dan en milímetros); *b*) polígono de velocidades.

1. La imagen de velocidades de cada eslabón es una reproducción a escala de la forma del eslabón en el polígono de velocidades.
2. La imagen de velocidades de cada eslabón se gira 90° en la dirección de la velocidad angular del eslabón.
3. Las letras que identifican los vértices de cada eslabón son las mismas que se encuentran en el polígono de velocidades y están colocadas en torno a la imagen de velocidades en el mismo orden y en la misma dirección angular que alrededor del eslabón.
4. La razón del tamaño de la imagen de velocidades de un eslabón al tamaño del eslabón mismo, es igual a la magnitud de la velocidad angular de éste. En general, *no* es la misma para diferentes eslabones en el mismo mecanismo.
5. La velocidad de todos los puntos de un eslabón en traslación es igual y la velocidad angular es cero. Por consiguiente, la imagen de velocidades de un eslabón que se está trasladando se reduce hasta un solo punto en el polígono de velocidades.
6. El punto O_V en el polígono de velocidades es la imagen de todos los puntos con velocidad absoluta cero. Es la imagen de velocidades del eslabón fijo.
7. La velocidad absoluta de cualquier punto de cualquier eslabón se representa por medio de la recta que va de O_V a la imagen del punto. El vector de diferencia de velocidad entre dos puntos cualesquiera, por ejemplo P y Q, se representa mediante la recta que va del punto imagen P al punto imagen Q.

3-5 VELOCIDAD APARENTE DE UN PUNTO EN UN SISTEMA DE COORDENADAS EN MOVIMIENTO

Al analizar las velocidades de varios componentes de máquinas, se encuentran con frecuencia problemas en los que resulta conveniente describir cómo se mueve un punto en relación con otro eslabón móvil; pero, en cambio, totalmente inconveniente describir el movimiento absoluto del punto. Un ejemplo de esto es el que se presenta cuando un eslabón rotatorio contiene una ranura por la que otro eslabón está obligado a deslizarse. Si se tienen como cantidades conocidas el movimiento del eslabón que contiene a la ranura y el movimiento relativo de deslizamiento que se lleva a efecto dentro de ésta, quizá se desee encontrar el movimiento absoluto del elemento deslizante. Fue precisamente para problemas de esta índole que se definió en la sección 4 el vector de desplazamiento aparente, y ahora se desea ampliar este concepto para abarcar a la velocidad.

En la figura 3-9 se recuerda la definición del vector de desplazamiento aparente. Un eslabón rígido que tiene cierto movimiento general lleva un sistema de coordenadas $x_2y_2z_2$ fijo a él. En un instante determinado t, el sistema de coordenadas se encuentra en $x_2y_2z_2$ y, tras un pequeño intervalo Δt, se mueve a su nuevo punto $x'_2y'_2z'_2$. Todos los puntos del eslabón 2 se mueven con el sistema de coordenadas.

De igual modo, durante el mismo intervalo de tiempo, otro punto P_3 de otro eslabón, el 3, está restringido de alguna manera a moverse siguiendo una trayec-

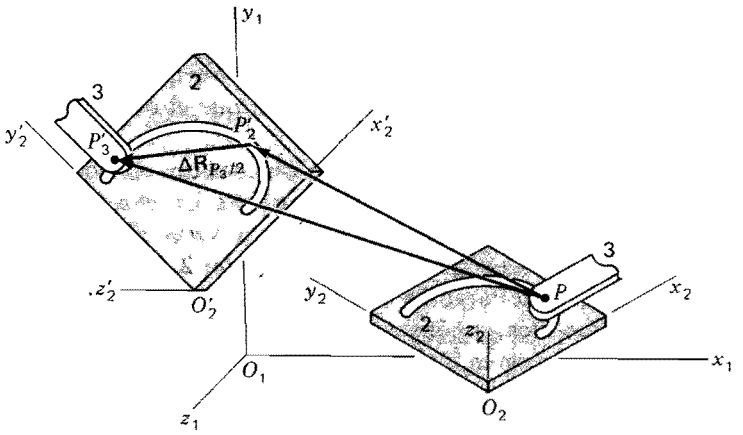


Figura 3-9 Desplazamiento aparente.

toria conocida en relación con el eslabón 2. En la figura 3-9 se ilustra esta restricción en la forma de una ranura que contiene un pasador del eslabón 3; el centro del pasador es el punto P_3. Aunque se da esta representación en particular, la restricción se puede presentar en una diversidad de formas distintas. La única *suposición que se hace en este caso es que se conoce la trayectoria que traza el punto móvil* P_3 *en el sistema de coordenadas* $x_2y_2z_2$, *es decir, el lugar geométrico de la punta del vector de posición aparente* $\mathbf{R}_{P_3/2}$.

Si se recuerda la ecuación de desplazamiento aparente (2-69),

$$\Delta\mathbf{R}_{P_3} = \Delta\mathbf{R}_{P_2} + \Delta\mathbf{R}_{P_3/2}$$

se divide entre Δt y se toma el límite

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{R}_{P_3}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{R}_{P_2}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{R}_{P_3/2}}{\Delta t}$$

Ahora se define el vector *velocidad aparente* como sigue

$$\mathbf{V}_{P_3/2} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{R}_{P_3/2}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{R}_{P_3/2}}{dt} \tag{3-5}$$

y, en el límite, la ecuación anterior se convierte en

$$\mathbf{V}_{P_3} = \mathbf{V}_{P_2} + \mathbf{V}_{P_3/2} \tag{3-6}$$

llamada *ecuación de la velocidad aparente*.

En su definición, ecuación (3-5), se observa que la velocidad aparente se semeja a la velocidad absoluta excepto en que proviene del desplazamiento aparente en lugar de provenir del desplazamiento absoluto. Por ende, en concepto, se

trata de la velocidad del punto móvil P_3 *tal y como la percibiría un observador fijo al eslabón móvil 2* que hace observaciones en el sistema de coordenadas $x_2y_2z_2$. Este concepto explica así el nombre que lleva. También se observa que la velocidad absoluta es un caso especial de la velocidad aparente, en el que el observador se encuentra fijo en el sistema de coordenadas $x_1y_1z_1$.

Si se examina con cuidado la figura 3-10 se puede obtener una mayor información acerca de la naturaleza del vector velocidad aparente. En esta figura se muestra la vista del punto en movimiento P_3, tal y como lo vería el observador en movimiento. Para él, la trayectoria trazada sobre el eslabón 2 parece estacionaria y el punto móvil se desplaza a lo largo de esta trayectoria, de P_3 a P_3'. Si se trabaja en este sistema de coordenadas, supóngase que se localiza el punto C como el centro de curvatura de la trayectoria en el punto P_2. Para distancias pequeñas a partir de P_2, la trayectoria sigue el arco circular P_3P_3' cuyo centro es C y su radio de curvatura es $\boldsymbol{\rho}$. Ahora se define el vector unitario extensión de $\boldsymbol{\rho}$, identificado como $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, y se define el vector unitario tangente a la trayectoria $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ con sentido positivo en la dirección del movimiento. Se observa que éstos forman ángulos rectos entre sí y completan un sistema derecho de coordenadas cartesianas, definiendo el vector unitario normal

$$\hat{\boldsymbol{\nu}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{3-7}$$

Este sistema de coordenadas se mueve de tal manera que su origen sigue el movimiento del punto P_3. Sin embargo, gira con el vector de radio de curvatura (describiendo el ángulo $\Delta\phi$) conforme se desarrolla el movimiento, *no* describe la misma rotación que los eslabones 2 ó 3.

Ahora se define el escalar Δs como la distancia a lo largo de la curva, de P_3 a P_3', y se observa que $\Delta\mathbf{R}_{P_3/2}$ es la cuerda del mismo arco. No obstante, para un

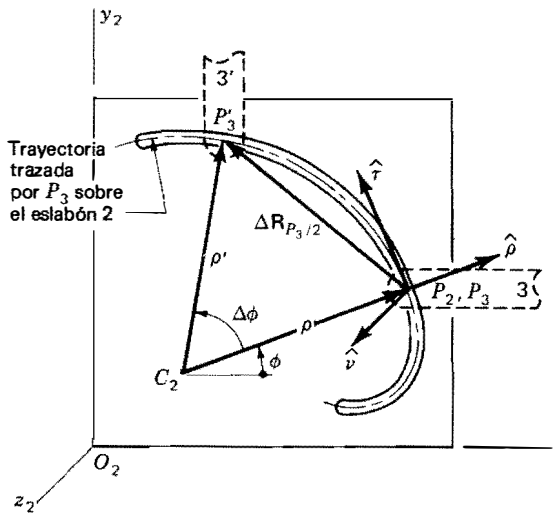


Figura 3-10 Desplazamiento aparente del punto P_3 según lo ve un observador ubicado sobre el eslabón 2.

Δt, muy breve, la magnitud de la cuerda y la distancia sobre el arco tienden a la igualdad. Por ende,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_{P_3/2}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{R}_{P_3/2}}{ds} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{3-8}$$

En este caso, tanto $\Delta \mathbf{R}_{P_3/2}$ como Δs se consideran funciones del tiempo; de donde, partiendo de la (3-5),

$$\mathbf{V}_{P_3/2} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_{P_3/2}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{R}_{P_3/2}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{3-9}$$

Se llega a dos conclusiones importantes a partir de este resultado: la magnitud de la velocidad aparente es igual a la rapidez con la que se desplaza el punto P_3 a lo largo de la trayectoria y el vector velocidad aparente *siempre es tangente a la trayectoria trazada* por el punto en el sistema de coordenadas del observador. El primero de estos dos resultados rara vez es útil para resolver problemas, aunque es un concepto importante. El segundo resultado es extremadamente útil ya que, a menudo, la trayectoria aparente trazada se puede imaginar basándose en la naturaleza de las restricciones y, por tanto, se vuelve conocida la dirección del vector velocidad aparente. Nótese que sólo es necesario determinar la tangente a la trayectoria; el radio de curvatura $\boldsymbol{\rho}$ no se necesita hasta que se intente el análisis de la aceleración, en el capítulo siguiente.

Ejemplo 3-3 En la figura 3-11*a* se ilustra una inversión del mecanismo de corredera-manivela. El eslabón 2, la manivela, se impulsa a una velocidad angular de 36 rad/s mmr (en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj). El eslabón 3 se desliza sobre el 4 y está unido a la manivela mediante un pivote en A. Hállese la velocidad angular del eslabón 4.

SOLUCIÓN En primer lugar se calcula la velocidad del punto A,

$$\mathbf{V}_A = \overset{0}{\mathbf{V}_E} + \mathbf{V}_{AE} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_{AE}$$
$$V_A = (36 \text{ rad/s})(\tfrac{3}{12} \text{ pie}) = 9 \text{ pie/s} \tag{1}$$

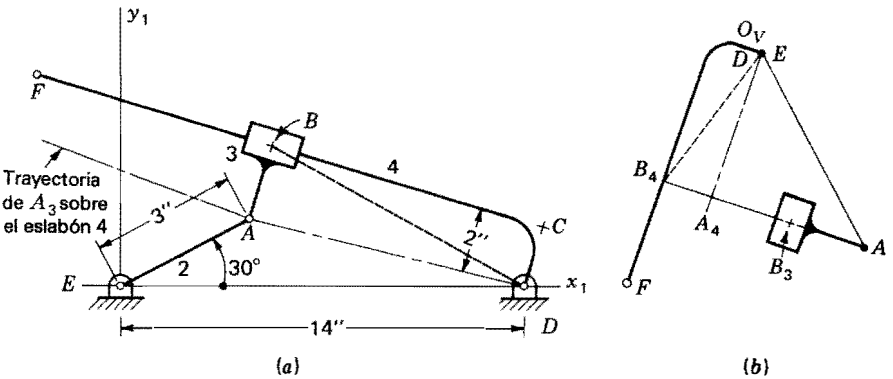


Figura 3-11 Ejemplo 3-3: *a*) mecanismo invertido de corredera y manivela; *b*) polígono de velocidades.

y se representa gráficamente partiendo del polo O_V, a fin de localizar el punto A en el polígono de velocidades, como se muestra en la figura 3-11*b*.

Luego se establece una distinción entre dos puntos diferentes, B_3 y B_4, en la ubicación del deslizamiento. El punto B_3 forma parte del eslabón 3 y B_4 del eslabón 4; pero, en el instante ilustrado, los dos coinciden. Nótese que, como lo ve un observador ubicado en el eslabón 4, el punto B_3 parece deslizarse a lo largo del eslabón 4 definiendo con ello una trayectoria rectilínea a lo largo de CF. Por ende, se puede escribir la ecuación de la velocidad aparente como

$$\mathbf{V}_{B_3} = \mathbf{V}_{B_4} + \mathbf{V}_{B_3/4} \tag{2}$$

Cuando el punto B_3 se relaciona con A y el punto B_4 con D, por medio de las diferencias de velocidades, el desarrollo de la (2) da

$$\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{B_3A} = \mathbf{V}_D^{0} + \mathbf{V}_{B_4D} + \mathbf{V}_{B_3/4} \tag{3}$$

en donde $\mathbf{V}_{B_3A}$ es perpendicular a $\mathbf{R}_{BA}$, $\mathbf{V}_{B_4D}$ es perpendicular a $\mathbf{R}_{BD}$ (mostrado a trazos) y $\mathbf{V}_{B_3/4}$ tiene una dirección definida por la tangente a la trayectoria del deslizamiento en B.

Aunque la (3) parece tener tres incógnitas, si se observa que $\mathbf{V}_{B_3A}$ y $\mathbf{V}_{B_3/4}$ tienen direcciones idénticas, la ecuación se puede reordenar como

$$\mathbf{V}_A + (\mathbf{V}_{B_3A} - \mathbf{V}_{B_3/4}) = \mathbf{V}_{B_4D} \tag{4}$$

y la diferencia escrita entre paréntesis se puede tratar como un solo vector de dirección conocida. Ahora, la ecuación se reduce a dos incógnitas y se puede resolver gráficamente para localizar el punto B_4 en el polígono de velocidades.

La magnitud R_{BD} se puede calcular o medir en el diagrama y V_{B_4D} se puede determinar a escala basándose en el polígono de velocidades (la recta a trazos que va de O_V a B_4). Por lo tanto,

$$\omega_4 = \frac{V_{B_4D}}{R_{BD}} = \frac{7.3\ \text{pie/s}}{11.6/12\ \text{pie}} = 7.55\ \text{rad/s cmr} \qquad \textit{Resp.} \tag{5}$$

Aunque según enunció el problema, ahora está completo, el polígono de velocidad se ha extendido para incluir las imágenes de los eslabones 2, 3 y 4. Al hacerlo, fue necesario consignar que, puesto que los eslabones 3 y 4 permanecen siempre perpendiculares entre sí, deben girar a la misma velocidad. Por ende, $\omega_3 = \omega_4$. Esto permitió calcular $\mathbf{V}_{BA} = \omega_3 \times \mathbf{R}_{BA}$ y situar el punto de la imagen de velocidades B_3. También se observa que las imágenes de velocidades de los eslabones 3 y 4 tienen un tamaño comparable puesto que $\omega_3 = \omega_4$. No obstante, tienen una escala muy distinta a la de imagen de velocidades del eslabón 2, la recta O_VA, puesto que ω_2 es una velocidad angular mayor.

Otro método para resolver el mismo problema evita la necesidad de combinar los términos como en la ecuación (4). Si se considera un observador viajando sobre el eslabón 4 y se le pregunta cuál vería como trayectoria del punto A en su sistema de coordenadas, se descubre que ésta trayectoria es una recta paralela a la recta CF, como se indica en la figura 3-11*a*. Ahora definamos un punto de esta trayectoria como A_4. En el instante ilustrado, el punto A_4 coincide con los puntos A_2 y A_4. Sin embargo, A_4 *no se mueve con el pasador; está unido al eslabón 4 y gira con la trayectoria en torno al punto fijo D.* Puesto que es factible identificar la trayectoria trazada por A_2 y A_4 sobre el eslabón 4, se puede escribir la ecuación de la velocidad aparente

$$\mathbf{V}_{A_2} = \mathbf{V}_{A_4} + \mathbf{V}_{A_2/4} \tag{6}$$

y, puesto que el punto A_4 forma parte del eslabón 4,

$$\mathbf{V}_{A_4} = \mathbf{V}_D^{0} + \mathbf{V}_{A_4D} \tag{7}$$

Sustituyendo la ecuación (6) en la (7) se obtiene

$$\mathbf{V}_{A_2} = \mathbf{V}_{A_4D} + \mathbf{V}_{A_2/4} \tag{8}$$

en donde $\mathbf{V}_{A_4D}$ es perpendicular a $\mathbf{R}_{AD}$ y $\mathbf{V}_{A_2/4}$ es tangente a la trayectoria. Cuando se resuelve esta ecuación se localiza el punto imagen A_4 en el polígono de velocidades y se obtiene una solución para $\omega_4 = V_{A_4D}/R_{AD}$. Entonces se puede hallar el resto del polígono de velocidades como se acaba de explicar.

Sería erróneo intentar la aplicación de la ecuación

$$\mathbf{V}_{A_4} = \mathbf{V}_{A_2} + \mathbf{V}_{A_4/2}$$

en lugar de la (6), puesto que *la trayectoria* trazada por el punto A_4 en el sistema de coordenadas unido al eslabón 2 *no se conoce*. †

En el siguiente ejemplo se proporciona un caso que arroja más luz sobre la naturaleza y uso de la ecuación de la velocidad aparente.

Ejemplo 3-4 Como se muestra en la figura 3-12, un avión que viaja con una velocidad de 300 km/h está describiendo un círculo cuyo radio es de 5 km y su centro se ubica en C. Al hacerlo, el piloto ve un cohete a 30 km de distancia que se desplaza siguiendo una trayectoria recta, a 2 000 km/h. ¿Cuál es la velocidad del cohete tal y como la ve el piloto del avión?

SOLUCIÓN Puesto que el avión sigue un curso circular, el punto C_2, unido al sistema de coordenadas del avión, pero coincidente con C, carece de movimiento. Por ende, la velocidad angular del avión es

$$\omega_2 = \frac{V_{PC}}{R_{PC}} = \frac{V_P}{R_{PC}} = \frac{300 \text{ km/h}}{5 \text{ km}} = 60 \text{ rad/h cmr} \tag{9}$$

La pregunta formulada requiere, obviamente, el cálculo de la velocidad aparente $\mathbf{V}_{R_3/2}$; pero esto sólo se puede aplicar *entre puntos coincidentes*. Por lo tanto, se define otro punto R_2, fijo al sistema de coordenadas que giran con el avión, pero localizado de forma que coincida con el cohete R_3 en el instante que se ilustra. Como parte del avión, la velocidad de este punto es

$$\mathbf{V}_{R_2} = \mathbf{V}_P + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_{R_2P} = 300 \frac{\text{km}}{\text{h}} + \left(60 \frac{\text{rad}}{\text{h}}\right)(30 \text{ km}) = 2\ 100 \text{ km/h} \tag{10}$$

en donde los valores se suman algebraicamente porque los vectores son paralelos. Ahora puede calcularse la velocidad aparente,

$$\mathbf{V}_{R_3/2} = \mathbf{V}_{R_3} - \mathbf{V}_{R_2}$$

$$V_{R_3/2} = 2\ 000 \text{ km/h} - 2\ 100 \text{ km/h} = -100 \text{ km/h} \qquad \textit{Resp.} \tag{11}$$

Por tanto, según lo ve el piloto del avión, el cohete parece estar *retrocediendo* a una velocidad de 100 km/h. Este resultado se entiende mejor si se considera el movimiento del punto R_2. Dicho punto se trata como si estuviera *unido al avión* y, por ende, al piloto le parece estacionario.

† Aunque el uso de esta ecuación sugeriría una comprensión deficiente da, no obstante, una solución correcta. Si se encontrara la trayectoria correspondiente, sería tangente a la que se usó en el punto A. Dado que las *tangentes a las dos trayectorias son la misma aun cuando las trayectorias no lo sean,* la solución daría un resultado exacto. Esto *no* se aplica al análisis de aceleración, capítulo 4; de donde, se debe estudiar el concepto y evitar esta aplicación "retrógrada".

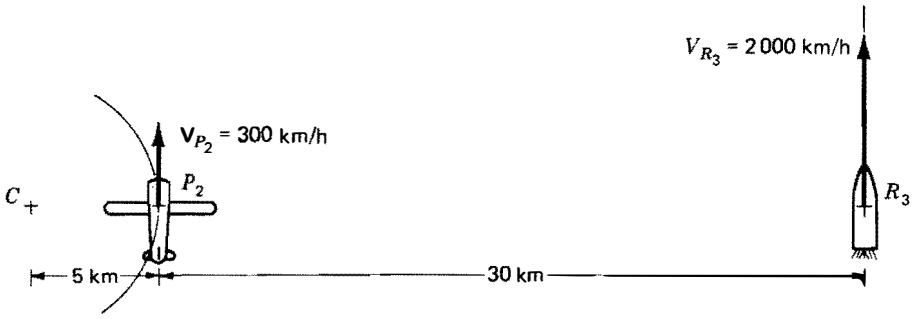


Figura 3-12 Ejemplo 3-4.

Con todo, en el sistema de coordenadas absolutas, este punto se está desplazando con mayor rapidez que el cohete; éste no se mantiene a la par con dicho punto y, de donde, al piloto le parece que está retrocediendo.

3-6 VELOCIDAD ANGULAR APARENTE

Cuando dos cuerpos rígidos giran con velocidades angulares diferentes, la diferencia vectorial entre ambos se define como la *velocidad angular aparente.* Por consiguiente,

$$\boldsymbol{\omega}_{3/2} = \boldsymbol{\omega}_3 - \boldsymbol{\omega}_2 \tag{3-10}$$

que también puede escribirse

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_{3/2} \tag{3-11}$$

Se verá que $\boldsymbol{\omega}_{3/2}$ es la velocidad angular del cuerpo 3 tal y como lo vería un observador que está fijo al cuerpo 2 y que gira con él. Compárese esta ecuación con la (3-6) en lo que respecta a la velocidad aparente de un punto.

3-7 CONTACTO DIRECTO Y CONTACTO POR RODADURA

Dos elementos de un mecanismo que están en contacto directo entre sí poseen un movimiento relativo que puede o no comprender un deslizamiento entre los eslabones en el punto de contacto directo. En el sistema de leva y seguidor ilustrado en la figura 3-13*a*, la leva, el eslabón 2, impulsa al seguidor, eslabón 3, mediante el contacto directo. Se observa que si no fuera posible el deslizamiento entre los eslabones 2 y 3 en el punto P, el triángulo PAB formaría una armadura; de donde, es preciso que se tenga tanto un deslizamiento como una rotación entre los eslabones.

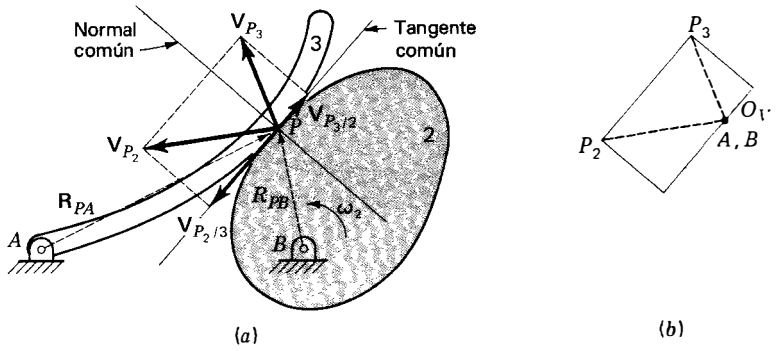


Figura 3-13 Velocidad aparente de deslizamiento en un punto de contacto directo.

Establezcamos una distinción entre los dos puntos P_2, fijo al eslabón 2, y P_3, fijo al eslabón 3. Son puntos coincidentes, localizados ambos en P en el instante indicado; por lo tanto, se puede escribir la ecuación de la velocidad aparente,

$$\mathbf{V}_{P_3/2} = \mathbf{V}_{P_3} - \mathbf{V}_{P_2} \tag{3-12}$$

Si se conocieran las dos velocidades absolutas $\mathbf{V}_{P_3}$ y $\mathbf{V}_{P_2}$, podrían restarse para hallar $\mathbf{V}_{P_3/2}$. Entonces podrían tomarse las componentes a lo largo de las direcciones definidas por la normal común y la tangente común a las superficies en el punto del contacto directo. Las componentes $\mathbf{V}_{P_3}$ y $\mathbf{V}_{P_2}$ a lo largo de la normal común deben ser iguales, y esta componente de $\mathbf{V}_{P_3/2}$ debe ser cero. De otra manera, los dos eslabones se separarían o bien se interferirían, y ambas cosas se oponen a la suposición básica de que el contacto persiste. La velocidad aparente total $\mathbf{V}_{P_3/2}$ *debe encontrarse, por ende, a lo largo de la tangente común* y es la velocidad del movimiento del deslizamiento relativo dentro de la entrecara del contacto directo. La figura 3-13*b* ilustra el polígono de velocidades de este sistema.

En otros mecanismos es posible que exista contacto directo entre eslabones sin que se tenga un deslizamiento. En el sistema de leva y seguidor de la figura 3-14, por ejemplo, podría existir una gran fricción entre el rodillo, eslabón 3, y la superficie de la leva, eslabón 2, y restringuir a la rueda para que ruede apoyándose contra la leva sin resbalar. De aquí en adelante se restringirá el término *contacto por rodadura* a situaciones *sin deslizamiento*. El término "sin deslizamiento" implica que la velocidad de deslizamiento aparente de la ecuación (3-12) es cero.

$$\mathbf{V}_{P_3/2} = 0 \tag{3-13a}$$

Hay ocasiones en que esta ecuación recibe el nombre de *condición de contacto por rodadura* para la velocidad. Por la (3-12), también se puede escribir como

$$\mathbf{V}_{P_3} = \mathbf{V}_{P_2} \tag{3-13b}$$

lo cual afirma que *las velocidades absolutas de dos puntos en contacto por rodadura son iguales*.

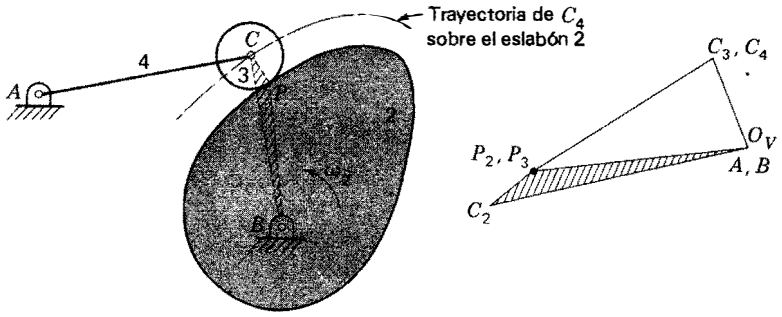


Figura 3-14 Sistema de leva y seguidor con contacto por rodadura entre los eslabones 2 y 3.

La solución gráfica del problema de la figura 3-14 se ilustra también allí mismo. Dada ω_2, se puede calcular y situar en la gráfica la diferencia de velocidad $\mathbf{V}_{P_2B}$, localizando así el punto P_2 en el polígono de velocidades. Con la (3-13), correspondiente a la condición de contacto por rodadura, también se marca este punto como P_3. A continuación, al escribir ecuaciones simultáneas para $\mathbf{V}_C$, utilizando $\mathbf{V}_{CP_3}$ y $\mathbf{V}_{CA}$, es factible encontrar el punto C de la imagen de velocidades C. Por ende, se pueden hallar ω_3 y ω_4, partiendo de $\mathbf{V}_{CP}$ y $\mathbf{V}_{CA}$, respectivamente.

Otro método para resolver el mismo problema comprende la definición de un punto ficticio C_2, que se localiza instantáneamente como concidiendo con los puntos C_3 y C_4, pero que se sobreentiende que está fijo al eslabón 2 y se mueve con él, como lo muestra el triángulo sombreado BPC. Cuando se usa el concepto de imagen de velocidades para el eslabón 2, se puede localizar el punto C_2 de la imagen de velocidades. Notando que el punto C_3 (y el C_4) describe una trayectoria conocida sobre el eslabón 2, se puede escribir y resolver la ecuación de la velocidad aparente que comprende a $\mathbf{V}_{C_4/2}$, obteniendo con ello la velocidad $\mathbf{V}_{C_4}$ (y ω_4, si así se desea) sin necesidad de recurrir al punto de contacto directo. Este segundo método sería necesario si no se hubiera supuesto un contacto por rodadura (sin deslizamiento) en P.

3-8 ANÀLISIS DE LA VELOCIDAD UTILIZANDO ÁLGEBRA COMPLEJA

Por lo que se dijo en la sección 2-8, se recordará que el álgebra compleja proporciona un planteamiento alternativo para los problemas bidimensionales de la cinemática. Como se vio, el planteamiento de álgebra compleja ofrece la ventaja de una mayor exactitud y su forma resulta adecuada para hallar soluciones mediante computadora digital, en un gran número de posiciones, una vez que se escribe el programa. Por otro lado, la resolución de la ecuación de cierre del circuito, para sus variables de posición desconocidas, es un problema no lineal y puede conducir a manipulaciones algebraicas tediosas. Por fortuna, como se verá, la ampliación

del método de álgebra compleja para incluir el análisis de la velocidad conduce a un conjunto de ecuaciones *lineales* y su solución es bastante directa.

Recordando la forma compleja polar de un vector bidimensional de la ecuación (2-28),

$$\mathbf{R} = Re^{j\theta}$$

se encuentra la forma general de su derivada respecto al tiempo

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \dot{R}e^{j\theta} + j\dot{\theta}Re^{j\theta} \tag{3-14}$$

en donde $\dot{R}$ y $\dot{\theta}$ denotan las rapideces de cambio respecto al tiempo de la magnitud y el ángulo de **R**, respectivamente. En los siguientes ejemplos se verá que el primer término de esta ecuación representa casi siempre una velocidad aparente y el segundo una diferencia de velocidad. Los métodos ilustrados en estos ejemplos fueron desarrollados por Raven. Aunque el trabajo original† propone métodos aplicables tanto a mecanismos planos como a espaciales, aquí sólo se verán los aspectos planos.

Para ilustrar el método de Raven, analicemos la inversión del mecanismo de corredera-manivela ilustrado en la figura 3-15*a*. Se considerará que el eslabón 2, el impulsor, tiene una posición angular conocida θ_2 y una velocidad angular conocida ω_2 en el instante considerado. Lo que se busca es obtener expresiones para la velocidad angular del eslabón 4 y la velocidad absoluta del punto *P*.

Para simplificar la notación en este ejemplo se usará el simbolismo estipulado en la figura 3-15*b* para los vectores de diferencia de posición; por lo tanto, $\mathbf{R}_{AB}$ se denota por $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{R}_{C_2A}$ se denota por $\mathbf{r}_2$, y $\mathbf{R}_{C_4B}$ por $\mathbf{r}_4$. Así pues, en términos de estos símbolos, la ecuación de cierre del circuito es

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4 \tag{a}$$

en donde $\mathbf{r}_1$ tiene magnitud y dirección constantes.†† El vector $\mathbf{r}_2$ tiene magnitud constante y su dirección θ_2 varía; pero es el ángulo de entrada. Se supone que se conoce θ_2 o, más específicamente, que todas las demás incógnitas se resolverán como funciones de θ_2. El vector $\mathbf{r}_4$ tiene magnitud y dirección desconocidas.

Al reconocer que se trata del caso 1 (Sec. 2-8), se obtiene la solución de la posición partiendo de las ecuaciones (2-30) y (2-31).

$$r_4 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta_2} \tag{b}$$

$$\theta_4 = \tan^{-1}\frac{r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_2\cos\theta_2 - r_1} \tag{c}$$

† F. H. Raven, "Velocity and Acceleration Analysis of Plane and Space Mechanisms by Means of Independent- Position Equations", *J. Appl. Mech., ASME Trans*, series E, vol. 80, pp. 1-6, 1958.

†† Nótese en particular que el ángulo de $\mathbf{r}_1$ es $\theta_1 = 180°$ y no cero.

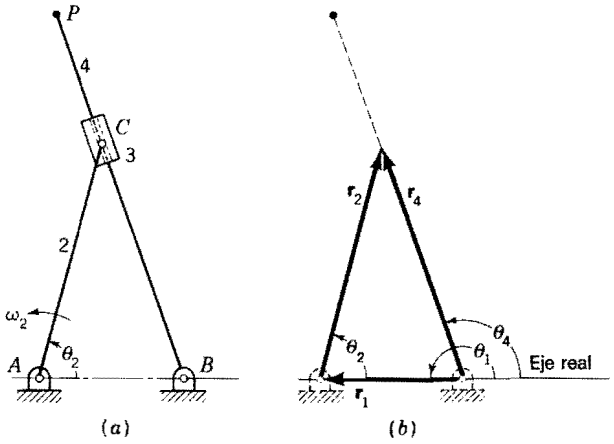


Figura 3-15 Mecanismo invertido de corredera-manivela.

La solución de la velocidad se inicia derivando la ecuación de cierre del circuito (*a*) con respecto al tiempo. Al aplicar la forma general, ecuación (3-14), a cada uno de los términos de esta ecuación sucesivamente y recordando que r_1, θ_1, y r_2 son constantes, se obtiene

$$j\dot{\theta}_2 r_2 e^{j\theta_2} = \dot{r}_4 e^{j\theta_4} + j\dot{\theta}_4 r_4 e^{j\theta_4} \qquad (d)$$

Puesto que $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_4$ son lo mismo que ω_2 y ω_4, respectivamente, y en vista de que se reconoce que

$$\dot{\theta}_2 r_2 = V_{C_2} \qquad \dot{r}_4 = V_{C_2/4} \qquad \dot{\theta}_4 r_4 = V_{C_4}$$

es evidente que la (*d*) es, en efecto, la forma compleja polar de la ecuación de la velocidad aparente

$$\mathbf{V}_{C_2} = \mathbf{V}_{C_4} + \mathbf{V}_{C_2/4}$$

(Esto se señala sólo con fines de comparación y no es un paso necesario en el proceso de resolución.)

La solución de la velocidad se efectúa aplicando la fórmula de Euler para separar la ecuación (*d*) en sus componentes real e imaginaria. Esto da

$$-\omega_2 r_2 \operatorname{sen}\theta_2 = \dot{r}_4 \cos\theta_4 - \omega_4 r_4 \operatorname{sen}\theta_4 \qquad (e)$$

$$\omega_2 r_2 \cos\theta_2 = \dot{r}_4 \operatorname{sen}\theta_4 + \omega_4 r_4 \cos\theta_4 \qquad (f)$$

Cuando estas dos ecuaciones se resuelven simultáneamente para las dos incógnitas $\dot{r}_4$ y ω_4, se obtiene

$$\dot{r}_4 = \omega_2 r_2 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_2) \qquad (3\text{-}15)$$

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{r_2}{r_4} \cos(\theta_4 - \theta_2) \qquad (3\text{-}16)$$

Aunque se pudieran sustituir las variables r_4 y θ_4 por sus expresiones dadas en las ecuaciones (*b*) y (*c*), para reducir estos resultados a funciones de θ_2 y ω_2 únicamente, las formas anteriores se consideran suficientes puesto que al escribir un programa de computadora, normalmente se encuentran primero los valores numéricos de r_4 y θ_4 en el curso del análisis de posición, y estos valores numéricos se pueden emplear entonces para determinar $\dot{r}_4$ y ω_4 en cada fase del ángulo θ_2.

Para encontrar la velocidad del punto P se escribe

$$\mathbf{R}_P = R_{PB}e^{j\theta_4} \tag{g}$$

y se aplica la (3-14) para derivar con respecto al tiempo, recordando que R_{PB} es una longitud constante. Esto conduce a

$$\mathbf{V}_P = j\omega_4 R_{PB}e^{j\theta_4} \tag{h}$$

que, al hacer la sustitución de lo expresado en la (3-16), se convierte en

$$\mathbf{V}_P = j\omega_2 R_{PB}\frac{r_2}{r_4}\cos(\theta_4 - \theta_2)e^{j\theta_4} \tag{3-17}$$

Las componentes horizontal y vertical son

$$V_P^x = -\omega_2 R_{PB}\frac{r_2}{r_4}\cos(\theta_4 - \theta_2)\operatorname{sen}\theta_4 \tag{i}$$

$$V_P^y = \omega_2 R_{PB}\frac{r_2}{r_4}\cos(\theta_4 - \theta_2)\cos\theta_4 \tag{j}$$

Véase el siguiente problema que sirve como otra ilustración del método de Raven.

Ejemplo 3-5 Desarróllese una ecuación para la relación entre las velocidades angulares de las manivelas de entrada y salida de un eslabonamiento de cuatro barras.

SOLUCIÓN Recuérdese la ecuación de cierre del circuito dada en la sección 2-10, ecuación (*n*),

$$R_{BA}e^{j\theta_2} + R_{CB}e^{j\theta_3} = R_{DA} + R_{CD}e^{j\theta_4} \tag{1}$$

Si se toma en cuenta que todas las longitudes permanecen constantes, se aplica la (3-14) para hacer la derivada respecto al tiempo.
Esto da

$$j\dot{\theta}_2 R_{BA}e^{j\theta_2} + j\dot{\theta}_3 R_{CB}e^{j\theta_3} = j\dot{\theta}_4 R_{CD}e^{j\theta_4} \tag{2}$$

Al igualar las partes real e imaginaria, y reordenar los términos, se obtiene

$$\omega_3 R_{CB}\operatorname{sen}\theta_3 - \omega_4 R_{CD}\operatorname{sen}\theta_4 = -\omega_2 R_{BA}\operatorname{sen}\theta_2 \tag{3}$$

$$\omega_3 R_{CB}\cos\theta_3 - \omega_4 R_{CD}\cos\theta_4 = -\omega_2 R_{BA}\cos\theta_2 \tag{4}$$

Por último, se resuelven estas dos ecuaciones simultáneas para ω_3 y ω_4.

$$\omega_3 = \frac{R_{BA}\,\text{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{R_{CB}\,\text{sen}(\theta_4 - \theta_3)}\omega_2 \tag{3-18}$$

$$\omega_4 = \frac{R_{BA}\,\text{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{R_{CD}\,\text{sen}(\theta_4 - \theta_3)}\omega_2 \qquad \textit{Resp.} \tag{3-19}$$

Puesto que se conocen las soluciones para θ_3 y θ_4, partiendo de las ecuaciones (2-59) y (2-58), esta ecuación para ω_4 se puede evaluar numéricamente y se considera una solución completa.

Obsérvese que en los dos problemas anteriores las ecuaciones simultáneas que se resolvieron eran *lineales*. Esta no fue una coincidencia sino de algo que resulta cierto en todas las soluciones relativas a la velocidad; se debe al hecho de que la ecuación general (3-14) es lineal en las variables de velocidad. Cuando se toman las componentes real e imaginaria, los *coeficientes* pueden hacerse complicados; pero las ecuaciones siguen siendo lineales con respecto a las incógnitas de velocidad. Por lo tanto, su solución es directa.

Otro indicio de la linealidad de las relaciones de velocidad es el que se observa al recordar que en las soluciones gráficas para la velocidad de las secciones previas, fue posible elegir un factor escalar arbitrario para un polígono de velocidades. Si se duplica la velocidad de entrada de un mecanismo, el factor escalar del polígono de velocidad se podría duplicar y el mismo polígono seguiría siendo válido. Esta es una característica de las ecuaciones lineales.

También vale la pena hacer notar que tanto la (3-18) como la (3-19) incluyen a sen $(\theta_4 - \theta_3)$ en sus denominadores. En general, cualqnier problema de análisis de la velocidad tendrá denominadores similares en la solución de cada una de las incógnitas de velocidad. Estos denominadores son el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas de las ecuaciones lineales, como se reconocerá al recordar la regla de Cramer. En el caso del eslabonamiento de cuatro barras, se puede observar en la figura 2-13, que $\theta_4 - \theta_3$ es el ángulo de transmisión. Cuando el ángulo de transmisión se hace pequeño, la razón de la velocidad de salida a la de entrada se hace muy grande y se generan dificultades.

3-9 ANÁLISIS DE LA VELOCIDAD MEDIANTE ÁLGEBRA VECTORIAL

Se expuso en la sección 2-9 el método de Chace para el análisis de posición. Aquí se mostrará la manera en que tal planteamiento se aplica al análisis de velocidad de los eslabonamientos. El método se ilustra resolviendo una vez más el mecanismo invertido de corredera y manivela de la figura 3-15.

El procedimiento se inicia escribiendo la ecuación de cierre del circuito

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4 \tag{a}$$

Las relaciones de velocidad se encuentran derivando esta ecuación con respecto al tiempo. La derivada de un término típico se convierte en

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt}(R\hat{\mathbf{R}}) = \dot{R}\hat{\mathbf{R}} + R\dot{\hat{\mathbf{R}}} \qquad (b)$$

Sin embargo, puesto que $\hat{\mathbf{R}}$ tiene longitud constante, y en virtud de que casi siempre gira con uno de los eslabones, $\dot{\hat{\mathbf{R}}}$ se puede expresar como

$$\dot{\hat{\mathbf{R}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{R}} = \omega(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{R}}) \qquad (3\text{-}20)$$

a partir de lo cual la (b) se convierte en

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{R}\hat{\mathbf{R}} + \omega R(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{R}}) \qquad (3\text{-}21)$$

Si se usa esta forma general y se reconoce que las magnitudes r_1 y r_2 y la dirección $\hat{\mathbf{r}}_1$ son constantes, se puede tomar la derivada respecto al tiempo de la ecuación de cierre del circuito (a). Esto da

$$\omega_2 r_2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) = \dot{r}_4\hat{\mathbf{r}}_4 + \omega_4 r_4(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) \qquad (c)$$

Puesto que se supone que se conocerían r_4 y $\hat{\mathbf{r}}_4$ gracias a un análisis de posición previo, obtenido quizá con el método Chace de la sección 2-9, y dado que ω_2 es una velocidad impulsora conocida, las dos únicas incógnitas de esta ecuación son las velocidades $\dot{r}_4$ y ω_4.

En lugar de tomar las componentes de la ecuación (c) en las direcciones horizontal y vertical, lo que conduciría a dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, el método de Chace conduce a la eliminación de una incógnita eligiendo con cuidado las direcciones a lo largo de las cuales se toman las componentes. Por ejemplo, en la (c) se observa que el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_4$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4$ y, por ende,

$$\hat{\mathbf{r}}_4 \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) = 0 \qquad (d)$$

Se aprovecha esta circunstancia para eliminar la incógnita $\dot{r}_4$. Si se toma el producto escalar de cada término de la (c) con $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4$, se obtiene

$$\omega_2 r_2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) = \omega_4 r_4$$

de lo cual se obtiene ω_4

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{r_2}{r_4}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) \qquad (e)$$

Del mismo modo se puede tomar el producto escalar de la (e) con el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_4$ y eliminar así a ω_4. Esto da

$$\dot{r}_4 = \omega_2 r_2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 \qquad (f)$$

Se puede demostrar con gran facilidad que estas soluciones son, de hecho, las mismas que se obtuvieron al aplicar el método de Raven. Partiendo de la (*e*) se puede escribir

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_2 & 0 \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}\theta_2\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta_2\,\hat{\mathbf{j}}$$

y, del mismo modo,

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) = -\operatorname{sen}\theta_4\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta_4\,\hat{\mathbf{j}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) &= (-\operatorname{sen}\theta_2\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta_2\,\hat{\mathbf{j}}) \cdot (-\operatorname{sen}\theta_4\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta_4\,\hat{\mathbf{j}}) \\ &= \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_4 + \cos\theta_2 \cos\theta_4 \\ &= \cos(\theta_4 - \theta_2) \qquad (g)\end{aligned}$$

y, análogamente,

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 = \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_2) \qquad (h)$$

Cuando los términos de las ecuaciones (*g*) y (*h*) se sustituyen en las ecuaciones (*e*) y (*f*), los resultados se parean idénticamente a los que se obtuvieron con el método de Raven, ecuaciones (3-15) y (3-16).

3-10 CENTRO INSTANTÁNEO DE VELOCIDAD

Uno de los conceptos más interesantes de la cinemática es el de un eje instantáneo de velocidad para los cuerpos rígidos que se mueven en relación con otro. En particular, se verá que existe un eje común a ambos cuerpos y en torno al cual puede considerarse que cualquiera de ellos gira con respecto al otro.

Puesto que el estudio que se va a hacer de estos ejes se restringirá a movimientos planos,† cada eje es perpendicular al plano del movimiento. A estos ejes se les asignará el nombre de *centros* o *polos instantáneos.* Estos centros instantáneos se consideran como un par de puntos coincidentes, uno en cada cuerpo, en torno a los cuales uno de estos tiene una rotación aparente en relación con el otro. Esta propiedad es verdadera sólo *instantáneamente* y al siguiente instante surgirá un nuevo par de puntos coincidentes que se convertirán en el centro instantáneo. Por ende, no es correcto mencionar a un centro instantáneo como el centro de rotación, ya que generalmente no se localiza en el centro de curvatura de la trayectoria aparente que genera un punto de un cuerpo con respecto al sistema de coordenadas del otro. Sin embargo, incluso con esta restricción, se encontrará que los centros

† En el caso de movimientos tridimensionales, este eje recibe el nombre de eje de *tornillo instantáneo.* El trabajo clásico que cubre sus propiedades es el que realizara R. S. Ball, *A Treatise on the Theory of Screws,* Cambridge University Press, Cambridge, 1900.

instantáneos contribuyen de manera sustancial a entender la cinemática del movimiento plano.

El centro instantáneo de velocidad se define como la *ubicación instantánea de un par de puntos coincidentes de dos cuerpos rígidos diferentes para los que las velocidades absolutas de los dos puntos son iguales.* También se puede definir como la ubicación de un par de puntos coincidentes de dos cuerpos rígidos diferentes para los que *la velocidad aparente de uno de los puntos es cero tal y como la percibe un observador situado en el otro cuerpo.*

Consideremos un cuerpo rígido, 2, que tiene cierto movimiento general relativo al plano x_1y_1; el movimiento podría ser de traslación, de rotación o una combinación de ambos. Como se ilustra en la figura 3-16*a*, supóngase que el punto A del cuerpo tiene una velocidad conocida $\mathbf{V}_A$ y que el cuerpo posee una velocidad angular conocida $\boldsymbol{\omega}_2$. Cuando se conocen estas dos cantidades, se puede hallar la velocidad de cualquier otro punto del cuerpo, basándose en la ecuación de la diferencia de velocidad. Supóngase que se define un punto P, por ejemplo, cuya diferencia de posición $\mathbf{R}_{PA}$ respecto al punto A se elige como

$$\mathbf{R}_{PA} = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{V}_A}{\omega_2^2} \tag{3-22}$$

Debido al producto vectorial se ve que el punto P está localizado sobre la perpendicular a $\mathbf{V}_A$, y el vector $\mathbf{R}_{PA}$ está girado respecto a la dirección de $\mathbf{V}_A$, en la dirección de $\boldsymbol{\omega}_2$, como se muestra en la figura 3-16*b*. La longitud de $\mathbf{R}_{PA}$ se puede calcular a partir de la ecuación anterior, y se puede localizar el punto P. Se observa que su velocidad es

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{PA} = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_{PA} = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{V}_A}{\omega_2^2}$$

Pero, al reemplazar este triple producto con una identidad vectorial se obtiene

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_A + \frac{(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \cancel{\mathbf{V}_A}^{0})\boldsymbol{\omega}_2 - (\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2)\mathbf{V}_A}{\omega_2^2} = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_A = 0 \tag{a}$$

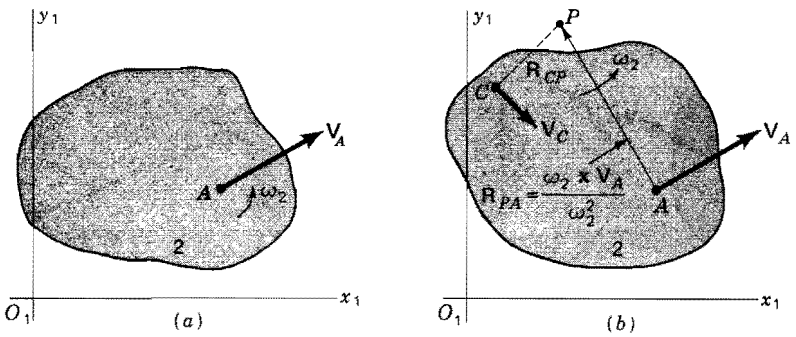


Figura 3-16

Puesto que la velocidad absoluta del punto particular P elegido es cero, lo mismo que la velocidad del punto coincidente del eslabón fijo, este punto P es el centro instantáneo entre los eslabones 1 y 2.

Ahora se puede encontrar la velocidad de cualquier tercer punto C del cuerpo en movimiento,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_P^0 + \mathbf{V}_{CP} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_{CP} \qquad (b)$$

como se ilustra en la figura 3-16*b*.

El centro instantáneo se puede localizar con mayor facilidad cuando se dan las velocidades absolutas de dos puntos. En la figura 3-17*a*, supóngase que los puntos A y C tienen las velocidades conocidas $\mathbf{V}_A$ y $\mathbf{V}_C$. Las perpendiculares a $\mathbf{V}_A$ y $\mathbf{V}_C$ se intersecan en P, que es el centro instantáneo. En la figura 3-17*b* se muestra cómo localizar el centro instantáneo P cuando los puntos A, C y P están sobre la misma línea recta.

En general, el centro instantáneo entre dos cuerpos no es un punto estacionario, sino que su ubicación cambia en relación con ambos cuerpos, conforme se desarrolla el movimiento, y describe una trayectoria o lugar geométrico sobre cada uno de ellos. Estas trayectorias de los centros instantáneos, llamados *centrodas*, se estudiarán en la sección 3-17.

Puesto que se ha adoptado la convención de numerar los eslabones de un mecanismo, es conveniente designar un centro instantáneo utilizando los números de los dos eslabones asociados a él. Así pues, P_{32} identifica el centro instantáneo entre los eslabones 3 y 2. Este mismo centro se podría identificar como P_{23}, ya que el orden de los números carece de importancia. Un mecanismo tiene tantos centros instantáneos como formas existan de parear los números de los eslabones. Por lo tanto, el número de centros instantáneos en un mecanismo de n eslabones es

$$N = \frac{n(n-1)}{2} \qquad (3\text{-}23)$$

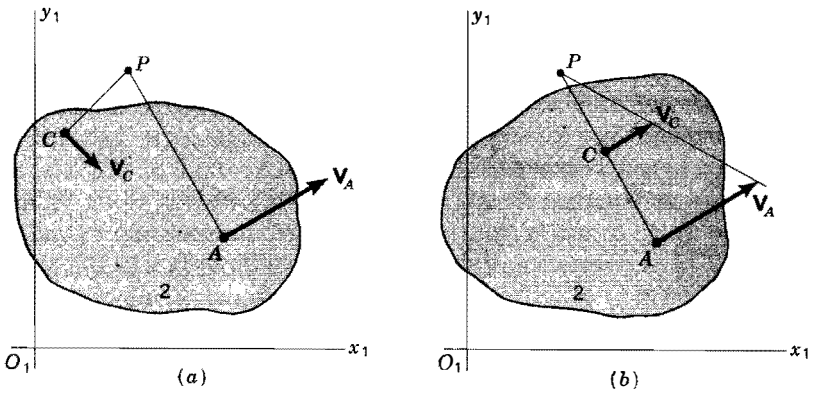


Figura 3-17 Localización de un centro instantáneo partiendo de dos velocidades conocidas.

3-11 TEOREMA DE ARONHOLD-KENNEDY DE LOS TRES CENTROS

Por lo que establece la ecuación (3-23), el número de centros instantáneos en un eslabonamiento de cuatro barras es seis. Como se ve en la figura 3-18*a*, es factible identificar cuatro de ellos por simple observación; se ve que los cuatros pasadores se pueden identificar como los centros instantáneos P_{12}, P_{23}, P_{34} y P_{14}, puesto que cada uno de ellos satisface la definición. Por ejemplo, P_{23}, es un punto del eslabón 2 en torno al cual parece girar el eslabón 3; se trata de un punto del eslabón 3 que carece de velocidad aparente, visto desde el eslabón 2; es un par de puntos coincidentes de los eslabones 2 y 3 que poseen la misma velocidad absoluta.

Un buen método para tener presente cuáles centros instantáneos se han encontrado, consiste en espaciar los números de eslabón en torno al perímetro de un círculo, como se indica en la figura 3-18*b*. A continuación, conforme se identifica cada polo, se traza una recta que conecta el par correspondiente de números de los eslabones. En la figura 3-18*b* se muestra que se han localizado P_{12}, P_{23}, P_{34} y P_{14}; también muestra rectas faltantes, puesto que aún no se encuentra P_{13} y P_{24}. Estos dos centros no se pueden encontrar aplicando visualmente la definición.

Después de encontrar tantos centros instantáneos como sea posible por observación, es decir, localizando los puntos que satisfacen obviamente la definición, los otros se localizan aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy (que con frecuencia sólo se llama teorema de Kennedy †) de los tres centros. Este teorema afirma que *'los tres centros instantáneos compartidos por tres cuerpos rígidos en movimiento relativo uno respecto a los otros (ya sea que estén o no conectados)*, están sobre la misma recta.

Se puede demostrar este teorema por contradicción, como se ilustra en la figura 3-19. El eslabón 1 es un marco estacionario, y el centro instantáneo P_{12} se localiza en donde el eslabón 2 se conecta a él por medio de un pasador o espiga. Del mismo modo, P_{13} está localizado en el pasador que conecta a los eslabones 1 y 3.

† Este teorema lleva el nombre de sus dos descubridores independientes, Aronhold, 1872, y Kennedy, 1886. Se conoce como teorema de Aronhold en los países de habla alemana y como teorema de Kennedy en los de habla inglesa.

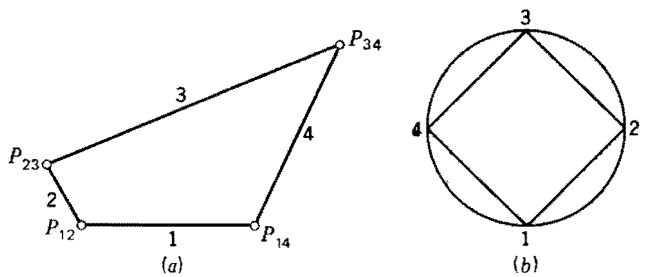


Figura 3-18

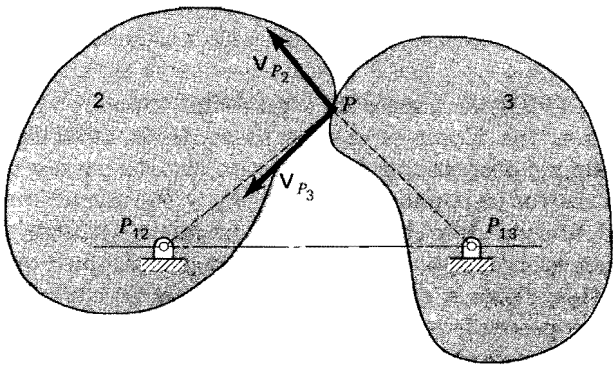


Figura 3-19 Teorema de Aronhold-Kennedy.

Las formas de los eslabones 2 y 3 son arbitrarias. El teorema de Aronhold-Kennedy afirma que los tres centros instantáneos P_{12}, P_{13}, y P_{23} deben estar sobre la misma recta, la que conecta a los dos pasadores. Supóngase que esto no fuera cierto; de hecho, supongamos que P_{23} estuviera localizado en el punto identificado como P en la figura 3-19. En este caso, la velocidad de P, como punto del eslabón 2, tendría la dirección $\mathbf{V}_{P_2}$, perpendicular a $\mathbf{R}_{PP_{12}}$. Pero la velocidad de P, como punto del eslabón 3, tendría la dirección $\mathbf{V}_{P_3}$, perpendicular a $\mathbf{R}_{PP_{13}}$. Las direcciones son coherentes con la definición de que un centro instantáneo debe tener velocidades absolutas iguales como parte de cualquiera de los eslabones. Por lo tanto, el punto P elegido no puede ser el centro instantáneo P_{23}. Se presenta esta misma contradicción en las direcciones de $\mathbf{V}_{P_2}$ y $\mathbf{V}_{P_3}$ para cualquier ubicación seleccionada para el punto P, a menos que se elija sobre la recta que pasa por P_{12} y P_{13}.

3-12 LOCALIZACIÓN DE CENTROS INSTANTÁNEOS DE VELOCIDAD

En las dos últimas secciones se han visto varios medios para localizar centros instantáneos de velocidad. Con frecuencia se pueden localizar por simple observación de la figura de un mecanismo y buscando visualmente un punto que se ajuste a la definición, como por ejemplo, el centro de una articulación de pasador. También, una vez que se encuentran algunos centros instantáneos, se pueden localizar otros a partir de ellos, aplicando el teorema de los tres centros. En la sección 3-10 se demostró que es posible encontrar un centro instantáneo entre un cuerpo en movimiento y el eslabón fijo si se conocen las direcciones de las velocidades absolutas de dos puntos del cuerpo, o si se conocen la velocidad absoluta de un punto y la velocidad angular del cuerpo. El propósito de esta sección es ampliar esta lista de técnicas y presentar ejemplos.

Considérese el sistema de leva y seguidor que aparece en la figura 3-20. Los centros instantáneos P_{12} y P_{13} se pueden localizar, por simple observación, en

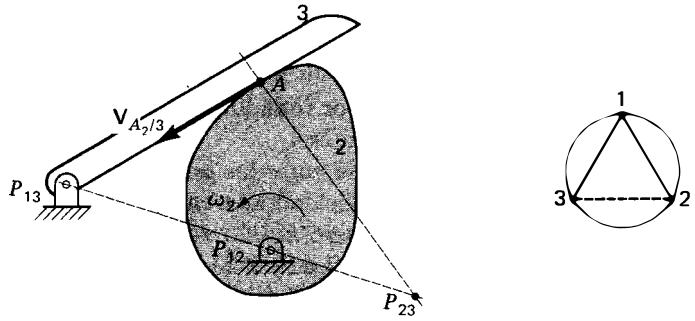


Figura 3-20 Centros instantáneos de una leva de disco con seguidor de cara plana.

los dos centros de los pasadores. No obstante, el centro instantáneo que falta, P_{23}, no es tan obvio. Según el teorema de Aronhold-Kennedy, debe estar sobre la recta que conecta a P_{12} y P_{13}, pero, ¿en dónde? Tras cierta reflexión, se ve que la dirección de la velocidad aparente $\mathbf{V}_{A_2/3}$ debe ser a lo largo de la tangente común a los dos eslabones en movimiento en el punto de contacto y, como la percibe un observador situado en el eslabón 3, esta velocidad debe aparecer como resultado de la rotación aparente del cuerpo 2 en torno al centro instantáneo P_{23}. Por consiguiente, P_{23} debe encontrarse sobre la perpendicular a $\mathbf{V}_{A_2/3}$. Esta recta ubica ahora a P_{23} como se indica. Es importante recordar el concepto ilustrado en este ejemplo, porque con frecuencia es de gran utilidad para localizar los centros instantáneos de mecanismos que comprenden un contacto directo.

Un caso especial de contacto directo, como se vio con anterioridad, es el contacto por rodadura sin deslizamiento. Considerando el mecanismo de la figura 3-21, se localizan inmediatamente los centros instantáneos P_{12}, P_{23} y P_{34}. Si el contacto entre los eslabones 1 y 4 comprende algún deslizamiento, lo único que es factible afirmar es que el centro instantáneo P_{14} está localizado sobre la recta ver-

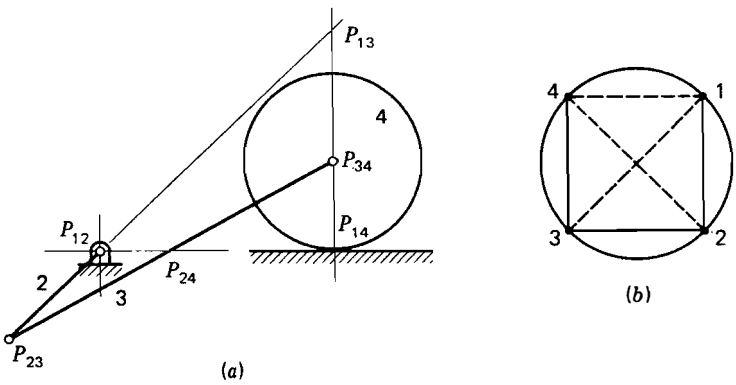


Figura 3-21 Centro instantáneo en un punto de contacto por rodadura.

tical que pasa por el punto de contacto. Sin embargo, si también se sabe que no hay deslizamiento, esto es, *si se tiene contacto por rodadura, el centro instantáneo se localiza en el punto de contacto.* Este es también un principio general, como resulta obvio al comparar la definición del contacto por rodadura, ecuación (3-13), con la de un centro instantáneo; resultan ser equivalentes.

Otro caso especial de contacto directo es evidente entre los eslabones 3 y 4 de la figura 3-22. En estas circunstancias existe una velocidad aparente (deslizamiento) $\mathbf{V}_{A_3/4}$ entre los puntos A de los eslabones 3 y 4; pero *no hay rotación aparente entre los eslabones.* En este caso, al igual que en la figura 3-20, el centro instantáneo P_{34} está a lo largo de una perpendicular común a la recta de deslizamiento conocida; pero ahora está localizado *infinitamente lejos,* en la dirección definida por esta recta perpendicular. Se puede demostrar esta distancia infinita considerando la inversión cinemática del mecanismo, en la que el eslabón 4 se hace estacionario. Al escribir la (3-22) para el mecanismo invertido, se observa que

$$\mathbf{R}_{P_{34}A} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{3/4} \times \mathbf{V}_{A_3/4}}{\omega_{3/4}^2} = \frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}_{3/4} \times \mathbf{V}_{A_3/4}}{\omega_{3/4}} = \infty \qquad (3\text{-}24)$$

La dirección antes mencionada la confirma el numerador de esta ecuación. También se ve que, *puesto que no hay rotación relativa* entre los eslabones 3 y 4, *el denominador es cero y la distancia a* P_{34} *es infinita.* Los otros centros instantáneos de la figura 3-22, se encuentran por observación o aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy. Obsérvese en esta figura cómo se utilizó la recta que pasa por P_{14} y P_{34} (en el infinito) para localizar P_{13}.

Un ejemplo final ilustrará otra vez los principios que se acaban de presentar.

Ejemplo 3-6 Localícense todos los centros instántaneos del mecanismo presentado en la figura 2-23, suponiendo un contacto por rodadura entre los eslabones 1 y 2.

SOLUCIÓN. Los centros instantáneos P_{13}, P_{34} y P_{15} i se localizan por observación. Asimismo, P_{12} está localizado en el punto de contacto por rodadura. Es probable que se ubique la localización de P_{24} gracias al hecho de que es el centro de la rotación aparente entre los eslabones 2 y 4; si no es así, se puede localizar trazando rectas perpendiculares a las direcciones de las velocidades aparentes en los dos vértices del eslabón 4. Una recta para el centro instantáneo P_{25} se obtiene ob-

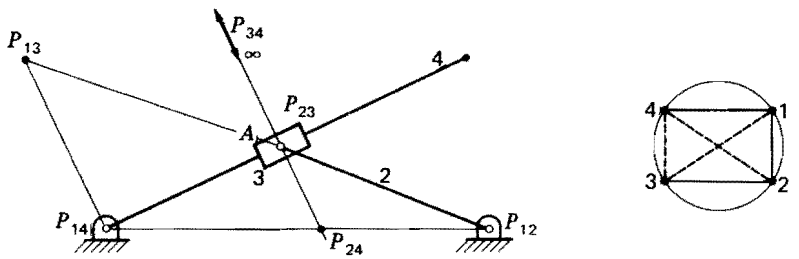


Figura 3-22 Centros instantáneos de un mecanismo invertido de corredera y manivela.

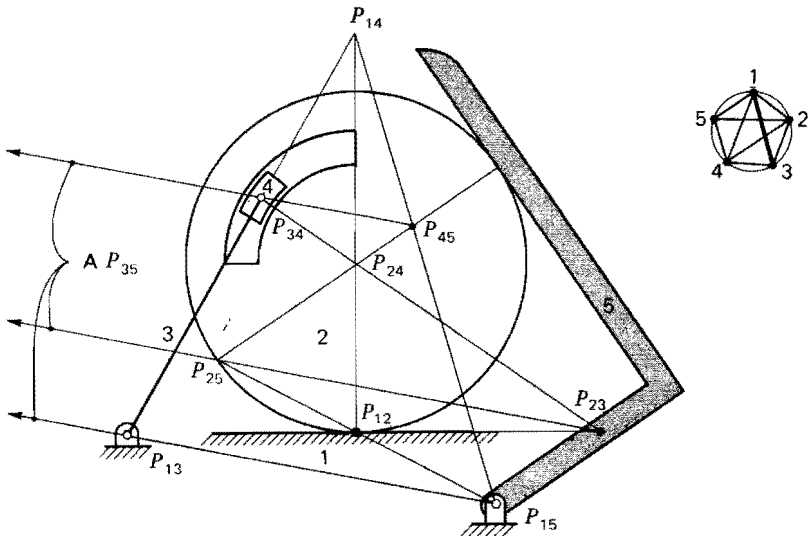


Figura 3-23 Ejemplo 3-6.

servando la dirección de deslizamiento entre los eslabones 2 y 5; la otra proviene de la recta que une a $P_{12}P_{15}$. A partir de estos, se pueden encontrar todos los demás centros instantáneos mediante aplicaciones repetidas del teorema de los tres centros.

Antes de concluir esta sección, es preciso destacar que en todos los ejemplos anteriores se encontraron las ubicaciones de todos los centros instantáneos sin necesidad de especificar la velocidad real de operación del mecanismo. Esta es otra indicación de la linealidad de las ecuaciones que relacionan a las velocidades, como se señaló en la sección 3-8. *Para cualquier mecanismo de un solo grado de libertad, las ubicaciones de todos los centros instantáneos están determinadas de manera única por la geometría únicamente, y no dependen de la velocidad de operación.*

3-13 ANÀLISIS DE LA VELOCIDAD USANDO CENTROS INSTANTÀNEOS

Las propiedades de los centros instantáneos ofrecen también un método gráfico sencillo para el análisis de velocidades de mecanismos con movimiento plano.

Ejemplo 3-7 En la figura 3-24*a* se da por sentado que se conoce la velocidad angular ω_2 de la manivela 2 y se desea encontrar las velocidades de *B*, *D* y *E* en el instante especificado.

SOLUCIÓN Considérese la recta definida por los centros instantáneos P_{12}, P_{14}, y P_{24}. De acuerdo con el teorema de Kennedy-Aronhold, debe tratarse de una recta y se conoce como *línea de los centros*. Según su definición, P_{24} es común tanto al eslabón 2 como al 4, y posee las mismas velocidades absolutas en cada uno de ellos.

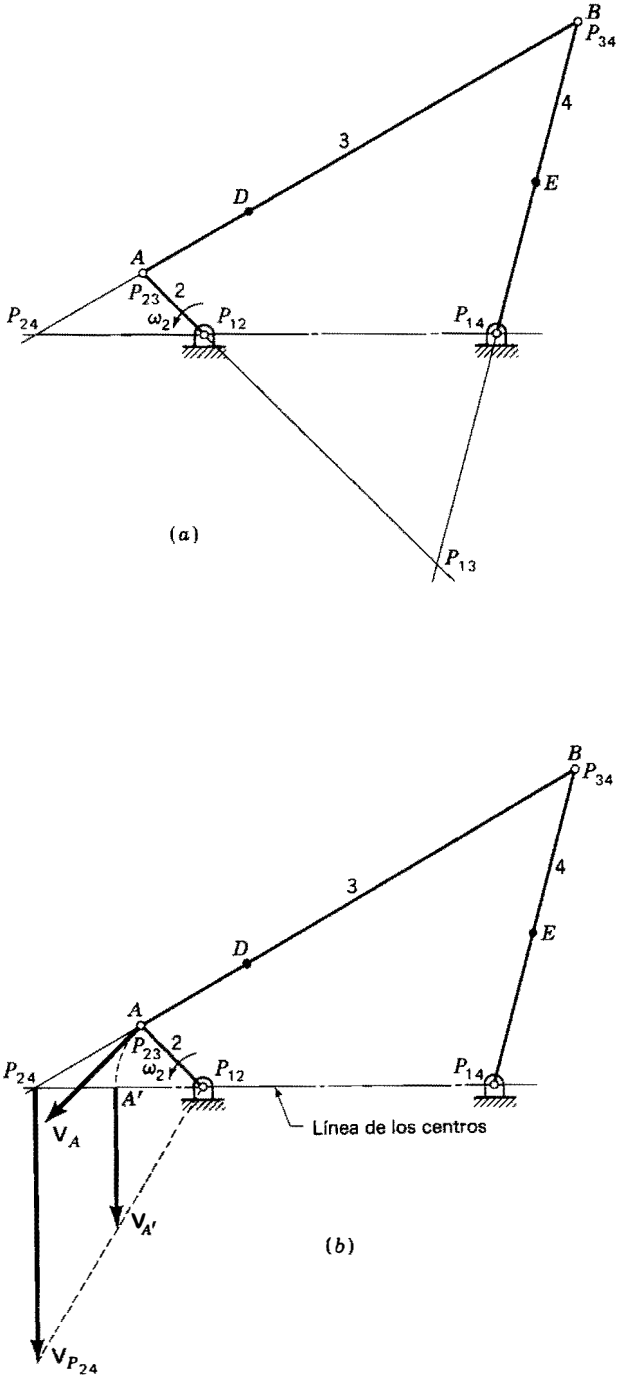
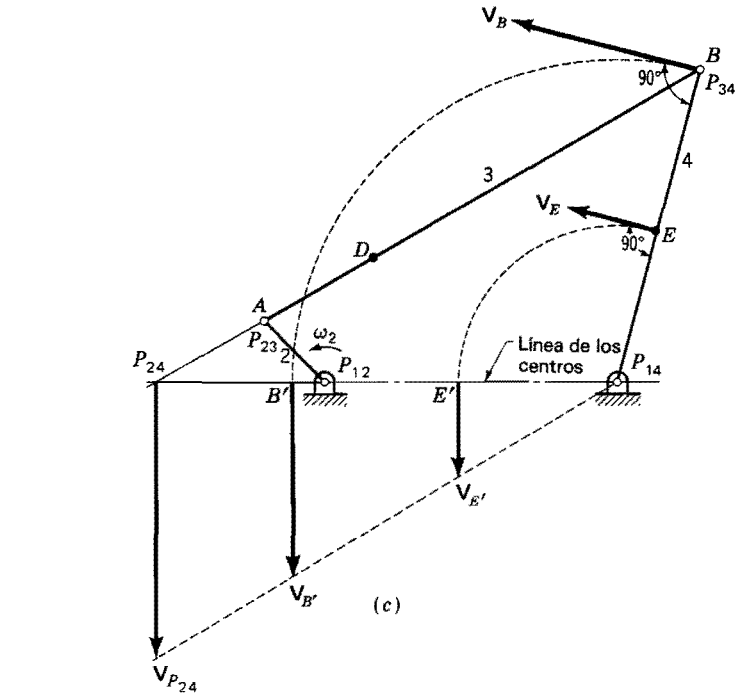


Figura 3-24 Determinación gráfica de la velocidad aplicando el método de los centros instantáneos.



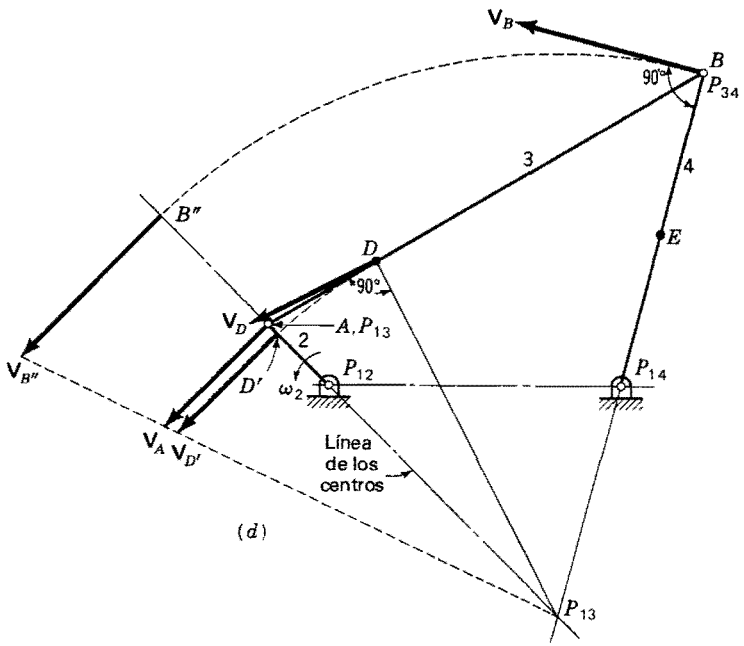


Figura 3-24 (Continuación)

En primer lugar, considérese el centro instantáneo P_{24} como un punto del eslabón 2. Se puede hallar la velocidad $\mathbf{V}_A$ partiendo de ω_2, usando la ecuación de diferencia de velocidades en torno a P_{12}, y es posible encontrar la velocidad de P_{24} partiendo de ella; la construcción gráfica se muestra en la figura 3-24*b*.

Cuando el punto A' del eslabón 2 se localiza sobre la línea de los centros a una distancia igual desde P_{12}, su velocidad absoluta $\mathbf{V}_{A'}$ tiene la misma magnitud que $\mathbf{V}_A$. Ahora bien, se puede hallar † la magnitud de $\mathbf{V}_{P_{24}}$ trazando una recta a partir de P_{12}, que pase por la punta de $\mathbf{V}_{A'}$ como se indica.

A continuación considérese a P_{24} como un punto del eslabón 4 que gira alrededor de P_{14}. Conociendo $\mathbf{V}_{P_{24}}$, se puede encontrar la velocidad de cualquier otro punto del eslabón 4, como por ejemplo B' o E' (Fig. 3-24*c*), aplicando la construcción inversa. Puesto que B' y E' se escogieron de tal modo que tengan los mismos radios que B y E, desde P_{14} sus velocidades poseen magnitudes iguales a las de $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_E$, respectivamente, y éstas se pueden disponer con sus direcciones apropiadas como se muestra en la figura 3-24*c*.

Para obtener $\mathbf{V}_D$ se observa que D está en el eslabón 3; la velocidad conocida ω_2 (o $\mathbf{V}_A$) corresponde al eslabón 2 y el eslabón de referencia es el 1. Por lo tanto, se escoge una nueva línea de los centros $P_{12}P_{13}P_{23}$, como se muestra en la figura 3-24*b*. Si se usa ω_2 y P_{12}, se encuentra la velocidad absoluta del centro instantáneo común P_{23}. En este caso, este paso es trivial en vista de que $\mathbf{V}_{P_{23}} = \mathbf{V}_A$. Al localizar el punto D' sobre la nueva línea de los centros, se encuentra $\mathbf{V}_D$ como se indica, y su magnitud sirve para hallar la velocidad deseada $\mathbf{V}_D$. Se observa que, según la definición, el centro instantáneo P_{13}, como parte del eslabón 3, tiene velocidad cero en este instante. Dado que también se puede considerar B como punto del eslabón 3, su velocidad se calcula en forma similar determinando $\mathbf{V}_{B'}$, como se muestra.

El *método de la línea de los centros* del análisis de velocidad usando centros instantáneos se resume como sigue:

1. Se identifican los tres números de eslabón asociados con la velocidad dada y la que se va a determinar. El eslabón 1 es casi siempre uno de ellos, en vista de que casi siempre se da y se pide información sobre la velocidad absoluta.
2. Se localizan los tres centros instantáneos definidos por los eslabones del paso 1 y se traza la línea de los centros.
3. Se encuentra la velocidad del centro instantáneo común, tratándolo como un punto del eslabón cuya velocidad se da.
4. Una vez que se conoce la velocidad del centro instantáneo común, se le considera como un punto del eslabón cuya velocidad se va a determinar. Ahora es factible encontrar la velocidad de cualquier punto en ese eslabón.

Otro ejemplo ilustrará el procedimiento y mostrará cómo tratar los centros instantáneos ubicados en el infinito.

Ejemplo 3-8 En el caso del dispositivo que aparece en la figura 3-25, sólo se pueden ver algunos de los eslabones y los otros quedan dentro de una cubierta; pero se sabe que el centro instantáneo P_{25} tiene la ubicación indicada. Encuéntrese la velocidad angular de la manivela, ω_2, que se necesita para producir una velocidad $\mathbf{V}_C$ de 10 m/s hacia la derecha.

SOLUCIÓN Puesto que se da $\mathbf{V}_{C_5/1}$ y se desea $\omega_{2/1}$, es necesario usar los centros instantáneos P_{15}, P_{12}, y P_{25}. Después de localizar P_{25}, P_{56}, y P_{16} por simple observación y aplicar el teorema de los

† Nótese que $\mathbf{V}_{P_{24}}$ se pudo haber encontrado directamente, partiendo de su diferencia de velocidad en relación con P_{12}. Se usó esta construcción para ilustrar el principio del método gráfico.

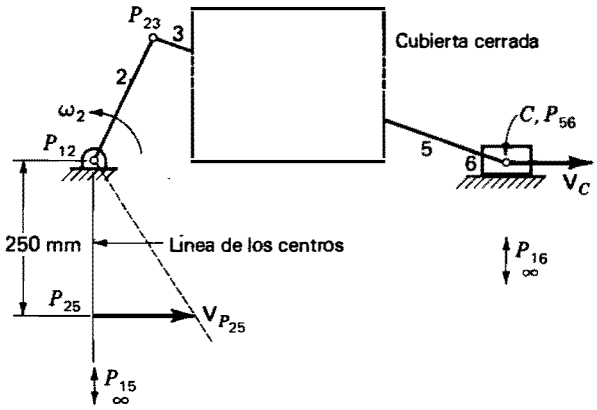


Figura 3-25 Ejemplo 3-8.

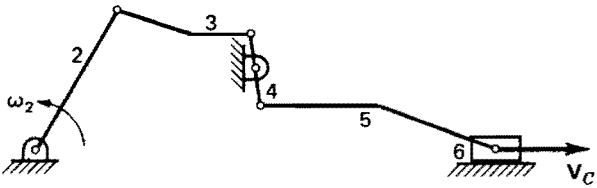


Figura 3-26

tres centros, se localiza P_{15} en el infinito, como se muestra. Ahora se traza la línea de los centros $P_{12}P_{25}P_{15}$.

Si se considera a P_{25} como parte del eslabón 5, se buscará determinar su velocidad a partir de la dada $\mathbf{V}_C$. Se tiene cierta dificultad para localizar un punto C' de la línea de los centros con el mismo radio que C desde P_{15}, porque P_{15} está en el infinito. ¿Cómo se procede, entonces?

Si se recuerda lo expuesto en la sección 3-12 y en la ecuación (3-24), se ve que, puesto que P_{15} está en el infinito, el movimiento relativo entre los eslabones 5 y 1 es una traslación y $\omega_{5/1} = 0$. Dado que esto es cierto, *todos* los puntos del eslabón 5 tienen la misma velocidad absoluta, incluyendo $\mathbf{V}_{P_{25}} = \mathbf{V}_C$. De donde, se traza $\mathbf{V}_{P_{25}}$ en la figura.

A continuación, P_{25} se trata como un punto del eslabón 2, girando en torno a P_{12}, y se resuelve para ω_2,

$$\omega_2 = \frac{V_{P_{25}}}{R_{P_{25}P_{12}}} = \frac{10 \text{ m/s}}{0.25 \text{ m}} = 40 \text{ rad/s cmr} \qquad \textit{Resp.}$$

Al observar la paradoja aparente entre las direcciones de $\mathbf{V}_C$ y ω_2, se puede especular sobre la validez de la solución. No obstante, esto se resolvería abriendo la cubierta cerrada y observando el eslabonamiento que aparece en la figura 3-26.

3-14 TEOREMA DE LA RAZÓN DE VELOCIDADES ANGULARES

En la figura 3-27, P_{24} es el centro instantáneo común a los eslabones 2 y 4. Su velocidad absoluta $\mathbf{V}_{P_{24}}$ es la misma ya sea que P_{24} se considere como un punto del

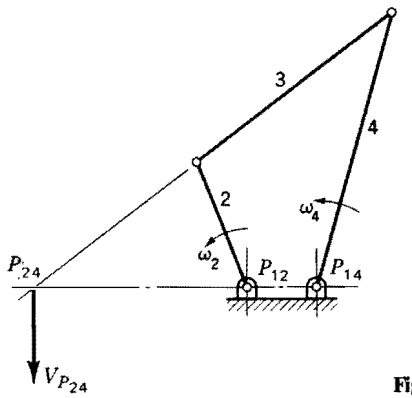


Figura 3-27 Teorema de la razón de las velocidades angulares.

eslabón 2, o bien, del 4. Considerándolo de cada manera, se puede escribir

$$\mathbf{V}_{P_{24}} = \mathbf{V}^{0}_{P_{12}} + \boldsymbol{\omega}_{2/1} \times \mathbf{R}_{P_{24}P_{12}} = \mathbf{V}^{0}_{P_{14}} + \boldsymbol{\omega}_{4/1} \times \mathbf{R}_{P_{24}P_{14}} \qquad (a)$$

en donde $\boldsymbol{\omega}_{2/1}$ y $\boldsymbol{\omega}_{4/1}$ son iguales a $\boldsymbol{\omega}_2$ y $\boldsymbol{\omega}_4$, respectivamente; pero se ha escrito el subíndice adicional para enfatizar en la presencia del tercer eslabón (el marco).

Considerando sólo las magnitudes, la (*a*) se puede reordenar para quedar

$$\frac{\omega_{4/1}}{\omega_{2/1}} = \frac{R_{P_{24}P_{12}}}{R_{P_{24}P_{14}}} \qquad (b)$$

Este sistema ilustra el *teorema de la razón de velocidades angulares*. El teorema afirma que la *razón de las velocidades angulares de dos cuerpos cualesquiera en movimiento plano, en relación con un tercer cuerpo, es inversamente proporcional a los segmentos en los que el centro instantáneo común corta la línea de los centros.* Escrito en notación general, para el movimiento de los cuerpos j y k, en relación con el cuerpo i, la ecuación es

$$\frac{\omega_{k/i}}{\omega_{j/i}} = \frac{R_{P_{jk}P_{ij}}}{R_{P_{jk}P_{ik}}} \qquad (3\text{-}25)$$

Si se escoge una dirección positiva arbitraria, a lo largo de la línea de los centros, el lector debe probar por sí mismo que la razón de velocidades angulares es positiva cuando el centro instantáneo común queda fuera de los otros dos centros, y negativa cuando queda entre ellos.

3-15 TEOREMA DE FREUDENSTEIN

En el análisis y el diseño de eslabonamientos, con frecuencia resulta importante conocer las fases del eslabonamiento en las que se presentan los valores extremos de la velocidad de salida, o bien, expresado de un modo más preciso, las fases en las que la razón de las velocidades de salida y entrada alcanza sus valores extremos.

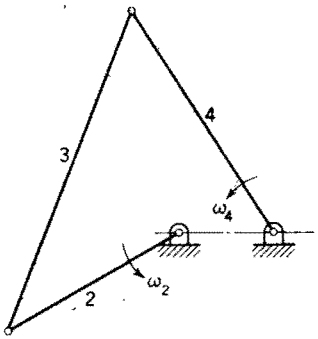


Figura 3-28 Mecanismo de eslabón de arrastre.

Parece ser que el trabajo inicial para determinar los valores extremos fue el que realizara Krause,† quien afirmó que la razón de velocidades ω_4/ω_2 del mecanismo de eslabón de arrastre (Fig. 3-28) alcanza un valor extremo cuando la biela y el seguidor, eslabones 3 y 4, quedan perpendiculares entre sí. Sin embargo, Rosenauer, ha demostrado que esto no es estrictamente cierto‡ Siguiendo a Krause, Freudenstein desarrolló un método gráfico simple para determinar las fases del eslabonamiento de cuatro barras en las que se presentan los valores extremos de la velocidad.§

† R. Krause, "Die Doppelkurbel und Ihre Geschwindigkeitsgrenzen" *Maschinenbau/Gretiebetechnik,* vol. 18, pp. 37-41, 1939; Zur Synthese der Doppelkurber, *Maschinenbau/Gretiebetechnik,* vol. 18, pp. 93-94, 1939.

‡ N. Rosenauer, "Synthesis of Drag-Link Mechanisms for Producing Nonuniform Rotational Motion with Prescribed Reduction Ratio Limits, *Aust. J. Appl. Sci.,* vol. 8, pp. 1-6, 1957.

§ F. Freudenstein, "On the Maximum and Minimum Velocities and Accelerations in Four-Link Mechanisms," *Trans. ASME,* vol. 78, pp. 779-787, 1956.

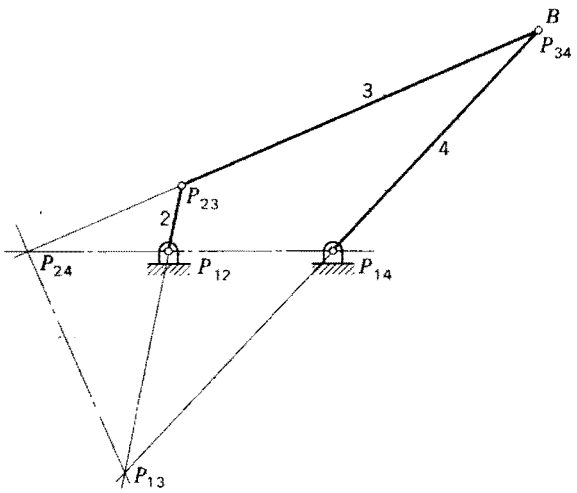


Figura 3-29 Eje de colineación.

El teorema de Freudenstein utiliza la recta que conecta a los centros instantáneos P_{24} y P_{13} (Fig. 3-29), denominada *eje de colineación.* El teorema expresa que *en un extremo de la razón de la velocidad angular de salida a la de entrada de un eslabonamiento de cuatro barras, el eje de colineación es perpendicular al eslabón acoplador.*§

Al aplicar el teorema de la razón de las velocidades angulares, ecuación (3-25), se escribe

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{R_{P_{24}P_{12}}}{R_{P_{24}P_{12}} + R_{P_{12}P_{14}}}$$

Puesto que $R_{P_{12}P_{14}}$ es la longitud fija del eslabón de marco o referencia, los extremos de la razón de velocidades ocurren cuando $R_{P_{24}P_{12}}$ es un máximo, o bien, un mínimo. Estas posiciones pueden producirse en cualquiera de los dos o en ambos lados de P_{12}. Por ende, el problema se reduce a encontrar la geometría del eslabonamiento para la que $R_{P_{24}P_{12}}$ es un extremo.

Durante el movimiento del eslabonamiento, P_{24} se desplaza en la dirección de la recta $P_{12}P_{14}$, según el teorema de los tres centros; pero en un valor extremo de la razón de velocidades, P_{24} debe estar instantáneamente en reposo (su dirección de recorrido sobre esta recta debe estar invirtiéndose). Esto ocurre cuando la velocidad de P_{24}, considerado como un punto del eslabón 3, queda dirigida a lo largo del eslabón acoplador. Esto será cierto sólo cuando el eslabón acoplador sea perpendicular al eje de colineación, puesto que P_{13} es el centro instantáneo del eslabón 3.

Una inversión del teorema (considerando al eslabón 2 como fijo) afirma que *un valor extremo de la razón de velocidades* ω_3/ω_2 *de un eslabonamiento de cuatro barras ocurre cuando el eje de colineación es perpendicular al seguidor (eslabón 4).*

3-16 ÍNDICES DE MÉRITO; VENTAJA MECÁNICA

En esta sección se estudiarán algunas de las razones, ángulos y otros parámetros de los mecanismos que indican si un mecanismo en particular es eficiente o deficiente. Muchos autores han definido este tipo de parámetros en el curso de los años y no han podido llegar a un acuerdo respecto un solo "índice de mérito" para todos los mecanismos. No obstante, todos los que se han empleado poseen varias características en común, incluyendo el hecho de que la mayor parte de ellos pueden relacionarse con las razones de velocidades del mecanismo y, por ende, pueden determinarse exclusivamente por la geometría del mismo. Además, la mayor parte dependen de cierto conocimiento de la aplicación del mecanismo, sobre todo de cuáles son los eslabones de entrada y salida. Con frecuencia resulta conveniente en el análisis o la síntesis del mecanismo, construir la gráfica de tales índices de mérito

§ A. S. Hall, Jr. contribuyó con una demostración rigurosa de este teorema, en un apéndice a la ponencia de Freudenstein.

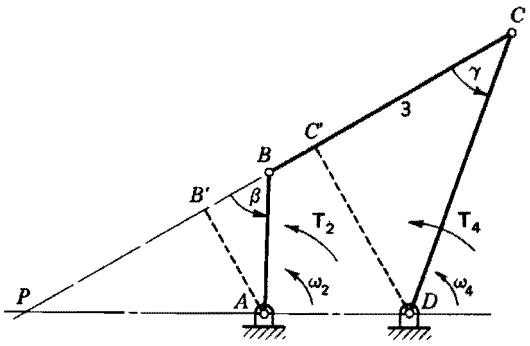


Figura 3-30 Eslabonamiento de cuatro barras.

para una revolución de la manivela de entrada, y observar en particular sus valores mínimo y máximo, al evaluar el diseño del mecanismo o su adaptabilidad a una aplicación en especial.

En la sección 3-14 se explicó que la razón de la velocidad angular del eslabón de salida al de entrada de un mecanismo es inversamente proporcional a los segmentos en los que el centro instantáneo común corta la línea de los centros. Por consiguiente, en el eslabonamiento de cuatro barras de la figura 3-30, si los eslabones 2 y 4 son los de entrada y salida, respectivamente, entonces

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{R_{PA}}{R_{PD}}$$

es la ecuación para la razón de la velocidad de salida a la de entrada. En la sección 3-15 se explicó también que los extremos de esta razón ocurren cuando el eje de colineación es perpendicular al acoplador, el eslabón 3.

Si ahora se supone que el eslabonamiento de la figura 3-30 carece de fuerzas de fricción o de inercia durante su funcionamiento, o que estas son despreciables en comparación con el momento de torsión de entrada T_2, aplicado al eslabón 2, y el momento de torsión de salida T_4, el momento de carga resistiva sobre el eslabón 4, entonces se puede obtener una relación entre T_2 y T_4. Puesto que las fuerzas de fricción e inercia son despreciables, la potencia de entrada aplicada al eslabón 2 es la negativa de la potencia aplicada al eslabón 4 por acción de la carga; por lo tanto,

$$T_2\omega_2 = -T_4\omega_4 \qquad (a)$$

o bien,

$$\frac{T_4}{T_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_4} = -\frac{R_{PD}}{R_{PA}} \qquad (3\text{-}26)$$

La *ventaja mecánica* de un mecanismo es la razón instantánea de la fuerza (momento de torsión) de salida a la fuerza (momento de torsión) de entrada. En este caso se observa que la ventaja mecánica es el recíproco negativo de la razón de velocidades. Cualquiera de las dos se puede utilizar como índice de mérito al juzgar la capacidad de un mecanismo para transmitir fuerza o potencia.

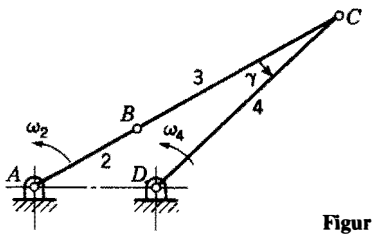


Figura 3-31 Eslabonamiento de cuatro barras en posición de volquete.

En la figura 3-31 se ha vuelto a trazar el esquema del mecanismo en la posición en la que los eslabones 2 y 3 se encuentran sobre la misma recta. En esta posición, R_{PA} y ω_4 están pasando por cero; por ende, se obtiene un valor extremo de la ventaja mecánica (infinito). Cuando un mecanismo se encuentra en esta fase se dice que está *en volquete.* A menudo se emplean estas posiciones en volquete para producir una gran ventaja mecánica; un ejemplo se tiene en el mecanismo de sujeción de la figura 2-6.

Continuando, se trazan $B'A$ y $C'D$ perpendiculares a la recta PBC de la figura 3-30. Sean también β y γ los ángulos agudos formados por el acoplador, o su extensión, y los ángulos de salida y entrada, respectivamente. Así pues, por triángulos semejantes,

$$\frac{R_{PD}}{R_{PA}} = \frac{R_{C'D}}{R_{B'A}} = \frac{R_{CD}\,\text{sen}\,\gamma}{R_{BA}\,\text{sen}\,\beta} \qquad (b)$$

Luego, aplicando la (3-26) se ve que otra expresión para la ventaja mecánica es†

$$\frac{T_4}{T_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_4} = -\frac{R_{CD}\,\text{sen}\,\gamma}{R_{BA}\,\text{sen}\,\beta} \qquad (3\text{-}27)$$

La (3-27) muestra que la ventaja mecánica es infinita siempre que el ángulo β sea 0 ó 180°, es decir, siempre que el mecanismo esté en la posición de volquete.

En la sección 1-9 se definió el ángulo γ comprendido entre el acoplados y el eslabón seguidor como el ángulo *de transmisión.* Este ángulo se utiliza también con frecuencia como índice de mérito para un eslabonamiento de cuatro barras. La ecuación (3-27) muestra que la ventaja mecánica disminuye cuando el ángulo de transmisión es mucho menor que un ángulo recto. Si el ángulo de transmisión se reduce en exceso, la ventaja mecánica se empequeñece e incluso una cantidad muy pequeña de fricción hará que el mecanismo se trabe. Para evitar lo anterior, una regla empírica común es que no se debe usar un eslabonamiento de cuatro barras en una región en la que el ángulo de transmisión sea menor que, por ejemplo 45 ó 50°. El mejor eslabonamiento de cuatro barras, con base en la calidad de su fuerza de transmisión, tendrá un ángulo de transmisión con desviación mínima de 90°.

En otros mecanismos, por ejemplo, dientes de engranes acoplados o sistemas de leva y seguidor, se usa el *ángulo de presión* como índice de mérito. El án-

† Compárese este resultado con la ecuación (3-19).

gulo de presión se define como el ángulo agudo comprendido entre la dirección de la fuerza de salida y la dirección de la velocidad del punto en el que se aplica la fuerza de salida. Los ángulos de presión se estudiarán con mayor minuciosidad en los capítulos 6 y 7. En el eslabonamiento de cuatro barras, el ángulo de presión es el complemento del de transmisión.

Otro índice de mérito que se ha propuesto‡ es el determinante de los coeficientes de las ecuaciones simultáneas que relacionan a las velocidades dependientes de un mecanismo. Así, en el ejemplo 3-5 se vio que las velocidades dependientes de un eslabonamiento de cuatro barras están relacionadas por medio de las ecuaciones

$$R_{CB} \operatorname{sen} \theta_3 \omega_3 - R_{CD} \operatorname{sen} \theta_4 \omega_4 = -R_{BA} \operatorname{sen} \theta_2 \omega_2$$

$$R_{CB} \cos \theta_3 \omega_3 - R_{CD} \cos \theta_4 \omega_4 = -R_{BA} \cos \theta_2 \omega_2$$

El determinante de los coeficientes es

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{CB} \operatorname{sen} \theta_3 & -R_{CD} \operatorname{sen} \theta_4 \\ R_{CB} \cos \theta_3 & -R_{CD} \cos \theta_4 \end{vmatrix} = R_{CB} R_{CD} \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)$$

Como lo indica de manera obvia la regla de Cramer, las soluciones para las velocidades dependientes, en este caso, ω_3 y ω_4, deben incluir este determinante en el denominador. Esto se justifica en la solución del eslabonamiento de cuatro barras, ecuaciones (3-18) y (3-19). Aunque la forma de este determinante cambia para diferentes mecanismos, siempre se puede definir uno de este tipo y siempre aparece en los denominadores de todas las soluciones de velocidades dependientes.

Cuando este determinante se hace pequeño, la ventaja mecánica se reduce también y la utilidad del mecanismo se reduce en tales regiones. Todavía no se ha visto, pero también es verdad que este mismo determinante aparece del mismo modo en el denominador de las aceleraciones dependientes y todas las demás cantidades que requieren que se tomen derivadas de la ecuación de cierre del circuito. Si este determinante es pequeño el mecanismo funcionará con deficiencia en todos los aspectos —fuerza de transmisión, transformación del movimiento, sensibilidad a errores de fabricación, etc.

3-17 CENTRODAS

En la sección 3-10 se hizo notar que la ubicación del centro instantáneo de velocidad estaba definido sólo instantáneamente, y que cambiaría conforme el mecanismo se moviera. Si se encuentran las ubicaciones de los centros instantáneos para todas las fases posibles del mecanismo, se verá que describen curvas o lugares

‡J. Denavit y otros, "Velocity, Acceleration, and Static Force Analysis of Spatial Linkages," *J. Appl. Mech., ASME Trans.*, vol. 87, series E, no. 4, pp. 903-910, 1965.

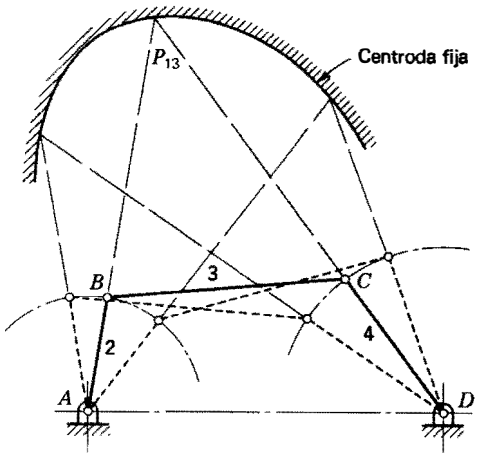


Figura 3-32 Centroda fija.

geométricos, denominados *centrodas.*† En la figura 3-32, el centro instantáneo P_{13} se localiza en la intersección de las extensiones de los eslabones 2 y 4. Conforme el eslabonamiento se mueve pasando por todas las posiciones posibles, P_{13} describe la curva conocida con el nombre de *centroda fija* sobre el eslabón 1.

En la figura 3-33 se ilustra la inversión del mismo eslabonamiento en el que el eslabón 3 está fijo y el 1 es movible. Cuando esta inversión se mueve pasando por todas las posiciones posibles, P_{13} describe una curva *diferente* sobre el eslabón 3. Para el eslabonamiento original, en el que el eslabón 1 está fijo, ésta es

† Las opiniones parecen estar igualmente divididas sobre si estos lugares geométricos se deben denominar *centrodas* o *polodas.* En general, los que prefieren usar el nombre *centro instantáneo* los llaman centrodas y los que usan el vocablo *polo* los denominan *polodas;* aunque también se ha aplicado el nombre de *ruletas.* Los equivalentes tridimensionales son superficies regladas que se conocen como *axodas.*

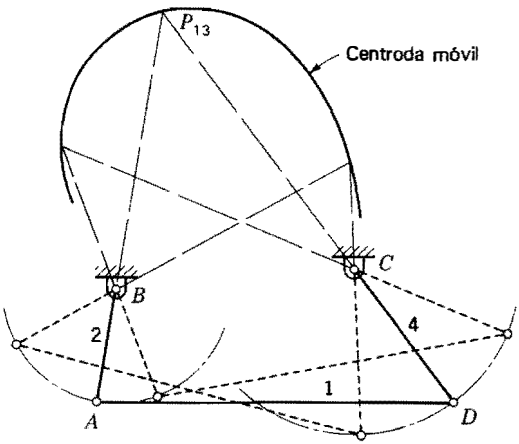


Figura 3-33 Centroda móvil.

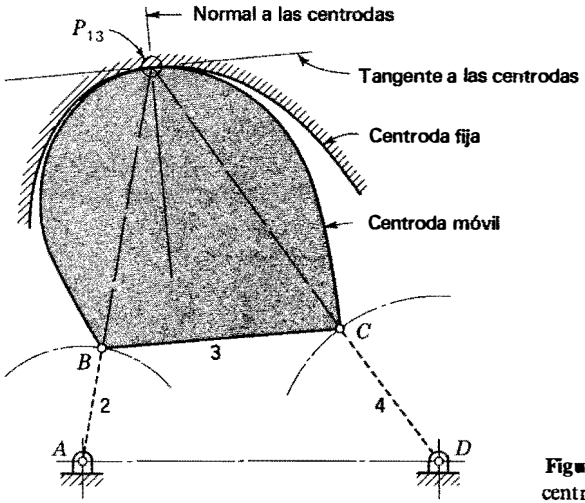


Figura 3-34 Contacto por rodadura entre centrodas.

la curva trazada por P_{13} sobre el sistema de coordenadas del **eslabón móvil 3**; y se denomina *centroda móvil.*

En la figura 3-34 se presenta la centroda móvil, unida al **eslabón 3**, y la centroda fija unida al eslabón 1. Aquí se imagina que los eslabones 1 y 3 se han maquinado para adquirir las formas reales de las centrodas respectivas, y que los eslabones 2 y 4 se han eliminado por completo. Si ahora se deja que la centroda móvil ruede sobre la centroda fija sin resbalar, el eslabón 3 tendrá exactamente el mismo movimiento que poseía en el eslabonamiento original. Esta notable propiedad que se origina en el hecho de que un punto de contacto por rodadura es un centro instantáneo, resulta de gran utilidad en la síntesis de los eslabonamientos.

Esta propiedad se puede reenunciar como sigue: *El movimiento plano de un cuerpo rígido en relación con otro es completamente equivalente al movimiento por rodadura de una centroda sobre la otra.* El punto instantáneo de contacto por rodadura es el centro instantáneo, como se muestra en la figura 3-34. También se muestran la tangente común a las dos centrodas y la normal común, llamada *tangente a las centrodas,* y *normal a las centrodas*; se usan a menudo como los ejes de un sistema de coordenadas para desarrollar ecuaciones para una curva del acoplador u otras propiedades del movimiento.

Las centrodas de la figura 3-34 fueron generadas por el centro instantáneo P_{13} sobre los eslabones 1 y 3. Otro conjunto de centrodas, ambas móviles, es el que se genera sobre los eslabones 2 y 4 cuando se considera el centro instantáneo P_{24}. En la figura 3-35 se ilustran estas últimas como dos elipses, para el caso de un eslabonamiento cruzado de doble manivela, en el que éstas son iguales. Estas dos centrodas ruedan una sobre la otra y describen el movimiento idéntico entre los eslabones 3 y 4 que resultaría de la operación del eslabonamiento de cuatro barras original. Se puede usar esta construcción como base para el desarrollo de un par de engranes elípticos.

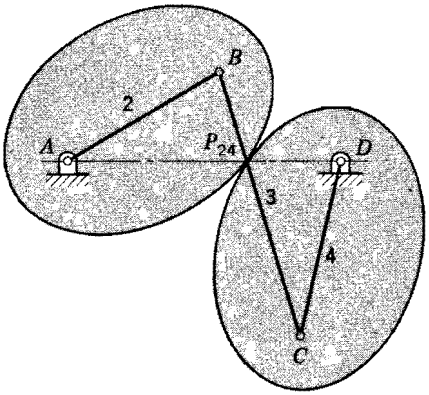


Figura 3-35

PROBLEMAS†

3-1 El vector de posición de un punto está dado por la ecuación $\mathbf{R} = 100e^{j\pi t}$, en donde R se da en pulgadas. Encuéntrese la velocidad del punto cuando $t = 0.40$ s.

3-2 La ecuación $\mathbf{R} = (t^2 + 4)e^{-j\pi t/10}$ define la trayectoria de una partícula. Si R se da en metros, determínese la velocidad de la partícula en $t = 20$ s.

3-3 Si el automóvil A se desplaza hacia el sur a 55 millas/h y el automóvil B a 40 millas con una dirección que forma un ángulo de 60° con la norte, hacia al este, ¿cuál es la diferencia de velocidad entre B y A? ¿Cuál es la velocidad aparente de B para el conductor del A?

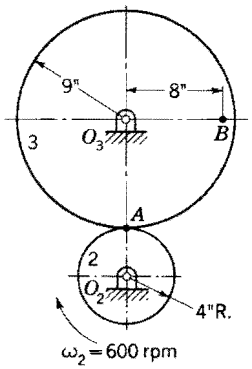
3-4 En la figura, la rueda 2 gira a 600 rpm e impulsa a la rueda 3 sin resbalar. Encuéntrese la diferencia de velocidad entre los puntos B y A.

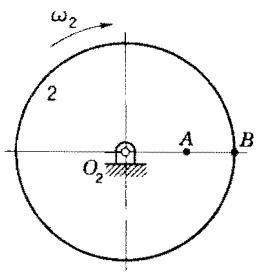
3-5 Dos puntos, A y B, localizados a lo largo del radio de una rueda (véase la figura), tienen una magnitud de la velocidad de 80 y 140 m/h, respectivamente. La distancia entre los puntos es $R_{BA} = 300$ mm.

a) ¿Cuál es el diámetro de la rueda?

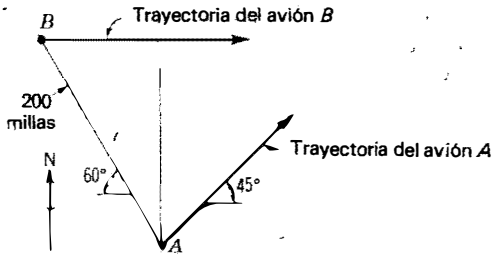
b) Encuéntrese $\mathbf{V}_{AB}$, $\mathbf{V}_{BA}$ y la velocidad angular de la rueda.

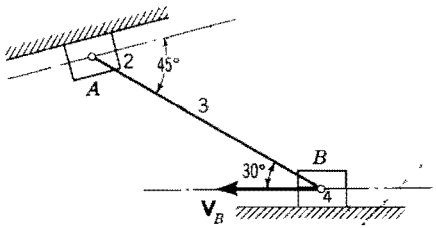
† Al asignar los problemas, quizá el maestro desee especificar el método de resolución que debe utilizarse, en vista de la variedad de planteamientos presentados en el texto.



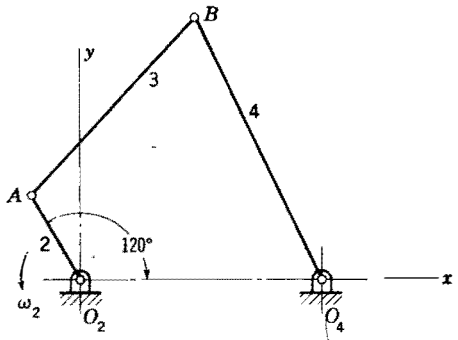


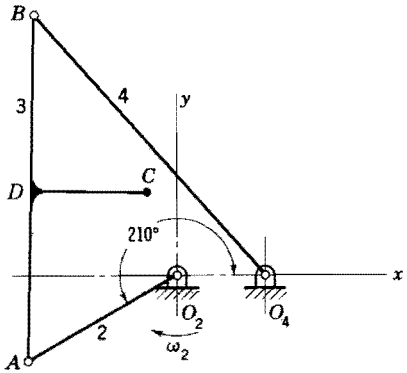
Problemas 3-4 y 3-5





Problemas 3-6 y 3-8 $R_{AB} = 400$ mm.





Problema 3-9 $R_{A\bullet_2} = 4$ pulg, $R_{BA} = 10$ pulg, $R_{\bullet_4 O_2} = 10$ pulg, $R_{B\bullet_4} = 12$ pulg.
Problema 3-10 $R_{A\bullet_2} = 150$ mm, $R_{BA} = 300$ mm, $R_{O_4O_2} = 75$ mm, $R_{B\bullet_4} = 300$ mm, $R_{DA} = 150$ mm, $R_{CD} = 100$ mm.

3-6 Un avión sale del punto B y vuela hacia el este a 350 millas/h. Simultáneamente, en el punto A, a 200 millas al sureste (véase la figura), otro avión despega y vuela al noreste a 390 millas/h.

a) ¿A qué distancia se acercarán los aviones uno del otro si vuelan a la misma altitud?

b) Si ambos despegan a las 6:00 p.m., ¿a qué hora ocurrirá esto?

3-7 A los datos del problema 3-6, agréguese un viento de 30 millas/h proveniente del oeste.

a) Si A vuela con el mismo rumbo, ¿cuál es su nueva trayectoria?

b) ¿Qué cambio produce el viento en los resultados del problema 3-6?

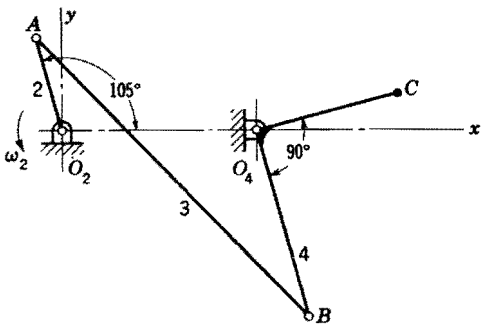
3-8 La velocidad del punto B del eslabonamiento ilustrado en la figura es de 40 m/s. Determínese la velocidad del punto A y la velocidad angular del eslabón 3.

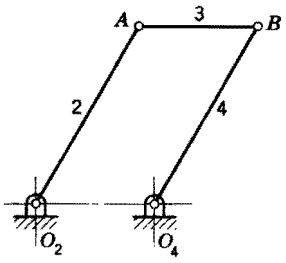
3-9 El mecanismo que aparece en la figura es impulsado por el eslabón 2 a $\omega_2 = 45$ rad/s cmr. Encuéntrense las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4.

3-10 La manivela 2 del mecanismo de eslabón de empuje ilustrado en la figura correspondiente, es impulsado a $\omega_2 = 60$ rad/s mmr. Determínense las velocidades de los puntos B y C y las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4.

3-11 Calcúlese la velocidad del punto C sobre el eslabón 4 del mecanismo que se muestra en la figura, si la manivela 2 es impulsada a $\omega_2 = 48$ rad/s ccr. ¿Cuál es la velocidad angular del eslabón 3?

3-12 La figura muestra un eslabonamiento de barras paralelas en el que los eslabones opuestos tienen longitudes iguales. Para este eslabonamiento, demuéstrese que ω_3 es siempre cero y que $\omega_4 = \omega_2$. ¿Cómo describiría el movimiento del eslabón 4 en relación con el 2?

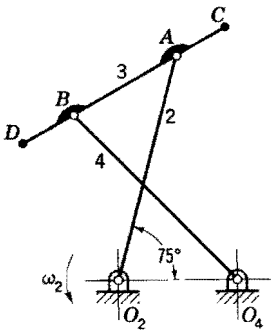


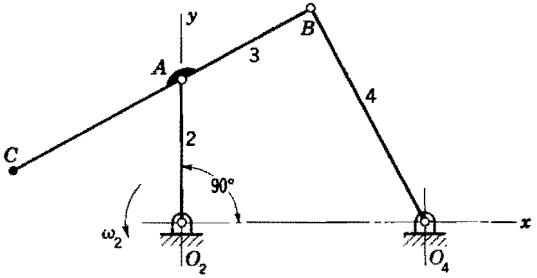


Problema 3-11 $R_{AO_2} = 8$pulg, $R_{BA} = 32$pulg, $R_{O_4O_2} = 16$pulg, $R_{BO_4} = 16$pulg, $R_{CO_4} = 12$pulg. **Problema 3-12**

3-13 La figura ilustra el eslabonamiento antiparalelo o de barras cruzadas. Si el eslabón 2 es impulsado a $\omega_2 = 1$ rad/s cmr, determínense las velocidades de los puntos C y D.

3-14 Encuéntrese la velocidad del punto C del eslabonamiento ilustrado en la figura correspondiente, suponiendo que el eslabón 2 posee una velocidad angular de 60 rad/s cmr. Hállense también las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4.

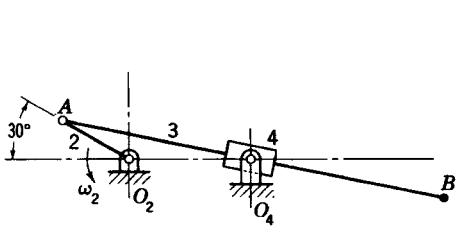


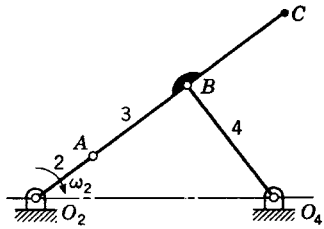


Problema 3-13 $R_{AO_2} = R_{BO_4} = 300$ mm, $R_{BA} = R_{O_4O_2} = 150$ mm, $R_{CA} = R_{DB} = 75$ mm. **Problema 3-14** $R_{AO_2} = R_{BA} = 6$ pulg, $R_{O_4O_2} = R_{BO_4} = 10$ pulg, $R_{CA} =$ pulg.

3-15 La inversión del mecanismo de corredera-manivela mostrado en la figura impulsa el eslabón 2 a $\omega_2 = 60$ rad/s cmr. Determínese la velocidad del punto B y las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4.

3-16 Encuéntrese la velocidad del punto C del acoplador y las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4 del mecanismo ilustrado, si la manivela 2 posee una velocidad angular de 30 rad/s mmr.

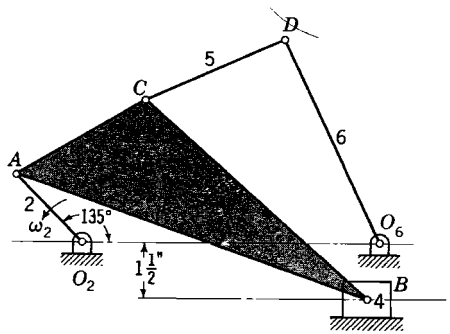


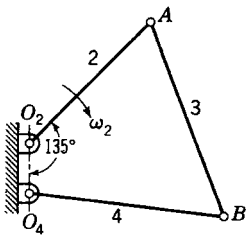


Problema 3-15 R_{AO_2} = 75 mm, R_{BA} = 400 mm, $R_{O_4O_2}$ = 125 mm. **Problema 3-16** R_{AO_2} = 3 pulg, $R_{BA} = R_{CB}$ = 5 pulg, $R_{O_4O_2}$ = 10 pulg, R_{BO_4} = 6 pulg.

3-17 El eslabón 2 del eslabonamiento ilustrado en la figura correspondiente posee una velocidad angular de 10 rad/s cmr. Determínese la velocidad angular del eslabón 6 y también las velocidades de los puntos *B*, *C* y *D*.

3-18 La velocidad angular del eslabón 2 del mecanismo de eslabón de arrastre que se muestra en la figura es de 16 rad/s mmr. Constrúyase un diagrama polar de velocidades para la velocidad del punto *B*, para todas las posiciones de la manivela. Compruébense las posiciones de las velocidades máxima y mínima, aplicando el teorema de Freudenstein.





Problema 3-17 R_{AO_2} = 2.5 pulg, R_{BA} = 10 pulg, R_{CB} = 8 pulg, $R_{CA} = R_{DC}$ = 4 pulg, $R_{O_6O_2}$ = 8 pulg, R_{DO_6} = 6 pulg. **Problema 3-18** R_{AO_2} = 350 mm, R_{BA} = 425 mm, $R_{O_4O_2}$ = 100 mm, R_{BO_4} = 400 mm.

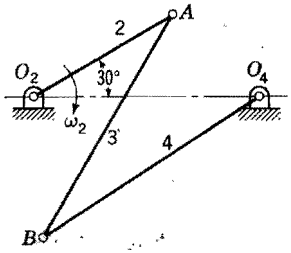
3-19 El eslabón 2 del mecanismo ilustrado en la figura es impulsado a $\omega_2 = 36$ rad/s mmr. Cálculese la velocidad angular del eslabón 3 y la velocidad del punto *B*.

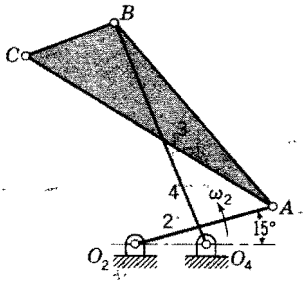
3-20 Calcúlese la velocidad del punto *C* y la velocidad angular del eslabón 3 del mecanismo de eslabón de empuje ilustrado en la figura. El eslabón 2 es el impulsor y gira a 8 rad/s cmr.

3-21 El eslabón 2 del mecanismo que aparece en la figura correspondiente posee una velocidad angular de 56 rad/s cmr. Determínese $\mathbf{V}_C$.

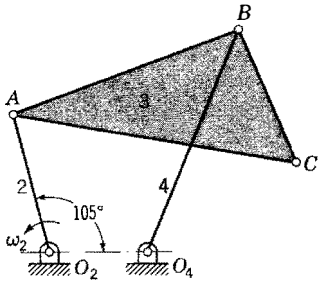
3-22 Encuéntrense las velocidades de los puntos *B*, *C* y *D* del mecanismo de doble corredera presentado en la figura, si la manivela 2 gira a 42 rad/s cmr.

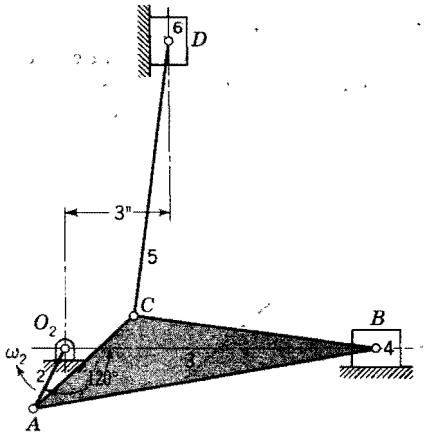
3-23 La figura presenta el mecanismo usado en un motor en V de 60° de dos cilindros, compuesto en parte de una biela articulada. La manivela 2 gira a 2 000 rpm mmr. Determínense las velocidades de los puntos *B*, *C* y *D*.



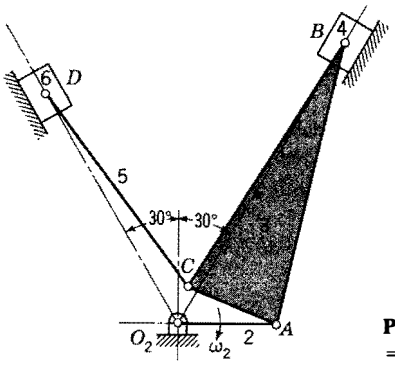


Problema 3-19 $R_{AO_2} = 5$ pulg, $R_{BA} = R_{BO_4} = 8$ pulg, $R_{O_4O_2} = 7$ pulg. **Problema 3-20** $R_{AO_2} = 150$ mm, $R_{BA} = R_{BO_4} = 250$ mm, $R_{O_4O_2} = 75$ mm, $R_{CA} = 300$ mm, $R_{CB} = 100$ mm.





Problema 3-21 $R_{AO_2} = R_{CB} = 150$ mm, $R_{BA} = R_{BO_4} = 250$ mm, $R_{O_4O_2} = 100$ mm, $R_{CA} = 300$ mm. **Problema 3-22** $R_{AO_2} = 2$ pulg, $R_{BA} = 10$ pulg, $R_{CA} = 4$ pulg, $R_{CB} = 7$ pulg, $R_{DC} = 8$ pulg.



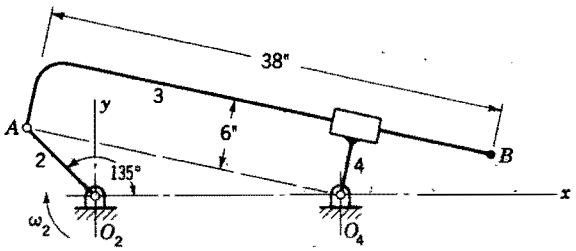
Problema 3-23 $R_{AO_2} = 2$ pulg, $R_{BA} = R_{CB} = 6$ pulg, $R_{CA} = 2$ pulg, $R_{DC} = 5$ pulg.

3-24 Formúlese un análisis completo de velocidad para el eslabonamiento ilustrado en la figura correspondiente, dado que $\omega_2 = 24$ rad/s mmr. ¿Cuál es la velocidad absoluta del punto B? ¿Cuál es su velocidad para un observador que se desplaza junto con el eslabón 4?

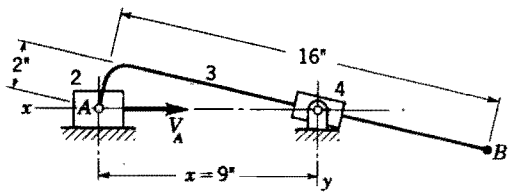
3-25 Determínese $\mathbf{V}_B$ para el eslabonamiento presentado en la figura correspondiente si $V_A = 1$ pie/s.

3-26 La figura de este problema ilustra una variación del mecanismo de yugo escocés. Este mecanismo es impulsado por la manivela 2 a $\omega_2 = 36$ rad/s cmr. Calcúlese la velocidad de la cruceta, eslabón 4.

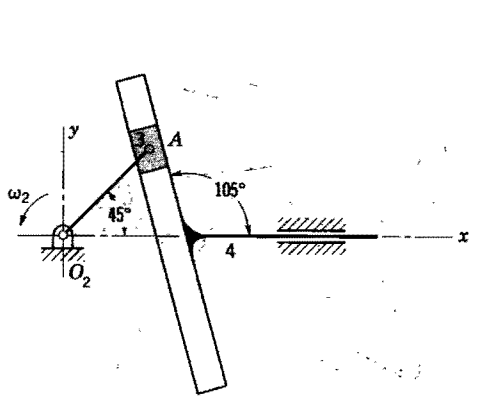
3-27 Hágase un análisis completo de velocidad del eslabonamiento ilustrado en la figura correspondiente, para $\omega_2 = 72$ rad/s cmr.

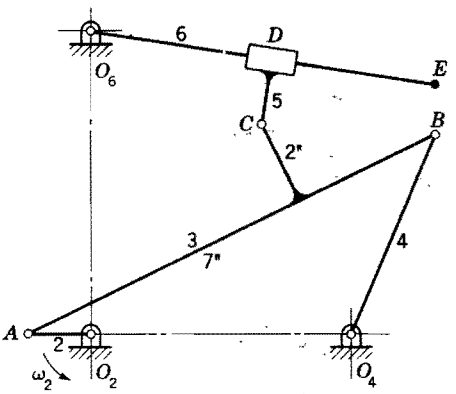


Problema 3-24 $R_{AO_2} = 8$ pulg, $R_{O_4O_2} = 20$ pulg.

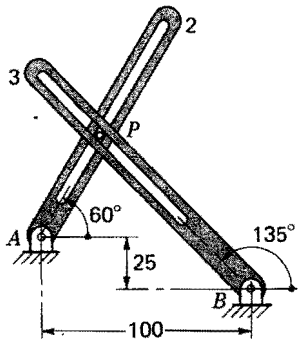


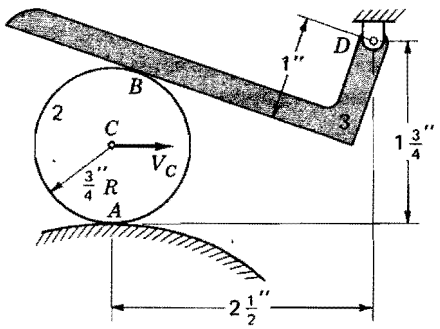
Problema 3-25





Problema 3-26 $R_{AO_2} = 250$ mm. **Problema 3-27** $R_{AO_2} = R_{DC} = 1.5$ pulg, $R_{BA} = 10.5$ pulg, $R_{O_4O_2} = 6$ pulg, $R_{BO_4} = 5$ pulg, $R_{O_6O_2} = 7$ pulg, $R_{EO_6} = 8$ pulg.





Problema 3-28 Las dimensiones se dan en milímetros. **Problema 3-29**

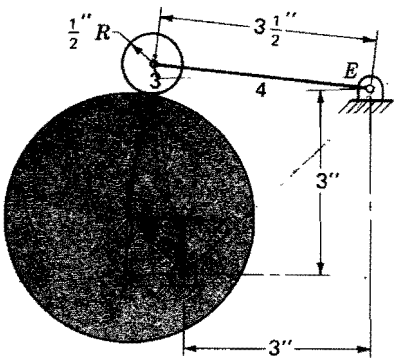
3-28 Los eslabones ranurados 2 y 3 son impulsados en forma independiente a $\omega_2 = 30$ rad/s mmr y $\omega_3 = 20$ rad/s mmr, respectivamente. Calcúlese la velocidad absoluta del centro del pasador P_4 que va dentro de las dos ranuras.

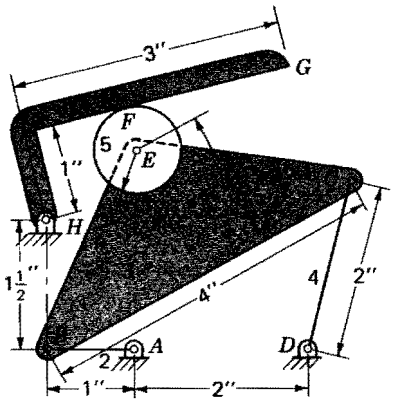
3-29 El mecanismo ilustrado se impulsa de tal manera que $V_C = 10$ pulg/s hacia la derecha. Se supone que existe un contacto por rodadura entre los eslabones 1 y 2; pero que puede haber deslizamiento entre los eslabones 2 y 3. Determínese la velocidad angular del eslabón 3.

3-30 La leva circular ilustrada se impulsa a una velocidad angular de $\omega_2 = 15$ rad/s mmr. Existe un contacto por rodadura entre la leva y el rodillo, eslabón 3. Calcúlese la velocidad angular del seguidor oscilante, eslabón 4.

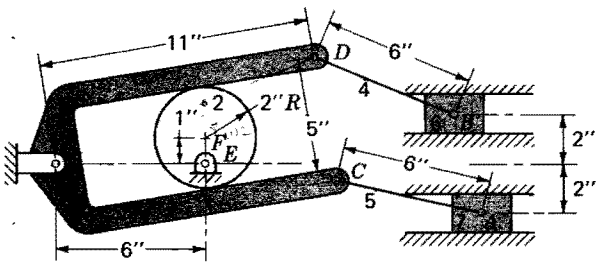
3-31 El mecanismo ilustrado en la figura es impulsado por el eslabón 2 a 10 rad/s cmr. Se tiene un contacto por rodadura en el punto F. Determínese la velocidad de los puntos E y G, y las velocidades angulares de los eslabones, 3, 4, 5 y 6.

3-32 La figura presenta el diagrama esquemático de una bomba de dos émbolos. La bomba es impulsada por un excéntrico circular, eslabón 2, a $\omega_2 = 25$ rad/s cmr. Calcúlense las velocidades de los dos pistones, eslabones 6 y 7.

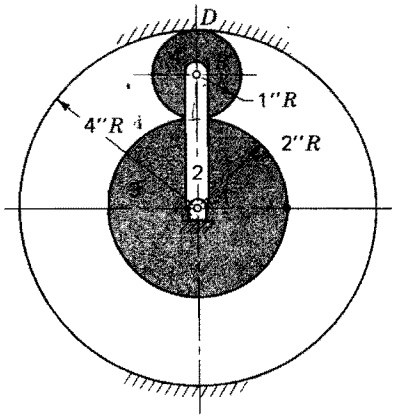




Problemas 3-30 y 3-31



Problema 3-32



Problema 3-33

3-33 El tren de engranes epicíclico que se muestra en la figura correspondiente es impulsado por el brazo, eslabón 2, a $\omega_2 = 10$ rad/s mmr. Determínese la velocidad angular del eje de salida que va conectado al engrane 3.

3-34 El diagrama muestra una aproximación esquemática plana de una suspensión delantera de automóvil. El *centro del rodillo* es el término utilizado por la industria para describir el punto en torno al cual parece girar el cuerpo del automóvil, en relación con el piso. Se supone que hay pivoteo, pero no resbalamiento entre las ruedas y la carretera. Después de hacer un esquema, apliquense los conceptos de los centros instantáneos para encontrar una técnica que sirva para localizar el centro del rodillo.

3-35 Localícense todos los centros instantáneos del eslabonamiento del problema 3-22

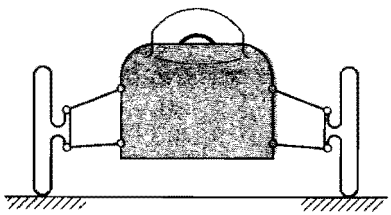
3-36 Determínense todos los centros instantáneos del mecanismo del problema 3-25.

3-37 Encuéntrense todos los centros instantáneos del mecanismo del problema 3-26.

3-38 Localícense todos los centros instantáneos del mecanismo del problema 3-27.

3-39 Encuéntrense todos los centros instantáneos del mecanismo del problema 3-29.

3-40 Hállense todos los centros instantáneos del mecanismo del problema 3-30.



Problema 3-34

CAPÍTULO

CUATRO

ACELERACIÓN

4-1 DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

En la figura 4-1*a* se observa primero un punto móvil en la ubicación P en donde tiene una velocidad $\mathbf{V}_P$. Después de un breve intervalo de tiempo Δt, se observa que el punto se ha desplazado siguiendo cierta trayectoria hasta la nueva ubicación P', y que su velocidad ha cambiado a $\mathbf{V}'_P$, que puede diferir de $\mathbf{V}_P$ tanto en magnitud como en dirección. Se puede evaluar el cambio de velocidad $\Delta\mathbf{V}_P$: como se indica en la figura 4-1*b*.

$$\Delta\mathbf{V}_P = \mathbf{V}'_P - \mathbf{V}_P$$

La *aceleración promedio* del punto P durante el intervalo es $\Delta\mathbf{V}_P/\Delta t$. La *aceleración instantánea* (de aquí en adelante llamada, sencillamente, *aceleración*) del punto P se define como la rapidez de cambio de su velocidad respecto al tiempo, es decir, el límite de la aceleración promedio para un intervalo de tiempo infinitesimalmente pequeño

$$\mathbf{A}_P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{V}_P}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{V}_P}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}_P}{dt^2} \tag{4-1}$$

Puesto que la velocidad es una cantidad vectorial, $\Delta\mathbf{V}_P$ y la aceleración $\mathbf{A}_P$ también son cantidades vectoriales y ambas tienen magnitud y dirección. Asimismo, al igual que la velocidad, el vector aceleración se define apropiadamente sólo para un punto; el término no se debe aplicar a una recta, un sistema de coordenadas, un volumen o cualquier otra colección de puntos ya que las aceleraciones de los diversos puntos que intervengan pueden diferir.

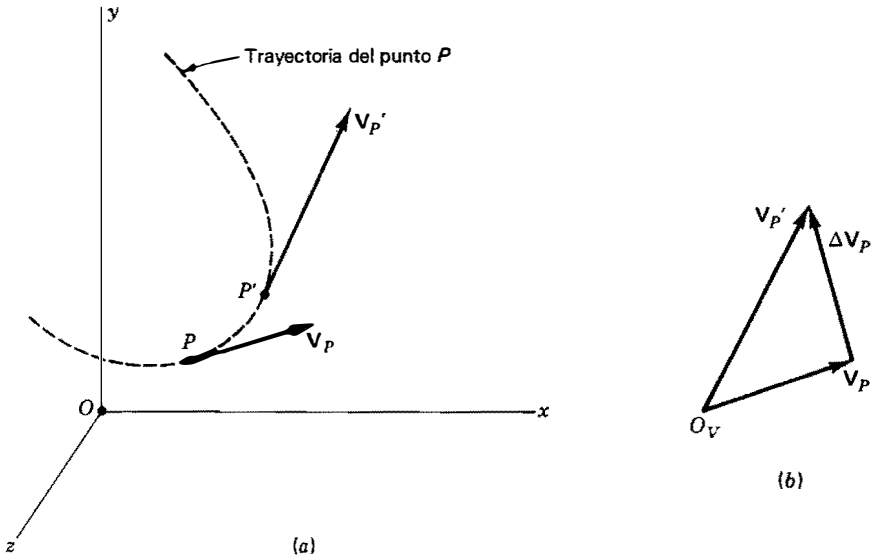


Figura 4-1 Cambio en la velocidad de un punto en movimiento.

Al igual que la velocidad, la aceleración de un punto en movimiento será considerada en forma diferente por observadores diferentes. La aceleración no depende de la ubicación real del observador, sino que depende críticamente del movimiento de éste o, mas bien, del movimiento del sistema de coordenadas de tal observador. Si la aceleración es detectada por un observador situado en el sistema absoluto de coordenadas se le menciona como *aceleración absoluta* y se denota mediante el símbolo $\mathbf{A}_{P/1}$ o simplemente $\mathbf{A}_P$, lo cual es coherente con la notación utilizada para la posición, el desplazamiento y la velocidad.

4-2 ACELERACIÓN ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO

En la figura 4-2 se considera el movimiento de un cuerpo rígido. Dos puntos del cuerpo, P y Q, sufren primero desplazamientos pequeños durante un intervalo breve de tiempo, Δt, y llegan a las nuevas posiciones xxi y Q'. A continuación, durante otro pequeño intervalo de tiempo, cubren otros pequeños desplazamientos para llegar a las posiciones P'' y Q''. Se recordará (Sec. 3-3) que estos desplazamientos sirvieron para obtener el vector diferencia de velocidad $\mathbf{V}_{PQ}$ y para definir el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo en movimiento. Al hacerlo se tomó el punto de vista de un observador en un sistema de coordenadas en movimiento cuyo origen se desplaza junto con el punto Q, pero cuyos ejes se mantienen paralelos a los de los ejes de coordenadas absolutas. Se recordará asimismo que un observador de esta índole percibe sólo la rotación del cuerpo en torno al

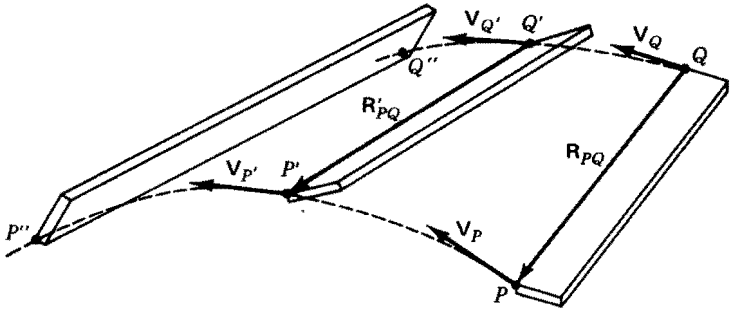


Figura 4-2

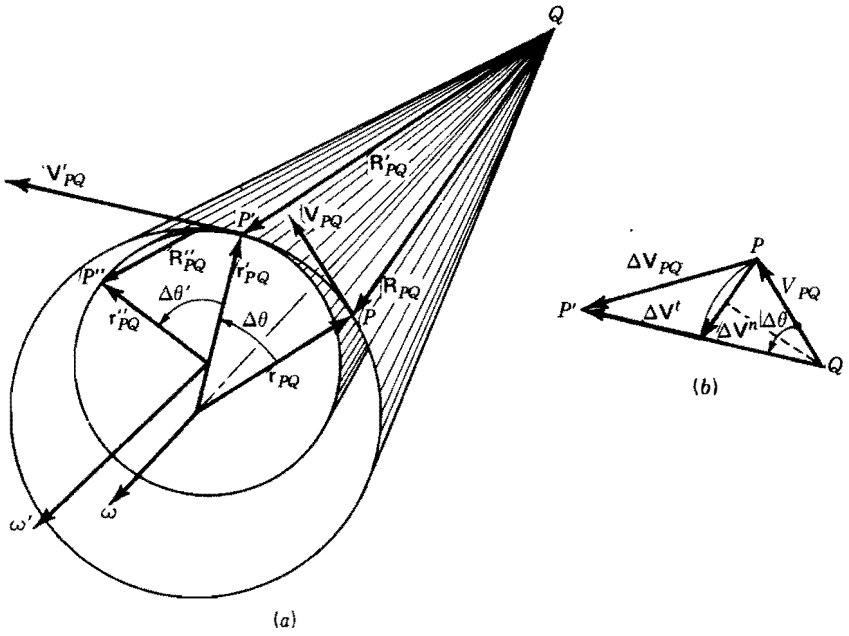


Figura 4-3

punto Q y, como se mostró en la figura 3-4, a él le parece que el vector de diferencia de posición $\mathbf{R}_{PQ}$ describe un cono cuyo eje define la dirección de $\boldsymbol{\omega}$.

Al desarrollar las fórmulas para la aceleración, ahora se desea extender este punto de vista para dos intervalos de tiempo sucesivos. En la figura 4-3*a* se toma la perspectiva del mismo observador en movimiento, pero sin rotación. Durante el primer intervalo de tiempo, el cuerpo gira en torno a Q hasta que P llega a P', con $\mathbf{R}_{PQ}$ describiendo una sección de cono en torno al eje $\boldsymbol{\omega}$. Durante el segundo inter-

valo, la rotación continúa hasta que P' llega a P''. Sin embargo, en esta ocasión, la rotación puede tener un tamaño diferente y realizarse en torno a un eje diferente; de donde, se muestra $\mathbf{R}'_{PQ}$ describiendo un segundo cono con el eje modificado $\boldsymbol{\omega}'$. El cambio en la velocidad angular del cuerpo está dado por

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}$$

La aceleración angular del cuerpo se define como la rapidez de cambio de su velocidad angular, y su símbolo es $\boldsymbol{\alpha}$,

$$\boldsymbol{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{4-2}$$

Como se ve en la figura 4-3*a*, el cambio en la velocidad angular puede incluir un cambio en la magnitud (si la rapidez de la rotación aumenta o decrece) y, o bien, un cambio en la dirección (si se modifica el eje de la rotación). Al igual que $\Delta\boldsymbol{\omega}$, del cual proviene, no existe razón alguna para creer que $\boldsymbol{\alpha}$ posea una dirección a lo largo de $\boldsymbol{\omega}$ o bien, $\boldsymbol{\omega}'$; sino que puede tener una dirección totalmente nueva.

Como el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, el vector aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ se aplica a la rotación absoluta del cuerpo rígido completo, y con frecuencia se le asigna un subíndice del número del sistema de coordenadas del cuerpo en movimiento, por ejemplo, $\boldsymbol{\alpha}_2$ o $\boldsymbol{\alpha}_{2/1}$.

4-3 DIFERENCIA DE ACELERACIONES ENTRE PUNTOS DE UN CUERPO RÍGIDO

Siguiendo con la figura 4-3*a*, se puede escribir la ecuación de diferencia de velocidad que proviene de cada uno de los desplazamientos sucesivos

$$\mathbf{V}_{PQ} = \mathbf{V}_P - \mathbf{V}_Q = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{PQ} \tag{a}$$

y

$$\mathbf{V}'_{PQ} = \mathbf{V}'_P - \mathbf{V}'_Q = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{R}'_{PQ} \tag{b}$$

Los dos vectores de diferencia de velocidad se muestran tangentes a los conos respectivos en P y P'.

Al restar la ecuación (*a*) de la (*b*), se obtiene

$$\Delta\mathbf{V}_{PQ} = \mathbf{V}'_{PQ} - \mathbf{V}_{PQ} \tag{c}$$

$$= \Delta\mathbf{V}_P - \Delta\mathbf{V}_Q \tag{d}$$

En la figura 4-3*b* se muestra la sustracción gráfica de la (*c*) como su frontera exterior. Se observará que $\mathbf{V}'_{PQ}$ y $\mathbf{V}_{PQ}$ tienen una diferencia de dirección en $\Delta\theta$ ya que, según las ecuaciones (*b*) y (*a*), son perpendiculares a los radios del cono $\mathbf{r}'_{PQ}$ y $\mathbf{r}_{PQ}$, respectivamente. Las magnitudes V'_{PQ} y V_{PQ} no son necesariamente iguales.

Para contribuir a la evaluación de $\Delta\mathbf{V}_{PQ}$, a continuación se divide en dos componentes, $\Delta\mathbf{V}^n$, tomada como la cuerda de un arco circular con centro en Q y radio $\mathbf{V}_{PQ}$, y $\Delta\mathbf{V}^t$, tomada a lo largo de $\mathbf{V}'_{PQ}$.

$$\Delta \mathbf{V}_{PQ} = \Delta \mathbf{V}^n + \Delta \mathbf{V}^t \qquad (e)$$

En breve se descubrirá el significado de los superíndices.

Si por ahora este estudio se concentra tan sólo en $\Delta \mathbf{V}^n$, se puede evaluar su magnitud trazando su mediatriz que pasa por Q. Así pues,

$$\Delta V^n = 2 V_{PQ} \operatorname{sen} \frac{\Delta \theta}{2}$$

Si se supone que el intervalo de tiempo Δt (y, por lo tanto, el desplazamiento angular) es pequeño, el seno del ángulo pequeño se puede aproximar por el ángulo mismo

$$\Delta V^n \approx 2 V_{PQ} \frac{\Delta \theta}{2} = \Delta \theta \, V_{PQ}$$

Ahora se puede dividir entre Δt y tomar el límite, definiendo así lo que se conoce con el nombre de *componente normal* de la *diferencia de aceleración*. A esta expresión se le asocia el símbolo $\mathbf{A}^n_{PQ}$

$$A^n_{PQ} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t} V_{PQ} \right)$$

Si se aplica la definición de velocidad angular, esto se convierte en

$$A^n_{PQ} = \omega V_{PQ}$$

Asimismo, en la figura 4-3*b* se observa que, en el límite, la cuerda $\Delta \mathbf{V}^n$ queda perpendicular a $\mathbf{V}_{PQ}$. Por consiguiente, se pueden restaurar los atributos vectoriales a la ecuación, escribiendo

$$\mathbf{A}^n_{PQ} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{PQ}$$

Recordando la ecuación (3-3) correspondiente al vector de diferencia de velocidad, esto se puede escribir en la forma

$$\mathbf{A}^n_{PQ} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{PQ}) \qquad (4\text{-}3)$$

Si el cuerpo que contiene a los dos puntos P y Q tiene un movimiento plano, se pueden encontrar otras formas útiles a partir de las ecuaciones (4-3) y (3-3) para evaluar $\mathbf{A}^n_{PQ}$

$$\mathbf{A}^n_{PQ} = -\omega^2 \mathbf{R}_{PQ} \qquad (4\text{-}4)$$

$$A^n_{PQ} = \frac{V^2_{PQ}}{R_{PQ}} \qquad (4\text{-}5)$$

Ahora, el análisis se concentrará en $\Delta \mathbf{V}^t$, el otro término de la ecuación (*e*). Puesto que $\Delta \mathbf{V}^n$ es la cuerda de un arco circular, la magnitud de $\Delta \mathbf{V}^t$ se puede evaluar como

$$\Delta V^t = V'_{PQ} - V_{PQ} = |\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{R}'_{PQ}| - |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{PQ}| = \omega' r'_{PQ} - \omega r_{PQ}$$

Luego se divide entre Δt y se toma el límite, definiendo con ello a la *componente tangencial* de la *diferencia de aceleración* $\mathbf{A}^t_{PQ}$

$$A^t_{PQ} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V^t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega' r'_{PQ} - \omega r_{PQ}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \omega}{\Delta t} r_{PQ} \right)$$

Se observa que, en el límite, las direcciones de $\Delta \mathbf{V}^t$, $\mathbf{V}_{PQ}$ y $\mathbf{V}'_{PQ}$ se acercan a la tangente del cono en P. Por ende, es factible restaurar las propiedades vectoriales de esta ecuación como se indica a continuación

$$\mathbf{A}^t_{PQ} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} \times \mathbf{R}_{PQ} \right)$$

o bien, recordando la (4-2),

$$\mathbf{A}^t_{PQ} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}_{PQ} \tag{4-6}$$

Ahora, después de haber examinado las componentes por separado, la (*e*) se divide entre Δt, se toma el límite y se define el *vector diferencia de aceleración* entre dos puntos P y Q de un cuerpo rígido

$$\mathbf{A}_{PQ} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{V}_{PQ}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{V}_{PQ}}{dt} = \mathbf{A}^n_{PQ} + \mathbf{A}^t_{PQ} \tag{4-7}$$

Cuando se forma el mismo límite a partir de la (*d*), se obtiene la *ecuación de la diferencia de aceleración*

$$\mathbf{A}_{PQ} = \mathbf{A}_P - \mathbf{A}_Q$$

o bien,

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_Q + \mathbf{A}_{PQ} \tag{4-8}$$

Esta importante ecuación es una de las bases primarias para el análisis de aceleración, porque permite encontrar la aceleración de un punto P partiendo de la de

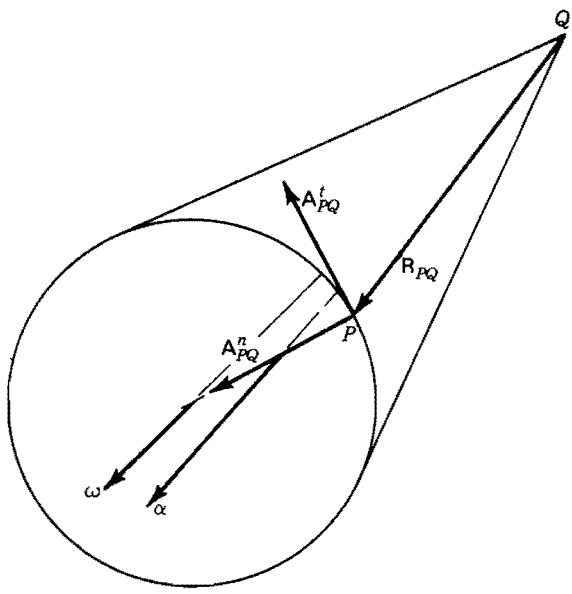


Figura 4-4

cualquier otro punto *Q del mismo cuerpo rígido,* y la diferencia de aceleración entre ambos. Según la ecuación (4-7), la diferencia de aceleración consta de dos componentes que pueden evaluarse a partir de las ecuaciones (4-3) y (4-6), si se conocen las propiedades $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ del movimiento de rotación del cuerpo.

En la figura 4-4 se ilustran las direcciones de las componentes de la diferencia de aceleración, y en donde se muestra una vez más el movimiento cónico que vería un observador en un sistema de coordenadas que se traslada con el punto *Q,* por lo que respecta a $\mathbf{R}_{PQ}$. Ambas componentes quedan en el plano definido por la base del cono. Los superíndices *n* y *t* se refieren a las componentes que son *normales* y *tangentes* al círculo de la base del cono. La componente normal $\mathbf{A}^n_{PQ}$ siempre está dirigida hacia el centro de este círculo; la dirección de $\mathbf{A}^t_{PQ}$ siempre es tangente a este círculo, pero su sentido depende del de $\boldsymbol{\alpha}$.

Una vez más se hace hincapié en que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\omega}$ no tienen por lo común la misma dirección en el espacio tridimensional.

La ecuación de la diferencia de aceleración se puede resolver por medios muy similares a los que se emplearon en el capítulo 3 para la ecuación de la diferencia de velocidad.

4-4 ANÁLISIS GRÁFICO DE LA ACELERACIÓN; POLÍGONOS DE ACELERACIONES

Como en el análisis de velocidad, el enfoque gráfico proporciona un método poderoso y de fácil aplicación para analizar aceleraciones en mecanismos bidimensionales.

Como primer ejemplo del análisis gráfico de la aceleración, considérese el movimiento del eslabón no restringido que se ilustra en la figura 4-5*a,* con las velocidades que se muestran en el polígono de velocidades, figura 4-5*b*. Supóngase que se da la aceleración de dos puntos, *A* y *B*, y se desea determinar la aceleración del punto *C* y la aceleración angular del eslabón (se observará que esto es una continuación de la sección 3-4, figura 3-6). En general, resulta conveniente dibujar la figura a escala y resolver para todas las velocidades importantes antes de dar principio al análisis de la aceleración propiamente dicho.

A continuación, considérese la ecuación de la diferencia de aceleración (4-8),

$$\overset{\surd\surd}{\mathbf{A}}_B = \overset{\surd\surd}{\mathbf{A}}_A + \overset{\infty}{\mathbf{A}}_{BA} \qquad (a)$$

En la figura 4-5*c* se muestra la solución gráfica de esta ecuación para $\mathbf{A}_{BA}$. En su obtención es necesario elegir una escala para la representación gráfica de los vectores aceleración; también se elige un punto de partida O_A. Se representan gráficamente los vectores $\mathbf{A}_A$ y $\mathbf{A}_B$ a la escala seleccionada, teniendo ambos su origen en O_A y terminando en los puntos *A* y *B*, puesto que son aceleraciones absolutas. Según la ecuación (*a*), el vector que se extiende entre sus extremos ahora se identifica como la diferencia de aceleración $\mathbf{A}_{BA}$ y, dentro de la precisión gráfica, da una representación correcta tanto de la magnitud como de la dirección.

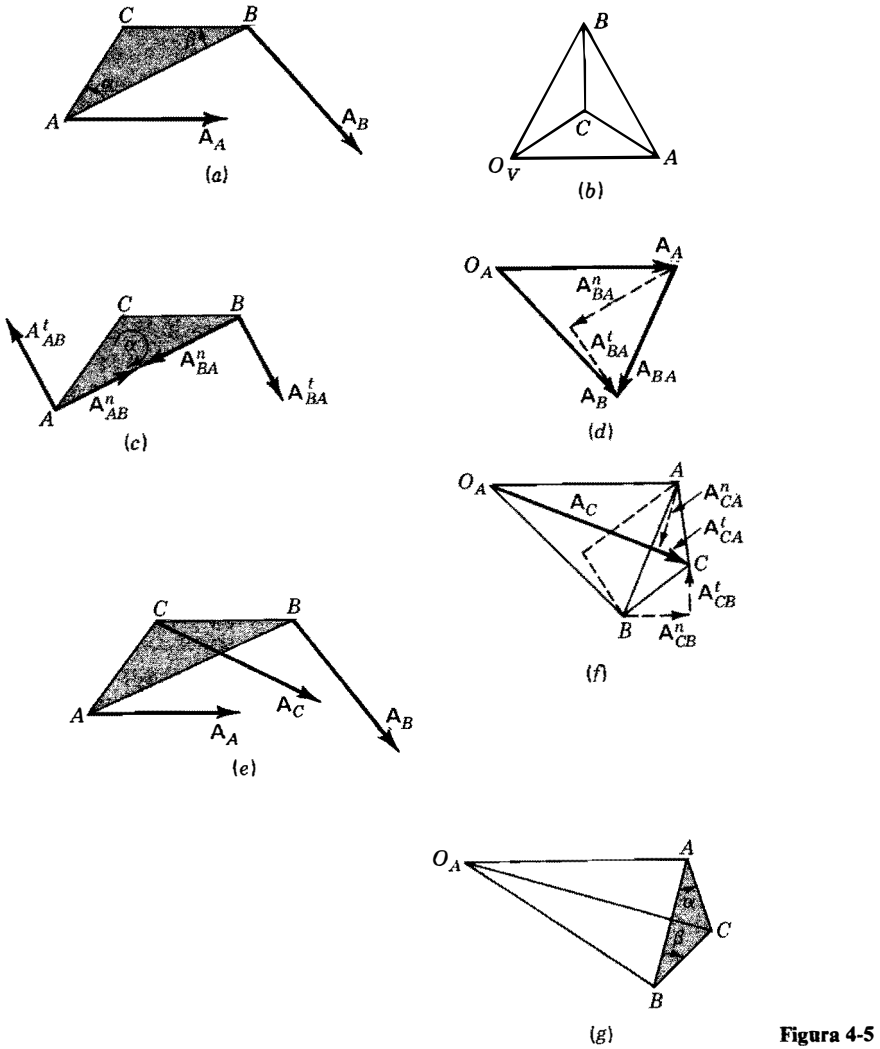


Figura 4-5

La dirección de $\mathbf{R}_{BA}$ se conoce a partir del diagrama del eslabón (Fig. 4-5*a*). Basándose en esta dirección, el vector ahora se divide en $\mathbf{A}_{BA}$ en sus componentes normal y tangencial

$$\mathbf{A}_{BA} = \mathbf{A}^n_{BA} + \mathbf{A}^t_{BA} \qquad (b)$$

Estas aparecen ilustradas en la figura 4-5*c* y se repiten en el dibujo del eslabón, en la figura 4-5*d*, en donde se pueden ver con mayor claridad sus direcciones.

Se puede hallar la aceleración angular midiendo a escala la magnitud de la componente tangencial de la diferencia de aceleración y la distancia entre los pun-

tos, y aplicando la (4-6). En el caso de un movimiento plano el vector $\boldsymbol{\alpha}$ es perpendicular al plano del movimiento y su magnitud está dada por

$$\alpha = \frac{A^t_{BA}}{R_{BA}} \qquad (c)$$

Su sentido se puede determinar visualmente basándose en la figura 4-5*d*. Tomando la perspectiva de un observador que no gira y se mueve con el punto *A*, la componente tangencial $\mathbf{A}^t_{BA}$ se puede concebir como la rotación del eslabón en torno al punto *A*, en la dirección de $\boldsymbol{\alpha}$, en este caso, en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Se observa que si se hubiera encontrado $\mathbf{A}_{AB}$ en lugar de $\mathbf{A}_{BA}$, el sentido de $\mathbf{A}^t_{AB}$ habría sido opuesto al de $\mathbf{A}^t_{BA}$. No obstante, se concebiría como si indicara una rotación del eslabón en torno al punto *B*. Por consiguiente, el sentido de $\boldsymbol{\alpha}$ habría resultado ser de todos modos el mismo que el del movimiento de las manecillas del reloj.

Ahora que se ha determinado $\boldsymbol{\alpha}$ se está en posición de calcular la aceleración absoluta del punto *C*, relacionándolo con los puntos *A* y *B* por medio de las ecuaciones de la diferencia de aceleración

$$\overset{\circ\circ}{\mathbf{A}}_C = \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}_A + \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}^n_{CA} + \overset{\circ\vee}{\mathbf{A}}^t_{CA} = \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}_B + \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}^n_{CB} + \overset{\circ\vee}{\mathbf{A}}^t_{CB} \qquad (d)$$

Dado que los puntos *A*, *B* y *C* están en el mismo eslabón, las componentes normales $\mathbf{A}^n_{CA}$ y $\mathbf{A}^n_{CB}$ tienen cada una la forma $-\omega^2\mathbf{R}$ [Ec. (4-4)]. En vista de que se conoce $\boldsymbol{\omega}$ (o se encuentra partiendo de $\mathbf{V}_{BA}$), las dos magnitudes se pueden calcular utilizando R_{CA} y R_{CB}, respectivamente, y resultan ser iguales a $\omega^2 R$. Estos se suman después gráficamente a $\mathbf{A}_A$ y $\mathbf{A}_B$, como se ilustra en la figura 4-5*e*. Nótese que el signo menos de la (4-4) significa que $\mathbf{A}^n_{CA}$ es paralelo a $\mathbf{R}_{CA}$, pero de sentido opuesto y, análogamente, para $\mathbf{A}^n_{CB}$ y $\mathbf{R}_{CB}$. Continuando con la ecuación (*d*), ahora es preciso sumar las componentes tangenciales $\mathbf{A}^t_{CA}$ y $\mathbf{A}^t_{CB}$, las que, por lo que estipula la ecuación (4-6), son perpendiculares a $\mathbf{R}_{CA}$ y $\mathbf{R}_{CB}$, respectivamente. Estas dos rectas se trazan como se indica en la figura 4-5*e* y se intersecan en el punto identificado por la letra *C*. La ecuación (*d*) revela que la aceleración absoluta del punto *C* está dada por el vector que va de O_A a *C* en el polígono de aceleraciones. En la figura 4-5*f* se presenta con la ubicación adecuada en el diagrama del eslabón.

Según el método que se acaba de explicar, no se utilizó el valor previamente calculado de $\boldsymbol{\alpha}$. Un método alterno habría sido usar $\boldsymbol{\alpha}$ y la (4-6) para calcular ya sea $\mathbf{A}^t_{CA}$ o $\mathbf{A}^t_{CB}$. Sólo habría sido necesaria una de las dos ecuaciones (*d*) con este método para localizar el punto *C* y determinar $\mathbf{A}_C$.

En la figura 4-5*g* se muestra el mismo polígono de aceleraciones con el triángulo *ABC* sombreado y en el que se han suprimido las componentes normal y tangencial de la diferencia de aceleración. Se observa una vez más que el triángulo *ABC* del polígono de aceleraciones tiene una forma semejante a la del eslabón original *ABC*. Se puede demostrar que, en efecto, este es el caso, escribiendo las ecuaciones correspondientes a la magnitud de cada lado. Cada vector de diferencia de aceleración está constituido por una componente normal y una tangencial, y los

tres forman un triángulo rectángulo como se observa en la figura 4-5*e*. Por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras se encuentra, por ejemplo, la magnitud de $\mathbf{A}_{BA}$ como sigue:

$$A_{BA} = \sqrt{(A^n_{BA})^2 + (A^t_{BA})^2} = \sqrt{(\omega^2 R_{BA})^2 + (\alpha R_{BA})^2} = R_{BA}\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \qquad (e)$$

Del mismo modo,
$$A_{CA} = R_{CA}\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \qquad (f)$$

y
$$A_{CB} = R_{CB}\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \qquad (g)$$

Por ende, se ve que los lados del triángulo *ABC* del polígono de aceleraciones son proporcionales a los lados del eslabón original *ABC,* en donde el factor de proporcionalidad depende del movimiento de rotación del eslabón. Esta figura de forma semejante a la del polígono de aceleraciones se conoce con el nombre de *imagen de aceleraciones* del eslabón, y cada eslabón en movimiento tiene una imagen de aceleraciones correspondiente en el polígono de aceleraciones.

Al igual que en el caso de la imagen de velocidades, se puede usar el concepto de imagen de aceleraciones para simplificar mucho la resolución del ejemplo anterior. Una vez que se han localizado los puntos *A* y *B* de la imagen de aceleraciones se puede construir el triángulo de la imagen de aceleraciones trazando proporcionalmente los lados con los del eslabón, o construyendo los ángulos α y β, como se indica en la figura 4-5*g*. Nótese que cuando se aplica este método, se evita el cálculo de las dos componentes normales de la (*d*). Aunque el ángulo de rotación de la imagen de aceleraciones relativo al propio eslabón no es un valor que se determine con facilidad (depende de la magnitud de $\boldsymbol{\omega}$ y tanto de la magnitud como de la dirección de $\boldsymbol{\alpha}$), las otras propiedades de la imagen de velocidades se trasladan a las imágenes de aceleraciones:

1. La imagen de aceleraciones de cada eslabón rígido es una reproducción a escala de la forma del eslabón en el polígono de aceleraciones.
2. Las letras que identifican los vértices de cada eslabón son las mismas que se tienen en el polígono de aceleraciones y se encuentran en torno a la imagen de aceleraciones en el mismo orden y en la misma dirección angular que alrededor del eslabón.
3. La razón del tamaño de la imagen de aceleraciones de un eslabón y el tamaño del propio eslabón depende del movimiento de rotación del eslabón. En general, *no* es la misma para los diferentes eslabones de un mecanismo.
4. El punto O_A del polígono de aceleraciones es la imagen de todos los puntos que tienen aceleración absoluta igual a cero. Se trata de la imagen de aceleraciones del eslabón fijo.
5. La aceleración absoluta en algún punto de cualquier eslabón se representa por medio de la recta que va de O_A a la imagen del punto en el polígono de aceleraciones. La diferencia de aceleración entre dos puntos, póngase por caso *P* y *Q,* se representa mediante la recta que va del punto imagen *P* al punto imagen *Q*.

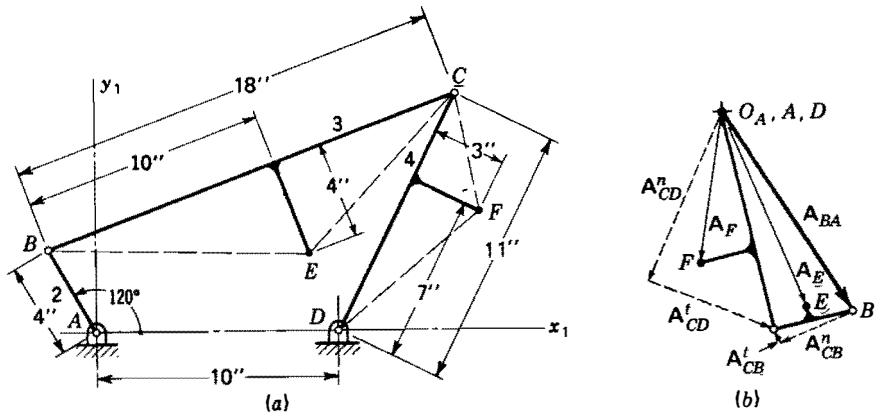


Figura 4-6 Análisis gráfico de aceleración de un eslabonamiento de cuatro barras, ejemplo 4-1: *a*) diagrama a escala y *b*) polígono de aceleraciones.

Como se dijo en relación al análisis gráfico de la velocidad, se puede hacer uso de la conveniencia del concepto de imagen de aceleraciones a fin de acelerar la resolución y reducir los cálculos numéricos. No obstante, se puede dar la impresión de un truco gráfico sin base teórica firme; de donde, conviene seguir escribiendo las ecuaciones correspondientes de la diferencia de velocidad y la diferencia de aceleración siempre que se emplee el concepto de imagen, hasta haberse familiarizado perfectamente con los principios fundamentales. A continuación se presentarán dos ejemplos más para dar una mayor experiencia por lo que respecta al análisis gráfico de la aceleración.

Ejemplo 4-1 El eslabonamiento de cuatro barras ilustrado en la figura 4-6*a* se analizó en el ejemplo 3-1, en lo referente a las velocidades; y su polígono de velocidades se dio en la figura 3-7*b*. Suponiendo que el eslabón 2 es impulsado con una velocidad angular constante, determínense las aceleraciones absolutas de los puntos E y F, y las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4.

SOLUCIÓN Partiendo del punto pivote fijo A, se principia por escribir la ecuación de diferencia de aceleraciones para la aceleración del punto B.

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}_B = \mathbf{A}_A^{\,0} + \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}{}^{n}_{BA} + \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}{}^{t}_{BA} \tag{1}$$

Las componentes de la ecuación de la diferencia de aceleración se calculan partiendo del movimiento angular especificado del eslabón 2,

$$A^n_{BA} = \omega_2^2 R_{BA} = (94.2 \text{ rad/s})^2\left(\frac{4}{12}\text{ pie}\right) = 2958 \text{ pie/s}^2$$

$$A^t_{BA} = \alpha_2 R_{BA} = (0 \text{ rad/s}^2)\left(\frac{4}{12}\text{ pie}\right) = 0.$$

Se elige el punto O_A y una escala para las aceleraciones, y se traza $\mathbf{A}^n_{BA}$ (con dirección opuesta a la de $\mathbf{R}_{BA}$), con el fin de localizar el punto B en la imagen de aceleraciones, como se consigna en la figura 4-6*b*, resolviendo así la ecuación (1).

A continuación se escriben las ecuaciones de la diferencia de aceleración que relacionan al punto C con los puntos B y D,

$$\mathbf{A}_C = \overset{\sqrt{}}{\mathbf{A}}_B + \overset{\sqrt{}}{\mathbf{A}}^n_{CB} + \overset{o\sqrt{}}{\mathbf{A}}^t_{CB} = \mathbf{A}_D^0 + \overset{\sqrt{}}{\mathbf{A}}^n_{CD} + \overset{o\sqrt{}}{\mathbf{A}}^t_{CD} \qquad (2)$$

Con la información medida a escala en el polígono de velocidades, se calculan las magnitudes de las dos componentes normales de la diferencia de aceleración,

$$A^n_{CB} = \frac{V^2_{CB}}{R_{CB}} = \frac{(38.4 \text{ pie/s})^2}{18/12 \text{ pie}} = 938 \text{ pie/s}^2$$

$$A^n_{CD} = \frac{V^2_{CD}}{R_{CD}} = \frac{(45.5 \text{ pie/s})^2}{11/12 \text{ pie}} = 2268 \text{ pie/s}^2$$

Éstas dos componentes normales tienen sentidos opuestos a $\mathbf{R}_{CB}$ y $\mathbf{R}_{CD}$, respectivamente. Como lo establece la ecuación (2), se agregan al polígono de aceleraciones partiendo de los puntos B y D, respectivamente, y se muestran mediante las líneas a trazos de la figura 4-6*b*. Luego se trazan rectas perpendiculares a trazos que pasen por los extremos de estas dos componentes normales; éstas representan la adición de las dos componentes tangenciales $\mathbf{A}^t_{CB}$ y $\mathbf{A}^t_{CD}$, como se requiere, completando así la ecuación (2). Su intersección se identifica como el punto imagen C de aceleración.

Ahora se encuentran las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4 a partir de las dos componentes tangenciales

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{CB}}{R_{CB}} = \frac{160 \text{ pie/s}^2}{18/12 \text{ pie}} = 107 \text{ rad/s}^2 \text{ cmr} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\alpha_4 = \frac{A^t_{CD}}{R_{CD}} = \frac{1670 \text{ pie/s}^2}{11/12 \text{ pie}} = 1822 \text{ rad/s}^2 \text{ mmr} \qquad \textit{Resp.}$$

en donde las direcciones se encuentran aplicando la técnica de simple observación ilustrada en el último ejemplo, figura 4-5*d*.

La aceleración absoluta del punto E se calcula ahora relacionándolo con los puntos B y C, que están también en el eslabón 3, por medio de las ecuaciones de la diferencia de aceleración,

$$\mathbf{A}_E = \mathbf{A}_B + \mathbf{A}^n_{EB} + \mathbf{A}^t_{EB} = \mathbf{A}_C + \mathbf{A}^n_{EC} + \mathbf{A}^t_{EC} \qquad (3)$$

Si así se desea, la resolución de estas ecuaciones puede seguir los mismos métodos empleados para la (2). Un segundo método es utilizar el valor de α_3, que ahora se conoce, con el propósito de calcular una o ambas componentes tangenciales. Sin embargo, es probable que el método más sencillo sea construir el triángulo de las imágenes de aceleración BCE para la recta 3, utilizando como base a $\mathbf{A}_{CB}$ y la forma del eslabón 3. Cualquiera de estos métodos lleva a la localización del punto imagen de aceleración E indicado en el polígono de aceleraciones, figura 4-6*b*. La aceleración absoluta del punto E se mide entonces a escala y se encuentra que es

$$A_E = 1960 \text{ pie/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Se puede aplicar también cualquiera de estos métodos para hallar la aceleración absoluta del punto F. Las ecuaciones apropiadas de la diferencia de aceleración, que lo asocian a los puntos C y D del eslabón 4, son

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{A}_D + \mathbf{A}^n_{FD} + \mathbf{A}^t_{FD} = \mathbf{A}_C + \mathbf{A}^n_{FC} + \mathbf{A}^t_{FC} \qquad (4)$$

Su resolución conduce a la ubicación del punto imagen F, como se ilustra en el polígono de aceleraciones, y el resultado es

$$A_F = 2580 \text{ pie/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Al repasar este ejemplo, es evidente que la estrategia global para el análisis gráfico de la aceleración, el orden y el número de las ecuaciones escritas, sigue exactamente el sistema usado en el análisis gráfico de la velocidad. Aunque hay dos componentes en cada diferencia de aceleración y sólo una por cada diferencia de velocidad, las componentes normales se pueden calcular siempre basándose en la información contenida en el polígono de velocidades; dicho de otra manera, nunca contienen una incógnita. Las incógnitas de la ecuación de la diferencia de aceleración surgen casi siempre de la magnitud desconocida de la componente tangencial, la cual depende de la aceleración angular de un eslabón, y la magnitud o dirección desconocidas de una de las aceleraciones absolutas.

Ejemplo 4-2 En el ejemplo 3-2 se hizo el análisis de velocidad de un mecanismo excéntrico de corredera y manivela. El polígono de velocidades se ilustró en la figura 3-8*b*. Suponiendo que la velocidad dada de la corredera fuera constante, determínense la aceleración absoluta instantánea del punto *D* y las aceleraciones angulares de los eslabones 2 y 3.

SOLUCIÓN El diagrama a escala del mecanismo se ilustra una vez más en la figura 4-7*a*. El polígono de aceleraciones se inicia eligiendo una escala y el polo O_A, como se ve en la figura 4-7*b*. Puesto que la velocidad $\mathbf{V}_C$ se da como constante, su aceleración es cero y, por ende, el punto imagen de aceleración *C* se identifica con O_A.

A continuación se escriben las ecuaciones de la diferencia de aceleración, para la aceleración del punto *B*, relacionándolo con dos puntos cuyas aceleraciones se conocen †, los puntos *C* y *A*,

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_C^0 + \mathbf{A}_{BC}^n + \mathbf{A}_{BC}^t = \mathbf{A}_A^0 + \mathbf{A}_{BA}^n + \mathbf{A}_{BA}^t \qquad (5)$$

Se pueden calcular las magnitudes de las dos componentes normales a partir de la información obtenida del diagrama de posiciones y del polígono de velocidades,

$$A_{BC}^n = \frac{V_{BC}^2}{R_{BC}} = \frac{(7.5 \text{ m/s})}{0.14 \text{ m}} \qquad \text{m s}$$

$$A_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{R_{BA}} = \frac{(10.0 \text{ m/s})^2}{0.05 \text{ m}} = 2\,000 \text{ m/s}^2$$

† Aunque se conocen los puntos imagen de aceleración de *C* y *A*, sería un error inexcusable dibujar una "imagen de aceleraciones" del triángulo *ABC*, porque no todos estos puntos están en el mismo eslabón.

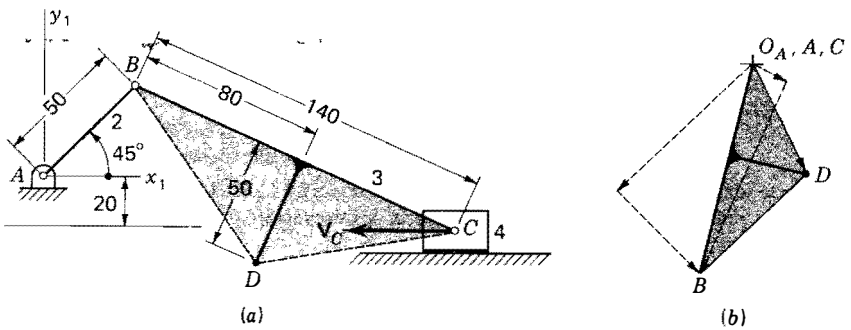


Figura 4-7 Análisis gráfico de aceleración correspondiente a un mecanismo excéntrico de corredera y manivela, ejemplo 4-2 *a*) diagrama a escala (las dimensiones se dan en milímetros) aceleraciones.

Estas se trazan paralelas, pero con sentido opuesto a $\mathbf{R}_{BC}$ y $\mathbf{R}_{BA}$, respectivamente; y se suman a $\mathbf{A}_C$ y $\mathbf{A}_A$, como se muestra mediante las rectas a trazos de la figura 4-7*b*.

Ahora se efectúa la adición de las componentes tangenciales de la (5), trazándolas perpendiculares a $\mathbf{R}_{BC}$ y $\mathbf{R}_{BA}$, respectivamente. Su intersección se identifica como el punto imagen de aceleración *B*.

Dado que se conocen los puntos imagen *B* y *C*, se puede trazar la imagen de aceleraciones del eslabón 3 para localizar el punto imagen *D*. Teniendo cuidado de que la imagen no se voltee, se ilustra sombreada en el polígono de aceleraciones. Ahora se puede medir a escala la aceleración absoluta del punto *D*, desde O_A hasta el punto imagen *D;* y el resultado es

$$A_D = 1300 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Las aceleraciones angulares de los eslabones 2 y 3 se determinan partiendo de las dos componentes tangenciales de la (5)

$$\alpha_2 = \frac{A'_{BA}}{R_{BA}} = \frac{1\,260 \text{ m/s}^2}{0.05 \text{ m}} = 25\,200 \text{ rad/s}^2 \text{ mmr} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\alpha_3 = \frac{A'_{BC}}{R_{BC}} = \frac{2\,300 \text{ m/s}^2}{0.14 \text{ m}} = 16\,400 \text{ rad/s}^2 \text{ cmr} \qquad \textit{Resp.}$$

Nótese que $\boldsymbol{\alpha}_2$ se encuentra en el mismo sentido que el movimiento de las manecillas del reloj, a pesar de que el movimiento de la corredera es hacia la izquierda. Este ejemplo debe ser una advertencia suficiente para aquellos que se sientan inclinados a determinar por intuición las direcciones de las aceleraciones; éstas no son fáciles de imaginar y se deben obtener a partir de principios básicos, en lugar de tratar de adivinarlas. En el ejemplo 3-2 se vio que $\boldsymbol{\omega}_2$ tiene sentido opuesto al del movimiento de las manecillas del reloj, como era de esperarse; el que $\boldsymbol{\alpha}_2$ tenga un sentido igual al del movimiento de las manecillas del reloj revela que el eslabón 2 se está desacelerando en su movimiento de rotación.

4-5 ACELERACIÓN APARENTE DE UN PUNTO EN UN SISTEMA DE COORDENADAS EN MOVIMIENTO

En la sección 3-5 se encontró que era necesario desarrollar la ecuación de la velocidad aparente para situaciones en las que convenía describir la trayectoria por la

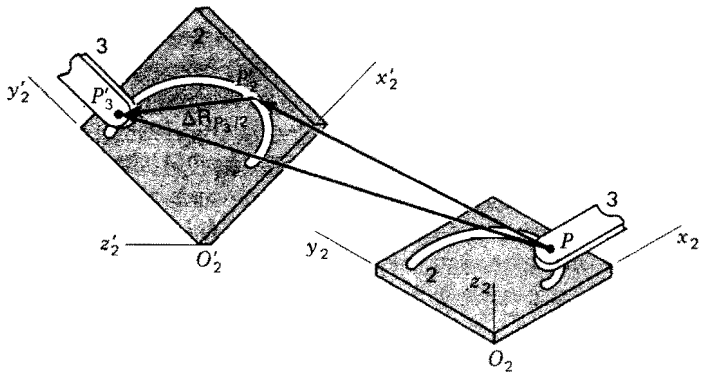


Figura 4-8 Desplazamiento aparente.

que se mueve un punto, en relación con otro eslabón móvil; pero que no convenía describir el movimiento absoluto del mismo punto. Investiguemos ahora la aceleración de un punto de esta naturaleza.

Para hacer un repaso, en la figura 4-8 se ilustra un punto P_3
se mueve siguiendo una trayectoria conocida, la ranura, en relación con el marco de referencia móvil $x_2y_2z_2$. El punto P_2
tantáneamente con el P_3.
aceleraciones de los puntos P_3
sea factible calcular (o medir) en un sistema mecánico típico.

En la figura 4-9 se recuerda cómo percibiría esta misma situación un observador móvil unido al eslabón 2. Para él, la *trayectoria* de P_3, la ranura, parecería estacionaria y le parecería que el punto P_3
la velocidad aparente $\mathbf{V}_{P_3/2}$.

Se recordará que en la sección 3-5 se definió otro sistema de coordenadas móviles $\hat{\boldsymbol{\rho}}\hat{\boldsymbol{\tau}}\hat{\boldsymbol{\nu}}$, en donde $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ se definió como un vector unitario en la dirección del radio vector de curvatura de la trayectoria, $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ se definió como el vector unitario tangente a la trayectoria en P y $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ era normal al plano que contiene a $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ y $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, formando así un sistema derecho de coordenadas cartesianas. Después de definir s como una distancia escalar de arco que mide el desplazamiento de P_3
la trayectoria curva, se dedujo la ecuación (3-9) para la velocidad aparente

$$\mathbf{V}_{P_3/2} = \frac{ds}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}} \qquad (a)$$

Considérese la rotación del radio vector de curvatura; barre cierto ángulo pequeño $\Delta\phi$ conforme P_3

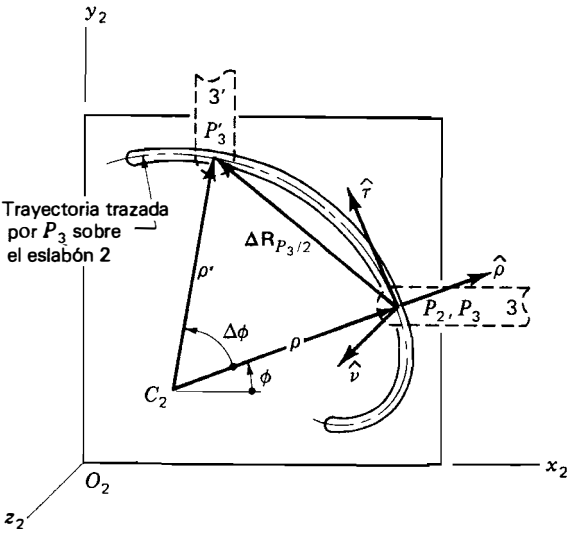


Figura 4-9 Desplazamiento aparente del punto P_3 como lo ve un observador situado sobre el eslabón 2.

breve intervalo de tiempo Δt. El pequeño ángulo y la pequeña distancia están relacionados mediante la expresión

$$\Delta\phi = \frac{\Delta s}{\rho}$$

Si esto se divide entre Δt y se toma el límite para un Δt infinitamente pequeño se encuentra que

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{V_{P_3/2}}{\rho} \tag{b}$$

Esta es la rapidez angular a la que parece girar el radio vector de curvatura $\boldsymbol{\rho}$ (y también $\hat{\boldsymbol{\tau}}$), tal como lo ve un observador móvil en el sistema de coordenadas 2, conforme el punto P_3 se desplaza a lo largo de su trayectoria. Se puede dar a esta rapidez de rotación sus propiedades vectoriales apropiadas como una velocidad angular aparente, observando que el eje de esta rotación es paralelo a $\hat{\boldsymbol{\nu}}$. Por consiguiente, se define

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \frac{d\phi}{dt}\hat{\boldsymbol{\nu}} = \frac{V_{P_3/2}}{\rho}\hat{\boldsymbol{\nu}} \tag{c}$$

A continuación se intenta hallar la derivada respecto al tiempo del vector unitario $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, de tal modo que se pueda derivar la ecuación (*a*). En vista de que $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es un vector unitario, su longitud no cambia; no obstante, tiene una derivada debido a su cambio de dirección, esto es, su rotación. En el sistema absoluto de coordenadas, $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ está sujeto a la rotación $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ y también a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, con la que está girando el sistema de coordenadas móvil 2. Por ende,

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\phi}}) \times \hat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} + \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{d}$$

Pero, cuando se usa la ecuación (*c*), esta expresión se convierte en

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{V_{P_3/2}}{\rho}\hat{\boldsymbol{\nu}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} - \frac{V_{P_3/2}^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{e}$$

Ahora, si se toma la derivada respecto al tiempo de la (*a*), se encuentra que

$$\frac{d\mathbf{V}_{P_3/2}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{ds}{dt}\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} - \frac{ds}{dt}\frac{V_{P_3/2}}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

y, al aplicar la (*a*), esto se reduce a

$$\frac{d\mathbf{V}_{P_3/2}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{P_3/2} - \frac{V_{P_3/2}^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{f}$$

Nótese que los tres términos de la ecuación anterior *no* se definen como las componentes de la aceleración aparente. Para ser coherente, el término *aceleración*

aparente debe incluir sólo aquellas componentes *que serían vistas por un observador fijo al sistema móvil de coordenadas.* La ecuación anterior se deduce en el sistema absoluto de coordenadas e incluye el efecto de rotación de $\boldsymbol{\omega}$, que no sería detectado por el observador móvil. No obstante, se puede encontrar con facilidad la aceleración aparente, a la que se le da la notación $\mathbf{A}_{P_3/2}$, igualando a cero a $\boldsymbol{\omega}$ en la (*f*). Esto da las dos componentes restantes

$$\mathbf{A}_{P_3/2} = \mathbf{A}^n_{P_3/2} + \mathbf{A}^t_{P_3/2} \tag{4-9}$$

en donde

$$\mathbf{A}^n_{P_3/2} = -\frac{V^2_{P_3/2}}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{4-10}$$

recibe el nombre de *componente normal* indicando que siempre es normal a la trayectoria y está dirigida hacia el centro de curvatura (la dirección $-\hat{\boldsymbol{\rho}}$), en tanto que

$$\mathbf{A}^t_{P_3/2} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{4-11}$$

se conoce como *componente tangencial,* indicando que siempre es tangente a la trayectoria (la dirección $\hat{\boldsymbol{\tau}}$).

A continuación se observa que el radio vector de curvatura $\boldsymbol{\rho}$ gira tanto a causa de $\boldsymbol{\omega}$ como de $\dot{\boldsymbol{\phi}}$. Por ende, su derivada es†

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\phi}}) \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{V}_{P_3/2} \tag{g}$$

Ahora se puede escribir la ecuación de posición basándose en la figura 4-9,

$$\mathbf{R}_{P_3} = \mathbf{R}_{C_2} + \boldsymbol{\rho}$$

y con la ayuda de la (*g*), se puede tomar su derivada respecto al tiempo‡

$$\mathbf{V}_{P_3} = \mathbf{V}_{C_2} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{V}_{P_3/2} \tag{h}$$

Al derivar una vez más esta ecuación con respecto al tiempo, se obtiene

$$\mathbf{A}_{P_3} = \mathbf{A}_{C_2} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} + \frac{d\mathbf{V}_{P_3/2}}{dt}$$

y, con la ayuda de las ecuaciones (*f*) y (*g*), esto se convierte en

$$\mathbf{A}_{P_3} = \mathbf{A}_{C_2} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{P_3/2} - \frac{V^2_{P_3/2}}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{i}$$

† Nótese que la magnitud de $\boldsymbol{\rho}$ se trata como constante en la cercanía del punto *P*, debido a su definición. En realidad, no es una constante, sino un valor estacionario; su segunda derivada es diferente de cero, pero la primera es cero en el instante considerado.

‡ El primero de los dos términos de la ecuación (*h*) es igual a $\mathbf{V}_{P_2}$; de donde, es equivalente a la ecuación de la velocidad aparente. No obstante, nótese que aun cuando $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R}_{P_2C_2}$, sus derivadas no son iguales; y no giran a la misma velocidad. Por consiguiente, faltarían algunos de los términos de la siguiente ecuación si, por el contrario, se derivara la ecuación de la velocidad aparente.

Los primeros tres términos de esta ecuación se reconocen como las componentes de $\mathbf{A}_{P_2}$ y los dos últimos términos como los componentes de la aceleración aparente $\mathbf{A}_{P_3/2}$. Por lo tanto, se define un símbolo para el término restante,

$$\mathbf{A}^c_{P_3P_2} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{P_3/2} \tag{4-12}$$

Este término recibe el nombre de *componente de Coriolis de la aceleración.* Es evidente que se trata de un término de la ecuación de la aceleración aparente. Sin embargo, a diferencia de lo que pasa con las componentes de $\mathbf{A}_{P_3/2}$, no la percibe un observador en movimiento que se encuentre fijo en el sistema móvil de coordenadas 2. Con todo, sigue siendo un término en la (*i*) y forma parte de la diferencia entre $\mathbf{A}_{P_3}$ y $\mathbf{A}_{P_2}$ detectadas por un observador absoluto.

Con la definición, la (*i*) se puede escribir de la siguiente manera, conocida como *ecuación de la aceleración aparente.*

$$\mathbf{A}_{P_3} = \mathbf{A}_{P_2} + \mathbf{A}^c_{P_3P_2} + \mathbf{A}^n_{P_3/2} + \mathbf{A}^t_{P_3/2} \tag{4-13}$$

en donde las definiciones de las componentes individuales son las expresadas en las ecuaciones (4-10) a (4-12).

En las aplicaciones es importante en extremo reconocer ciertas características de esta ecuación: 1) Satisface los objetivos de esta sección porque relaciona las aceleraciones de dos puntos coincidentes de diferentes eslabones, en una forma significativa. 2) Sólo existe una nueva incógnita entre las tres componentes nuevas definidas. Las componentes normal y de Coriolis se pueden calcular a partir de las ecuaciones (4-10) y (4-12) basándose en la información sobre la velocidad, no contribuyen con nuevas incógnitas. No obstante, la componente tangencial $\mathbf{A}^t_{P_3/2}$, tendrá casi siempre una magnitud desconocida en la aplicación, puesto que no se puede encontrar d^2s/dt^2. 3) Es importante hacer notar la dependencia de la (4-13) respecto a la capacidad de reconocer en cada aplicación la trayectoria que traza P_3 sobre el sistema de coordenadas 2. Esta trayectoria constituye la base para las direcciones de las componentes normal y tangencial, y también es necesaria para determinar ρ para la (4-10).

Por último, una advertencia, *la trayectoria descrita por P_3 sobre el eslabón 2 no es necesariamente la misma que la descrita por P_2 sobre el eslabón 3.* En la figura 4-9, la trayectoria de P_3 sobre el eslabón 2 es muy clara, es la ranura curva. La trayectoria de P_2 sobre el eslabón 3 no es clara en lo absoluto. Como resultado de ello existe una manera natural correcta e incorrecta de escribir la ecuación de la aceleración aparente para dicha situación. La ecuación

$$\mathbf{A}_{P_2} = \mathbf{A}_{P_3} + \mathbf{A}^c_{P_2P_3} + \mathbf{A}^n_{P_2/3} + \mathbf{A}^t_{P_2/3}$$

es perfectamente válida; pero *inútil*, porque se desconoce ρ para la componente normal. Nótese asimismo que $\mathbf{A}^c_{P_3P_2}$ emplea $\boldsymbol{\omega}_2$, mientras que $\mathbf{A}^c_{P_2P_3}$ usa $\boldsymbol{\omega}_3$. Se debe tener cuidado extremo al escribir la ecuación apropiada para cada aplicación, identificando la trayectoria conocida.

Ejemplo 4-3 En la figura 4-10 se representa un bloque, 3, que se desliza hacia afuera sobre el eslabón 2, con una rapidez uniforme de 30 m/s, mientras que el eslabón 2 está girando con una velocidad angular constante de 50 rad/s cmr. Determínese la aceleración absoluta del punto A del bloque.

SOLUCIÓN En primer lugar calcúlese la aceleración absoluta del punto coincidente A_2, que está inmediatamente debajo del bloque; pero perteneciente al eslabón 2,

$$\mathbf{A}_{A_2} = \mathbf{A}_{O_2}^{0} + \mathbf{A}^{n}_{A_2O_2} + \mathbf{A}^{t}_{A_2O_2}$$

$$A^{n}_{A_2O_2} = \omega_2^2 R_{A_2O_2} = (50 \text{ rad/s})^2(500 \text{ mm}) = 1\,250 \text{ m/s}^2$$

Se construye la gráfica de esta expresión, determinando el punto imagen de aceleración A_2. Luego se reconoce que el punto A_3 está restringido a desplazarse sólo a lo largo del eje del eslabón 2. Esto proporciona una trayectoria para la que se puede escribir la ecuación de la aceleración aparente,

$$\mathbf{A}_{A_3} = \mathbf{A}_{A_2} + \mathbf{A}^{c}_{A_3A_2} + \mathbf{A}^{n}_{A_3/2} + \mathbf{A}^{t}_{A_3/2}$$

Los términos de esta ecuación se calculan como sigue y se suman gráficamente en el polígono de aceleraciones,

$$A^{c}_{A_3A_2} = 2\omega_2 V_{A_3/2} = 2(50 \text{ rad/s})(30 \text{ m/s}) = 3\,000 \text{ m/s}^2$$

$$A^{n}_{A_3/2} = \frac{V^2_{A_3/2}}{\rho} = \frac{(30 \text{ m/s})^2}{\infty} = 0$$

$$A^{t}_{A_3/2} = \frac{d^2s}{dt^2} = 0 \qquad \text{rapidez uniforme a lo largo de la trayectoria}$$

Esto localiza el punto imagen de aceleración A_3 y el resultado es

$$A_{A_3} = 3\,250 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 4-4 Hágase un análisis de aceleración del eslabonamiento ilustrado en la figura 4-11, para la velocidad constante de entrada $\omega_2 = 18$ rad/s mmr.

SOLUCIÓN En primer lugar se realiza un análisis completo de velocidad, como se indica en la figura. Esto da

$$V_A = 12 \text{ pie/s} \qquad V_{B_3A} = 10.1 \text{ pie/s} \qquad V_{B_3/4} = 6.5 \text{ pie/s}$$

$$\omega_3 = \omega_4 = 7.77 \text{ rad/s mmr}$$

Para hallar las aceleraciones, primero se encuentra

$$\mathbf{A}_A = \mathbf{A}_{O_2}^{0} + \mathbf{A}^{n}_{AO_2} + \mathbf{A}^{t}_{AO_2}$$

$$A^{n}_{AO_2} = \omega_2^2 R_{AO_2} = (18 \text{ rad/s})^2\left(\frac{8}{12} \text{ pie}\right) = 216 \text{ pie/s}^2$$

y trácese la gráfica de esto para localizar el punto imagen de aceleración A. Luego escríbase la ecuación de la diferencia de aceleración,

$$\mathbf{A}_{B_3} = \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}_A + \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}^{n}_{B_3A} + \overset{\bullet\vee}{\mathbf{A}}^{t}_{B_3A} \qquad (1)$$

$$A^{n}_{B_3A} = \frac{V^2_{B_3A}}{R_{BA}} = \frac{(10.1 \text{ pie/s})^2}{15.6/12 \text{ pie}} = 78.5 \text{ pie/s}^2$$

El término $\mathbf{A}^{n}_{B_3A}$ está dirigido de B hacia A y se agregan al polígono de aceleraciones, como se indica. El término $\mathbf{A}^{t}_{B_3A}$ tiene magnitud desconocida, pero es perpendicular $\mathbf{R}_{BA}$.

Puesto que la (1) tiene tres incógnitas, no se puede resolver; de donde, se busca una segunda

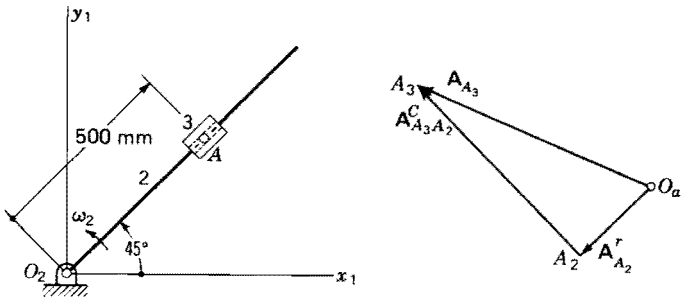


Figura 4-10 Ejemplo 4-3.

ecuación para A_{B_3}. Considérese la perspectiva de un observador situado en el eslabón 4; éste podría ver al punto B_3 moviéndose sobre una trayectoria rectilínea a lo largo de la línea central del bloque. Con esta trayectoria, ahora se puede escribir la ecuación de la aceleración aparente

$$\mathbf{A}_{B_3} = \mathbf{A}^{0}_{B_4} + \mathbf{A}^{C}_{B_3B_4} + \mathbf{A}^{n}_{B_3/4} + \mathbf{A}^{t}_{B_3/4} \qquad (2)$$

En vista de que el punto B_4 está sujeto mediante pasador al eslabón de base, tiene aceleración cero. Las otras componentes de la ecuación (2) son

$$A^{C}_{B_3B_4} = 2\omega_4 V_{B_3/4} = 2(7.77 \text{ rad/s})(6.5 \text{ pie/s}) = 101 \text{ pie/s}^2$$

$$A^{n}_{B_3/4} = \frac{V^2_{B_3/4}}{\rho} = \frac{(6.5 \text{ pie/s})^2}{\infty} = 0$$

La componente de Coriolis se agrega al polígono de aceleraciones originándose en el mismo punto B_4 (O_A), como se muestra. Por último, se suma $\mathbf{A}^{t}_{B_3/4}$, cuya magnitud se conoce, gráficamente a ésta en la dirección definida por la tangente a la trayectoria. Esta última cruza la recta desconocida de $\mathbf{A}^{t}_{B_3A}$, ecuación (1), localizando así el punto imagen de aceleración B_3. Cuando el polígono se mide a escala, se encuentra que los resultados son

$$A^{t}_{B_3/4} = 103 \text{ pie/s}^2 \qquad A^{t}_{B_3A} = 16 \text{ pie/s}^2 \qquad A_{B_3} = 144 \text{ pie/s}^2$$

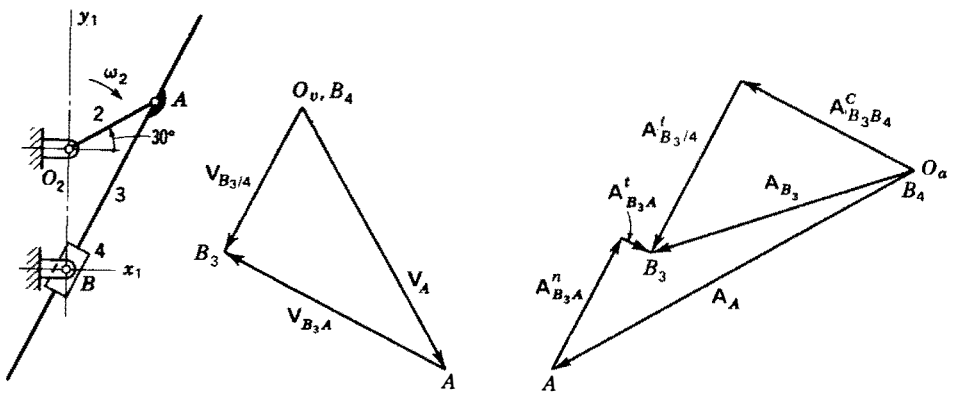


Figura 4-11 Ejemplo 4-4: $R_{AO_2} = 8$ pulg, $R_{BO_2} = 10$ pulg.

Las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4 son

$$\alpha_4 = \alpha_3 = \frac{A^t_{B_3A}}{R_{BA}} = \frac{16 \text{ pie/s}^2}{15.6/12 \text{ pie}} = 12.3 \text{ rad/s}^2 \text{ cmr}$$

En este ejemplo se observa que se pueden imaginar tanto la trayectoria de B_3 sobre el eslabón 4 como la de B_4 sobre el eslabón 3 y que pudo haberse usado cualquiera de ellas al decidir el planteamiento. Sin embargo, aun cuando B_4 está sujeto a la base (eslabón 1), se desconoce la trayectoria del punto B_3 sobre el eslabón 1. Por ende, no se puede calcular en forma directa el término $\mathbf{A}^n_{B3/1}$.

Ejemplo 4-5 En el ejemplo 3-3 (Fig. 3-11) se realizó el análisis de velocidad del mecanismo invertido de corredera-manivela ilustrado en la figura 4-12. Determínese la aceleración angular del eslabón 4, si el eslabón 2 se impulsa con una velocidad constante.

SOLUCIÓN Revisando el ejemplo 3-3 se recordará que

$$V_{A_2} = 9 \text{ pie/s} \quad V_{AD} = 7.24 \text{ pie/s} \quad V_{A_2/4} = 5.52 \text{ pie/s}$$
$$\omega_2 = 36 \text{ rad/s mmr} \quad \omega_3 = \omega_4 = 7.55 \text{ rad/s cmr}$$

Para analizar las aceleraciones se principia escribiendo

$$\mathbf{A}_{A_2} = \mathbf{A}^0_E + \mathbf{A}^n_{AE} + \mathbf{A}^{t\,0}_{AE}$$
$$A^n_{AE} = \omega_2^2 R_{AE} = (36 \text{ rad/s})^2 \left(\frac{3}{12} \text{ pie}\right) = 324 \text{ pie/s}^2$$

y se traza la gráfica de esto como se muestra en la figura.

A continuación se observa que el punto A_2 se desplaza recorriendo la trayectoria rectilínea ilustrada, en relación con un observador situado en el eslabón 4. Conociendo esta trayectoria, se escribe

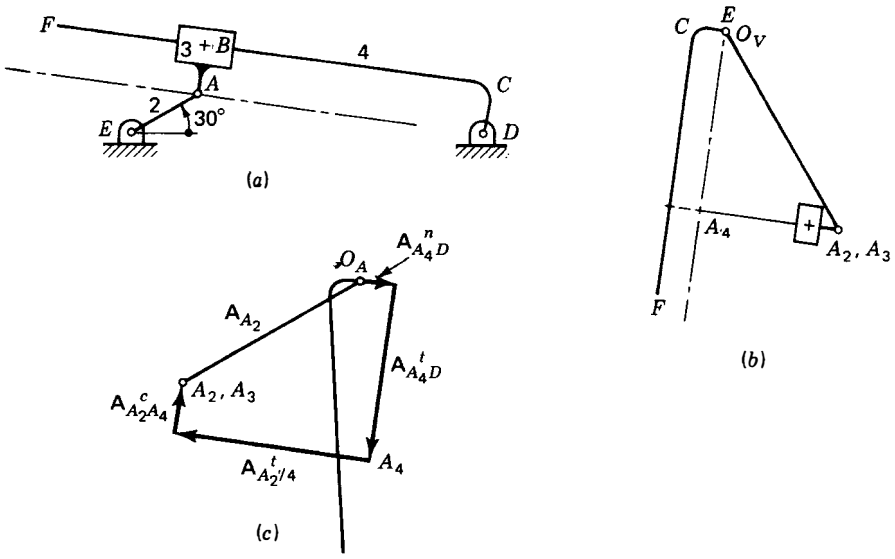


Figura 4-12 Ejemplo 4-5

$$\overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}_{A_2} = \overset{o\vee}{\mathbf{A}}_{A_4} + \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}^{c}_{A_2A_4} + \cancel{\mathbf{A}^{n}_{A_2/4}}^{0} + \overset{o\vee}{\mathbf{A}}^{t}_{A_2/4} \tag{3}$$

en donde $A^n_{A_2/4} = 0$ ya que $\rho = \infty$ y

$$\mathbf{A}_{A_4} = \cancel{\mathbf{A}_D}^{0} + \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}^{n}_{A_4D} + \overset{o\vee}{\mathbf{A}}^{t}_{A_4D}$$

$$A^n_{A_4D} = \frac{V^2_{A_4D}}{R_{A_4D}} = \frac{(7.24\ \text{pie/s})^2}{11.6/12\ \text{pie}} = 54.2\ \text{pie/s}^2 \tag{4}$$

El término $\mathbf{A}^n_{A_4D}$ se suma a partir de O_A, seguido por una recta de longitud desconocida correspondiente a $\mathbf{A}^t_{A_4D}$. Puesto que no se conoce aún el punto imagen A_4, no se pueden sumar los términos $\mathbf{A}^c_{A_2A_4}$ y $\mathbf{A}^t_{A_2/4}$ como lo exige la (3). No obstante, se pueden transferir estos dos términos al otro miembro de la ecuación (3) y restarse gráficamente del punto de imagen A_2, completando así el polígono de aceleraciones. Ahora se puede hallar la aceleración angular del eslabón 4,

$$\alpha_4 = \frac{A^t_{A_4D}}{R_{AD}} = \frac{284\ \text{pie/s}}{11.6/12\ \text{pie}} = 294\ \text{rad/s}^2\ \text{cmr} \qquad \textit{Resp.}$$

Esta necesidad de restar los vectores es común en problemas de aceleración que comprenden la componente de Coriolis y se deben estudiar con extremo cuidado. Nótese que no se puede emplear la ecuación opuesta que comprende a $A^n_{A_4/2}$ en vista de que ρ y, por ende, $A^n_{A_4/2}$ sería una incógnita adicional (la tercera).

4-6 ACELERACIÓN ANGULAR APARENTE

Aunque rara vez resulta útil, para tener el cuadro completo, se sugiere que también se defina el término *aceleración angular aparente.* Cuando dos cuerpos rígidos giran con aceleraciones angulares diferentes, la diferencia vectorial entre ellos se define como la aceleración angular aparente,

$$\boldsymbol{\alpha}_{3/2} = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2$$

La ecuación de la aceleración angular aparente también puede escribirse

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_{3/2} \tag{4-14}$$

Se observará que $\boldsymbol{\alpha}_{3/2}$ es la aceleración angular del cuerpo 3, como aparecería ante un observador fijo en el cuerpo 2 y que gira con él.

4-7 CONTACTO DIRECTO Y CONTACTO POR RODADURA

Por lo que se explicó en la sección 3-7, se recordará que el movimiento relativo entre dos cuerpos en contacto directo puede ser de dos clases; se puede tener una velocidad aparente de deslizamiento entre los cuerpos, o bien, puede no existir tal deslizamiento. El término contacto por rodadura se definió de tal manera que implicara que no es posible deslizamiento alguno y se desarrolló la condición de contacto por rodadura, ecuación (3-13), a fin de indicar que la velocidad aparente en un punto de este tipo es cero. Ahora se pretende investigar la aceleración aparente en un punto de contacto por rodadura.

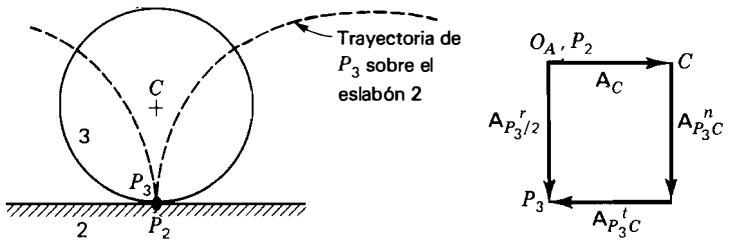


Figura 4-13 Contacto por rodadura.

Considérese el caso de una rueda circular en contacto por rodadura con otro eslabón recto, como se ilustra en la figura 4-13. Aunque se reconoce que se trata de un caso muy simplificado, los argumentos que se desarrollen y las conclusiones a las que se llegue son completamente generales y se aplican a cualquier situación de contacto por rodadura, sin importar las formas de los dos cuerpos o si cualquiera de ellos es el eslabón de base. Para mantener este concepto claro en la mente, al eslabón base se le ha asignado el número 2 en este ejemplo.

Una vez que se da la aceleración $\mathbf{A}_C$ del punto central de la rueda, se puede elegir el polo O_A y se puede comenzar el polígono de aceleraciones trazando $\mathbf{A}_C$. No obstante, al relacionar las aceleraciones de los puntos P_3 y P_2, en el punto de contacto por rodadura, se están manejando dos puntos coincidentes de cuerpos diferentes. Por lo tanto, se puede pensar en aplicar la ecuación de la aceleración aparente. Para esto, es preciso identificar la trayectoria que describe uno de estos puntos sobre el otro cuerpo. En la figura aparece ilustrada la trayectoria† que el punto P_3 describe sobre el eslabón 2. Aunque la forma precisa de la trayectoria depende de las formas de los dos eslabones en contacto, siempre se tendrá una cúspide en el punto de contacto por rodadura, y la tangente a esta trayectoria puntiaguda será siempre perpendicular a las superficies en contacto.

Puesto que se conoce esta trayectoria, ya es posible escribir la ecuación de la aceleración aparente

$$\mathbf{A}_{P_3} = \mathbf{A}_{P_2} + \mathbf{A}^c_{P_3P_2} + \mathbf{A}^n_{P_3/2} + \mathbf{A}^t_{P_3/2}$$

Al evaluar las componentes, se debe tener presente la condición de velocidad de contacto por rodadura, a saber $\mathbf{V}_{P_3}$

$$A^c_{P_3P_2} = 2\omega_2 V_{P_3/2} = 0 \qquad \text{y} \qquad A^n_{P_3/2} = \frac{V^2_{P_3/2}}{\rho} = 0$$

De donde, sólo una componente de la aceleración aparente, $\mathbf{A}^t_{P_3/2}$, puede ser diferente de cero.

Debido a la confusión posible de llamar componente tangencial (tangente a la trayectoria puntiaguda) a este término diferente de cero, mientras que su dirección es normal a las superficies rodantes, se adoptará un nuevo superíndice y se le

† Esta curva en particular se conoce con el nombre de *cicloide*.

llamará *aceleración de contacto por rodadura* $\mathbf{A}^r_{P_3/2}$. Por consiguiente, en el caso de contacto por rodadura, la ecuación de la aceleración aparente se transforma en

$$\mathbf{A}_{P_3} = \mathbf{A}_{P_2} + \mathbf{A}^r_{P_3/2} \tag{4-15}$$

y se sabe que el término $\mathbf{A}^r_{P_3/2}$ tiene siempre una dirección perpendicular a las superficies en el punto de contacto por rodadura.

Para entender mejor el método gráfico para el análisis de la aceleración de mecanismos de contacto directo y de contacto por rodadura, se contrastarán las soluciones de dos ejemplos muy similares.

Ejemplo 4-6 Dado el dibujo a escala y el análisis de velocidad de la leva circular de contacto directo, con sistema de seguidor oscilante de cara plana, ilustrado en la figura 4-14*a*, determinese la aceleración angular del seguidor en el instante que se muestra. La velocidad angular de la leva es $\omega_2 = 10$ rad/s mmr y su aceleración angular es $\alpha_2 = 25$ rad/s^2 mmr.

SOLUCIÓN En la figura 4-14*c* se ilustra el polígono de velocidades del sistema de leva y seguidor.

El polígono de aceleraciones, figura 4-14*d*, se principia calculando la aceleración del punto B_2 y construyendo su gráfica, en relación con el punto A

$$\mathbf{A}_{B_2} = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}^n_{B_2A} + \mathbf{A}^t_{B_2A} \tag{1}$$

$$A^n_{B_2A} = \frac{V^2_{B_2A}}{R_{B_2A}} = \frac{(30\text{ pulg/s})^2}{3\text{ pulg}} = 300\text{ pulg/s}^2$$

$$A^t_{B_2A} = \alpha_2 R_{B_2A} = (25\text{ rad/s}^2)(3\text{ pulg}) = 75\text{ pulg/s}^2$$

Estas se representan gráficamente como se indica y se encuentra el punto imagen de aceleración C_2 construyendo la imagen de aceleración del triángulo AB_2C_2.

Si se procede como se hizo en la sección 3-7, se encontraría a continuación la velocidad del punto C_3. Si se intenta este planteamiento al análisis de aceleración, la ecuación es

$$\mathbf{A}_{C_2} = \mathbf{A}_{C_3} + \mathbf{A}^c_{C_2C_3} + \mathbf{A}^n_{C_2/3} + \mathbf{A}^t_{C_2/3} \tag{2}$$

y se basa en la trayectoria que traza el punto C_2 sobre el eslabón 3, presentada en la figura 4-14*a*. No obstante, este método resulta inútil porque se desconoce el radio de curvatura de esta trayectoria y, por ende, es imposible calcular $A^n_{C_2/3}$. Para evitar este problema se toma un camino distinto; es decir, se busca otro par de puntos coincidentes en donde se conozca la curvatura de la trayectoria.

Si se considera la trayectoria trazada por el punto B_2 sobre el eslabón 3 (extendido), se verá que sigue estando a una distancia constante de la superficie; es una recta. Este nuevo planteamiento se concibe mejor si se considera el mecanismo ilustrado en la figura 4-14*b*, y se observa que posee un movimiento equivalente al original. Habiendo imaginado así una ranura en el mecanismo equivalente como una trayectoria, queda perfectamente aclarado cómo se debe proceder; la ecuación apropiada es

$$\mathbf{A}_{B_2} = \mathbf{A}_{B_3} + \mathbf{A}^c_{B_2B_3} + \mathbf{A}^n_{B_2/3} + \mathbf{A}^t_{B_2/3} \tag{3}$$

en donde B_3 es un punto coincidente con B_2, pero situado en el eslabón 3. En vista de que la trayectoria es una recta,

$$A^n_{B_2/3} = \frac{V^2_{B_2/3}}{\rho} = \frac{(50\text{ pulg/s})^2}{\infty} = 0$$

$$A^c_{B_2B_3} = 2\omega_2 V_{B_2/3} = 2(10\text{ rad/s})(50\text{ pulg/s}) = 1000\text{ pulg/s}^2$$

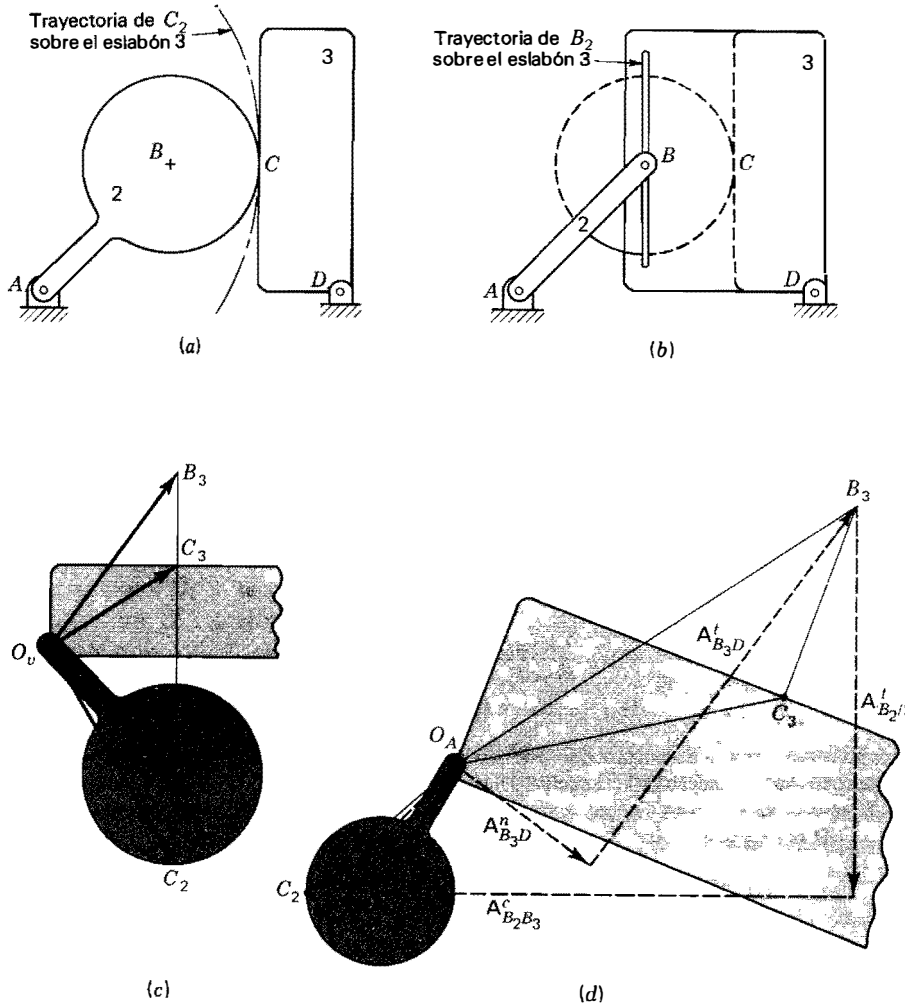


Figura 4-14 Ejemplo 4-6.

Se puede hallar la aceleración de B_3 a partir de

$$\mathbf{A}_{B_3} = \mathbf{A}_D^{\,0} + \mathbf{A}^n_{B_3D} + \mathbf{A}^t_{B_3D} \tag{4}$$

en donde

$$A^n_{B_3D} = \frac{V^2_{B_3D}}{R_{B_3D}} = \frac{(35.4\ \text{pulg/s})^2}{3.58\ \text{pulg}} = 350\ \text{pulg/s}^2$$

Al hacer las sustitución de la ecuación (4) en la (3), y reacomodando los términos, se llega a una ecuación que sólo tiene dos incógnitas,

$$\overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}_{B_2} - \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}^c_{B_2B_3} - \overset{\circ\vee}{\mathbf{A}}^t_{B_2/3} = \overset{\vee\vee}{\mathbf{A}}^n_{B_3D} + \overset{\bullet\vee}{\mathbf{A}}^t_{B_3D} \tag{5}$$

Esta ecuación se resuelve gráficamente como se ilustra en la figura 4-14*d*. Una vez que se ha encontrado el punto imagen B_3, se encuentra con facilidad C_3, construyendo la imagen de ace-

leración del triángulo DB_3C_3, incluido por completo en el eslabón 3. Se ha ampliado la figura 4-14*d* para presentar las imágenes de aceleración completas de los eslabones 2 y 3, con el fin de lograr una mejor representación e ilustrar una vez más que no existe una relación obvia entre las ubicaciones finales de los puntos imagen C_2 y C_3, como lo sugiere la ecuación (2).

Finalmente, se puede determinar la aceleración angular del eslabón 3 como sigue:

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{B_3D}}{R_{B_3D}} = \frac{938 \text{ pulg/s}^2}{3.58 \text{ pulg}} = 262 \text{ rad/s}^2 \text{ mmr} \quad \textit{Resp.} \tag{6}$$

A continuación consideramos otro problema ejemplo que está íntimamente relacionando con el anterior.

Ejemplo 4-7 Dado el dibujo a escala y el análisis de velocidad del rodillo circular, que rueda sin resbalar sobre el seguidor oscilante de cara plana ilustrado en la figura 4-15*a*, determínense las aceleraciones angulares tanto del seguidor como del rodillo, en el instante indicado. La velocidad angular del eslabón 2 es $\omega_2 = 10$ rad/s mmr y su aceleración angular es $\alpha_2 = 25$ rad/s^2 mmr.

SOLUCIÓN En la figura 4-15*b* aparece el polígono de velocidades completo. El análisis de aceleración se desarrolla exactamente como se indica en el ejemplo anterior. Una vez más, resulta inútil proceder en principio con las ecuaciones correspondientes a las aceleraciones de los puntos

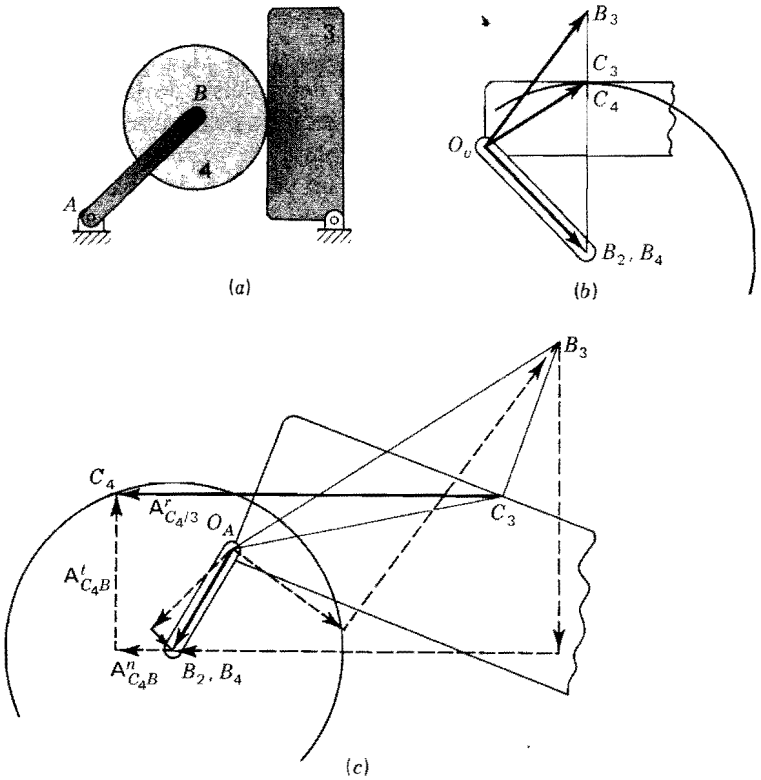


Figura 4-15 Ejemplo 4-7.

C_3 y C_4, una vez más es preciso usar el mecanismo equivalente de la figura 4-14*b*. Sólo se debe considerar la condición de contacto por rodadura después de que se ha encontrado la aceleración del punto C_3

Luego se puede relacionar el punto de aceleración C_4 con la del punto B_4,

$$\mathbf{A}_{C_4} = \mathbf{A}_{B_4} + \mathbf{A}^n_{C_4B_4} + \mathbf{A}^t_{C_4B_4}$$

$$A^n_{C_4B_4} = \frac{V^2_{C_4B_4}}{R_{CB}} = \frac{(14.8 \text{ pulg/s})^2}{1.50 \text{ pulg}} = 146 \text{ pulg/s}^2 \tag{7}$$

También se puede escribir la ecuación de la aceleración del contacto por rodadura (4-15) para esta situación

$$\mathbf{A}_{C_4} = \mathbf{A}_{C_3} + \mathbf{A}^r_{C_4C_3} \tag{8}$$

Recordando que $\mathbf{A}^r_{C_4C_3}$ es perpendicular a las superficies en el punto C, se puede construir gráficamente las soluciones simultáneas para las ecuaciones (7) y (8) ilustradas en la figura (4-15*c*).

Por último, se puede hallar la aceleración del rodillo como se indica a continuación

$$\alpha_4 = \frac{A^t_{C_4B_4}}{R_{CB}} = \frac{406 \text{ pulg/s}^2}{1.50 \text{ pulg}} = 271 \text{ rad/s}^2 \text{ cmr} \qquad \textit{Resp.} \tag{9}$$

La aceleración angular del eslabón 3 es idéntica a la que se determinó en el ejemplo 4-6,

$$\alpha_3 = 262 \text{ rad/s}^2 \text{ mmr} \quad \textit{Resp.}$$

4-8 MÉTODOS ANALÍTICOS DEL ANÁLISIS DE LA ACELERACIÓN

En esta sección se extienden los métodos analíticos del análisis de la velocidad desarrollados en las secciones 3-8 y 3-9 para incluir el análisis de las aceleraciones.

El método de Raven se basa en el álgebra compleja. Se recordará la forma general de la primera derivada respecto al tiempo de un vector bidimensional, expresado en forma compleja polar, de la ecuación (3-14),

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{R}e^{j\theta} + j\dot{\theta}Re^{j\theta} \tag{a}$$

Derivando una vez más con respeto al tiempo, se obtiene la forma general de la segunda derivada respecto al tiempo

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{R}e^{j\theta} + j2\dot{\theta}\dot{R}e^{j\theta} - \dot{\theta}^2Re^{j\theta} + j\ddot{\theta}Re^{j\theta} \tag{4-16}$$

Para ilustrar el método de Raven, analicemos el mecanismo excéntrico de corredera y manivela que aparece en la figura 4-16. Para los símbolos definidos en ella, la ecuación de cierre del circuito es

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \tag{b}$$

en donde r_1, $\theta_1 = -90°$, r_2, r_3, y $\theta_4 = 0$ son constantes. El ángulo θ_2 es el ángulo de la entrada impulsada y se supone que es conocido. Si se aplican los métodos de las secciones 2-8 y 3-8 se encuentra que la posición desconocida y las variables de velocidad son

$$\theta_3 = -\operatorname{sen}^{-1}\frac{r_1 + r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_3} \tag{4-17}$$

$$r_4 = r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 \tag{4-18}$$

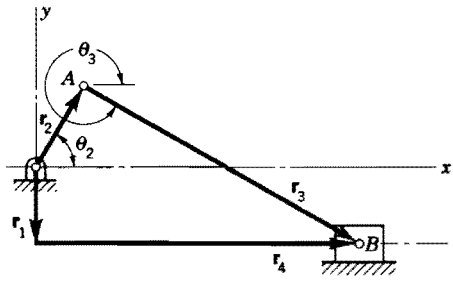


Figura 4-16 Mecanismo excéntrico de corredera y manivela.

$$\dot{\theta}_3 = -\frac{r_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3}\,\dot{\theta}_2 \tag{4-19}$$

$$\dot{r}_4 = -r_2 \operatorname{sen} \theta_2\, \dot{\theta}_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3\, \dot{\theta}_3 \tag{4-20}$$

Las aceleraciones se calculan aplicando la forma general, ecuación (4-16), para tomar la segunda derivada respecto al tiempo de la ecuación de cierre del circuito. Esto da

$$\ddot{r}_4 e^{j0} = j\ddot{\theta}_2 r_2 e^{j\theta_2} - \dot{\theta}_2^2 r_2 e^{j\theta_2} + j\ddot{\theta}_3 r_3 e^{j\theta_3} - \dot{\theta}_3^2 r_3 e^{j\theta_3} \tag{c}$$

Aplicando la fórmula de Euler para separar esta ecuación compleja polar en sus componentes real e imaginaria, se obtiene

$$\ddot{r}_4 = -\ddot{\theta}_2 r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 r_2 \cos \theta_2 - \ddot{\theta}_3 r_3 \operatorname{sen} \theta_3 - \dot{\theta}_3^2 r_3 \cos \theta_3 \tag{d}$$

$$0 = \ddot{\theta}_2 r_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 r_2 \operatorname{sen} \theta_2 + \ddot{\theta}_3 r_3 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_3^2 r_3 \operatorname{sen} \theta_3 \tag{e}$$

Estas dos ecuaciones se pueden resolver simultáneamente para las dos incógnitas de aceleración, $\ddot{\theta}_3$ y $\ddot{r}_4$,

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{-r_2 \cos \theta_2\, \ddot{\theta}_2 + r_2 \operatorname{sen} \theta_2\, \dot{\theta}_2^2 + r_3 \operatorname{sen} \theta_3\, \dot{\theta}_3^2}{r_3 \cos \theta_3} \tag{4-21}$$

$$\ddot{r}_4 = -r_2 \operatorname{sen} \theta_2\, \ddot{\theta}_2 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3\, \ddot{\theta}_3 - r_2 \cos \theta_2\, \dot{\theta}_2^2 - r_3 \cos \theta_3\, \dot{\theta}_3^2 \tag{4-22}$$

La solución se considera ahora completa, puesto que las ecuaciones (4-17) a (4-22) se pueden evaluar numéricamente (en ese orden) para cada ángulo de la manivela, θ_2, dadas las dimensiones r_1, r_2, y r_3 y la velocidad y aceleración de entrada, $\dot{\theta}_2$ y $\ddot{\theta}_2$.

Sin embargo, como preparación para el estudio de la dinámica del motor de combustión interna, que se desarrollará en el capítulo 14, conviene señalar que, con las sustituciones de lo expresado en las ecuaciones (4-17), (4-19) y (4-21), y tras muchas operaciones adicionales, las ecuaciones (4-20) y (4-22) se pueden escribir como

$$\dot{r}_4 = r_2 \frac{\operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{\cos \theta_3}\,\dot{\theta}_2 \tag{4-23}$$

$$\ddot{r}_4 = r_2 \frac{\operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{\cos \theta_3}\,\ddot{\theta}_2 - r_2 \frac{\cos(\theta_3 - \theta_2)}{\cos \theta_3}\,\dot{\theta}_2^2 - \frac{r_2^2 \cos^2 \theta_2}{r_3 \cos^3 \theta_3}\,\dot{\theta}_2^2 \tag{4-24}$$

Si se toma el caso del mecanismo radial de corredera y manivela ($r_1 = 0$) y se supone que r_3 es mucho mayor que r_2 ($\cos\theta_3 \approx 1$), se obtienen las siguientes soluciones aproximadas

$$\dot{r}_4 \approx -r_2\left(\operatorname{sen}\theta_2 + \frac{r_2}{2r_3}\operatorname{sen}2\theta_2\right)\dot{\theta}_2 \tag{4-25}$$

$$\ddot{r}_4 \approx -r_2\left(\operatorname{sen}\theta_2 + \frac{r_2}{2r_3}\operatorname{sen}2\theta_2\right)\ddot{\theta}_2 - r_2\left(\cos\theta_2 + \frac{r_2}{r_3}\operatorname{sen}2\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2 \tag{4-26}$$

A continuación se presenta otro ejemplo que servirá para ilustrar el método de Raven.

Ejemplo 4-8 Desarróllese una expresión angular para la aceleración angular de la manivela de salida de un eslabonamiento de cuatro barras.

SOLUCIÓN Puesto que se trata de una continuación del ejemplo 3-5, ya se conocen las soluciones para la posición y la velocidad. La ecuación de cierre del circuito se toma de ese ejemplo y la rotación corresponde a la figura 2-13:

$$R_{BA}e^{j\theta_2} + R_{CB}e^{j\theta_3} = R_{DA} + R_{CD}e^{j\theta_4} \tag{1}$$

Recordando que todas las longitudes son constantes, se aplica la (4-16) para tomar la segunda derivada respecto al tiempo. Esto da

$$-\dot{\theta}_2^2 R_{BA}e^{j\theta_2} + j\ddot{\theta}_2 R_{BA}e^{j\theta_2} - \dot{\theta}_3^2 R_{CB}e^{j\theta_3} + j\ddot{\theta}_3 R_{CB}e^{j\theta_3} = -\dot{\theta}_4^2 R_{CD}e^{j\theta_4} + j\ddot{\theta}_4 R_{CD}e^{j\theta_4} \tag{2}$$

Las operaciones subsecuentes se facilitan más si esta ecuación se divide entre $e^{j\theta_3}$

$$-\dot{\theta}_2^2 R_{BA}e^{j(\theta_2-\theta_3)} + j\ddot{\theta}_2 R_{BA}e^{j(\theta_2-\theta_3)} - \dot{\theta}_3^2 R_{CB} + j\ddot{\theta}_3 R_{CB} = -\dot{\theta}_4^2 R_{CD}e^{j(\theta_4-\theta_3)} + j\ddot{\theta}_4 R_{CD}e^{j(\theta_4-\theta_3)} \tag{3}$$

Debido a esta rotación del eje real, la componente real de la ecuación (3) no contiene a la incógnita $\ddot{\theta}_3$,

$$-\dot{\theta}_2^2 R_{BA}\cos(\theta_2-\theta_3) - \ddot{\theta}_2 R_{BA}\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_3) - \dot{\theta}_3^2 R_{CB} = -\dot{\theta}_4^2 R_{CD}\cos(\theta_4-\theta_3) - \ddot{\theta}_4 R_{CD}\operatorname{sen}(\theta_4-\theta_3) \tag{4}$$

y se puede resolver con suma facilidad para $\ddot{\theta}_4$,

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{R_{BA}\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_3)\ddot{\theta}_2 + R_{BA}\cos(\theta_2-\theta_3)\dot{\theta}_2^2 + R_{CB}\dot{\theta}_3^2 - R_{CD}\cos(\theta_4-\theta_3)\dot{\theta}_4^2}{R_{CD}\operatorname{sen}(\theta_4-\theta_3)} \quad \textit{Resp.} \tag{4-27}$$

Si la (2) se divide entre $e^{j\theta_4}$ y se toman las componentes reales, se puede encontrar también una solución para θ_3,

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{R_{BA}\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_4)\ddot{\theta}_2 + R_{BA}\cos(\theta_2-\theta_4)\dot{\theta}_2^2 + R_{CB}\cos(\theta_4-\theta_3)\dot{\theta}_3^2 - R_{CD}\dot{\theta}_4^2}{R_{CB}\operatorname{sen}(\theta_4-\theta_3)} \tag{4-28}$$

Los dos ejemplos anteriores muestran que, como se señaló en el caso de las ecuaciones de velocidades de la sección 3-8, se repite el hecho de que las ecuaciones de aceleraciones siempre son lineales en las incógnitas. Por consiguiente, su solución, aunque quizá algo tediosa, también es directa.

El método de Chace para el análisis de la aceleración comprende las derivadas de vectores unitarios. Según la (3-21), la primera derivada respecto al tiempo de un vector típico **R** es

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{R}\hat{\mathbf{R}} + \omega R(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{R}}) \qquad (f)$$

en donde $\omega\hat{\mathbf{k}}$ es la velocidad angular del vector **R.** Derivando una vez más con respecto al tiempo da

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{R}\hat{\mathbf{R}} + \dot{R}\dot{\hat{\mathbf{R}}} + \dot{\omega}R(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{R}}) + \omega\dot{R}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{R}}) + \omega R(\hat{\mathbf{k}} \times \dot{\hat{\mathbf{R}}}) \qquad (g)$$

No obstante, si $\dot{\omega}$ se identifica como α, la aceleración angular del vector **R**, y se aplica la (3-20), esto se reduce a

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{R}\hat{\mathbf{R}} + 2\omega\dot{R}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{R}}) - \omega^2 R\hat{\mathbf{R}} + \alpha R(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{R}}) \qquad (4\text{-}29)$$

Esta es una expresión general para la segunda derivada respecto al tiempo de cualquier vector bidimensional.†

Se ilustrará el método de Chace para el análisis de la aceleración, obteniendo las aceleraciones en el mecanismo invertido de corredera manivela que se ilustra en la figura 3-15. La ecuación de cierre del circuito es

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4 \qquad (h)$$

Utilizando la forma general, ecuación (4-29), y reconociendo que r_1, r_2, y $\hat{\mathbf{r}}_1$ son constantes, se toma la segunda derivada del tiempo de la ecuación (h)

$$-\omega_2^2 r_2\hat{\mathbf{r}}_2 + \alpha_2 r_2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) = \ddot{r}_4\hat{\mathbf{r}}_4 + 2\omega_4\dot{r}_4(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) - \omega_4^2 r_4\hat{\mathbf{r}}_4 + \alpha_4 r_4(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) \qquad (i)$$

Puesto que se conocen las soluciones de la posición y la velocidad, por lo visto en la sección 3-9, y puesto que se dan ω_2 y α_2 como las condiciones de manivela de entrada, las dos únicas incógnitas en esta ecuación son $\ddot{r}_4$ y α_4.

Como se hizo en el análisis de velocidad al aplicar el método de Chace, se trata de eliminar una de las incógnitas mediante la elección cuidadosa de las direcciones a lo largo de las cuales se toman las componentes. Notando que

$$\hat{\mathbf{r}}_4 \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) = 0 \qquad \text{y} \qquad (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) = 1$$

se toma el producto escalar de cada término de la ecuación (i) con $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4$, para eliminar $\ddot{r}_4$

$$-\omega_2^2 r_2\hat{\mathbf{r}}_2 \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) + \alpha_2 r_2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) = 2\omega_4\dot{r}_4 + \alpha_4 r_4 \qquad (j)$$

de lo cual se despeja α_4,

$$\alpha_4 = \alpha_2 \frac{r_2}{r_4}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) - \omega_2^2 \frac{r_2}{r_4}\hat{\mathbf{r}}_2 \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_4) - \frac{2\omega_4}{r_4}\dot{r}_4 \qquad (k)$$

† La restricción bidimensional se debe a la suposición de que $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ es igual a $\hat{\mathbf{k}}$.

Del mismo modo, se puede tomar el producto escalar de la (*l*) con $\hat{\mathbf{r}}_4$ y se elimina a α_4. Esto da

$$\ddot{r}_4 = \alpha_2 r_2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 - \omega_2^2 r_2 \hat{\mathbf{r}}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 + \omega_4^2 r_4 \qquad (l)$$

4-9 CENTRO INSTANTÁNEO DE ACELERACIÓN

Aunque de poca ayuda en el análisis, conviene definir el *centro instantáneo de aceleración,* o *polo de aceleración,* para un mecanismo de movimiento plano, aunque sólo sea por evitar la implicación de que el centro instantáneo de velocidad también es el centro instantáneo de aceleración. Este último se define como *la ubicación instantánea de un par de puntos coincidentes de dos cuerpos rígidos diferentes, en donde las aceleraciones absolutas de los dos puntos son iguales.* Si se considera un cuerpo fijo y otro móvil, el centro instantáneo de aceleración es el punto del cuerpo en movimiento que posee una aceleración absoluta igual a cero en el instante considerado.

En la figura 4-17*a*, sea *P* el centro instantáneo de aceleración, un punto de aceleración absoluta cero cuya ubicación se desconoce. Supóngase que otro punto, *A*, del plano móvil tiene una aceleración conocida $\mathbf{A}_A$ y que se conocen $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ del plano móvil. Entonces se puede escribir la ecuación de la diferencia de aceleración,

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_A - \omega^2 \mathbf{R}_{PA} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}_{PA} = 0 \qquad (a)$$

Despejando $\mathbf{A}_A$, se obtiene

$$\mathbf{A}_A = \omega^2 R_{PA} \hat{\mathbf{R}}_{PA} - \alpha R_{PA}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{R}}_{PA}) \qquad (b)$$

Ahora, puesto que $\hat{\mathbf{R}}_{PA}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{R}}_{PA}$, los dos términos de la derecha de la (*b*) son las componentes rectangulares de $\mathbf{A}_A$, como se ilustra en la figura 4-17*b*. Tomando esta figura como base, se puede obtener la magnitud y la dirección de $\mathbf{R}_{PA}$

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\omega^2} \qquad (4\text{-}30)$$

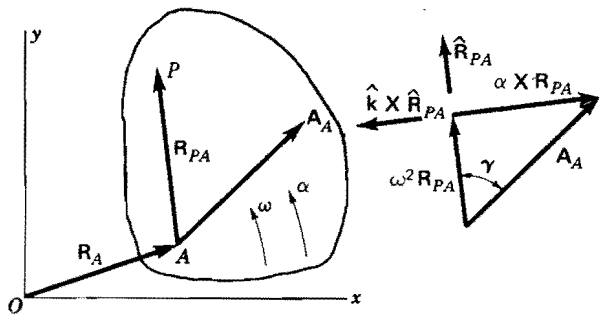


Figura 4-17 Centro instantáneo de aceleración.

$$R_{PA} = \frac{A_A}{\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}} = \frac{A_A \cos \gamma}{\omega^2} \tag{4-31}$$

La ecuación (4-31) afirma que se puede hallar la distancia R_{PA}, del punto A hasta el centro instantáneo de aceleración, partiendo de la magnitud de la aceleración A_A de *cualquier* punto del plano en movimiento. Puesto que el denominador ω^2 siempre es positivo, el ángulo γ siempre es agudo.

Hay muchos métodos gráficos para localizar el centro instantáneo de aceleración.† Aquí se presenta un método sin incluir su demostración. En la figura 4-18 se dan los puntos A y B y sus aceleraciones absolutas $\mathbf{A}_A$ y $\mathbf{A}_B$. Prolónguense $\mathbf{A}_A$ y $\mathbf{A}_B$ hasta que se intersequen en Q; constrúyase luego un círculo que pase por los puntos A, B y Q. Dibújese ahora otro círculo que pase por los extremos de $\mathbf{A}_A$ y $\mathbf{A}_B$, y el punto Q. La intersección de los dos círculos sitúa al punto P que es el centro instantáneo de aceleración.

4-10 ECUACIONES DE EULER-SAVARY‡

En la sección 4-5 se desarrolló la ecuación de la aceleración aparente (4-13). Luego, en los ejemplos que siguieron, se encontró que era de suma importancia el hecho de elegir un punto cuya trayectoria aparente fuera conocida, de tal modo que

† N. Rosenauer y A.H. Willis, *Kinematics of Mechanisms,* Associated General Publications, Sidney, Australia, 1953, pp. 145-156; reeditado por Dover, New York, 1967; K. Hain (traducido por T.P. Goodman y otros), *Applied Kinematics* 2a. ed., McGraw-Hill, New York, 1967, pp. 149-158.

‡ Las referencias más importantes y útiles sobre este tema son Rosenauer y Willis, *op. cit.*, cap. 4; A.E.R. de Jonge, "A Brief Account of Modern Kinematics", *Trans. ASME,* vol. 65, 1943, pp. 663-683; R.S. Hartenberg y J. Denavit, *Kinematics Synthesis of Linkages,* McGraw-Hill, New York, 1964, cap. 7; A.S. Hall, Jr., *Kinematics and Linkage Design,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961, cap. 5 (este libro es realmente una obra clásica sobre la teoría de los mecanismos y contiene muchos ejemplos útiles); Hain, *op. cit.*, cap. 4.

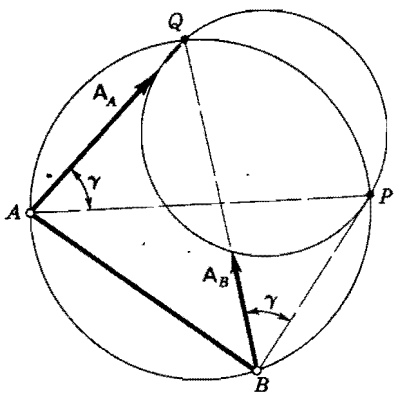


Figura 4-18 Método de los cuatro círculos para localizar el centro instantáneo de aceleración P.

pudiera hallarse por simple observación el radio de curvatura de la trayectoria, necesario para la componente normal de la ecuación (4-10). Esta necesidad de conocer el radio de curvatura de la trayectoria dicta a menudo el método de planteamiento para resolver este tipo de problemas, como en la figura 4-6*b*, y en ocasiones necesita incluso la concepción de un mecanismo equivalente. Sería más conveniente si se pudiera escoger un punto arbitrario y calcular el radio de curvatura de su trayectoria. En mecanismos planos se logra esto aplicando los métodos que se presentan a continuación.

Cuando dos cuerpos rígidos se mueven en relación el uno del otro, siguiendo un movimiento plano, cualquier punto A elegido arbitrariamente, uno de ellos, describe una trayectoria o lugar geométrico relativo a un sistema de coordenadas fijo en el otro. En cualquier instante dado existe un punto A', perteneciente al otro cuerpo, que es el centro de curvatura del lugar geométrico de A. Si se toma la inversión cinemática de este movimiento, A' describe también un lugar geométrico relativo al cuerpo que contiene a A, y sucede que A es el centro de curvatura de este lugar geométrico. Por consiguiente, cada punto actúa como el centro de curvatura de la trayectoria trazada por el otro, y se dice que son *conjugados* el uno del otro. La distancia entre estos dos puntos conjugados es el radio de curvatura de cualquiera de los dos lugares geométricos.

En la figura 4-19 se presentan dos círculos cuyos centros son C y C'. Consideremos el círculo con centro en C' como la centroda fija, y el círculo con centro C como la centroda móvil de dos cuerpos que experimentan cierto movimiento plano relativo en particular. En realidad, la centroda fija no lo está necesariamente, sino que pertenece al cuerpo que contiene a la trayectoria cuya curvatura se busca. Tampoco es necesario que las dos centrodas sean círculos; lo único que interesa son los valores instantáneos y, por conveniencia, se supondrá que las centrodas son círculos que se ajustan a las curvaturas de las dos centrodas reales, en la región cercana a su punto de contacto P. Como se señaló en la sección 3-16, cuando los cuerpos que contienen a las dos centrodas poseen un movimiento relativo entre sí, dichas centrodas parecen rodar una en contra de la otra, sin resbalar. Por supuesto, su punto de contacto P es el centro instantáneo de velocidad. Debido a estas propiedades, se puede pensar que las dos centrodas circulares representan realmente las formas de los dos cuerpos en movimiento, si esto ayuda a concebir el movimiento.

Si la centroda móvil tiene cierta velocidad angular dada ω relativa a la centroda fija, la velocidad instantánea† del punto C es

$$V_C = \omega R_{CP} \qquad (a)$$

Del mismo modo, el punto arbitrario A, cuyo punto conjugado A' se desea encontrar, tiene una velocidad de

† Todas las velocidades utilizadas en esta sección son, en realidad, velocidades aparentes relativas al sistema de coordenadas de la centroda fija; se escriben como velocidades absolutas para simplificar la notación.

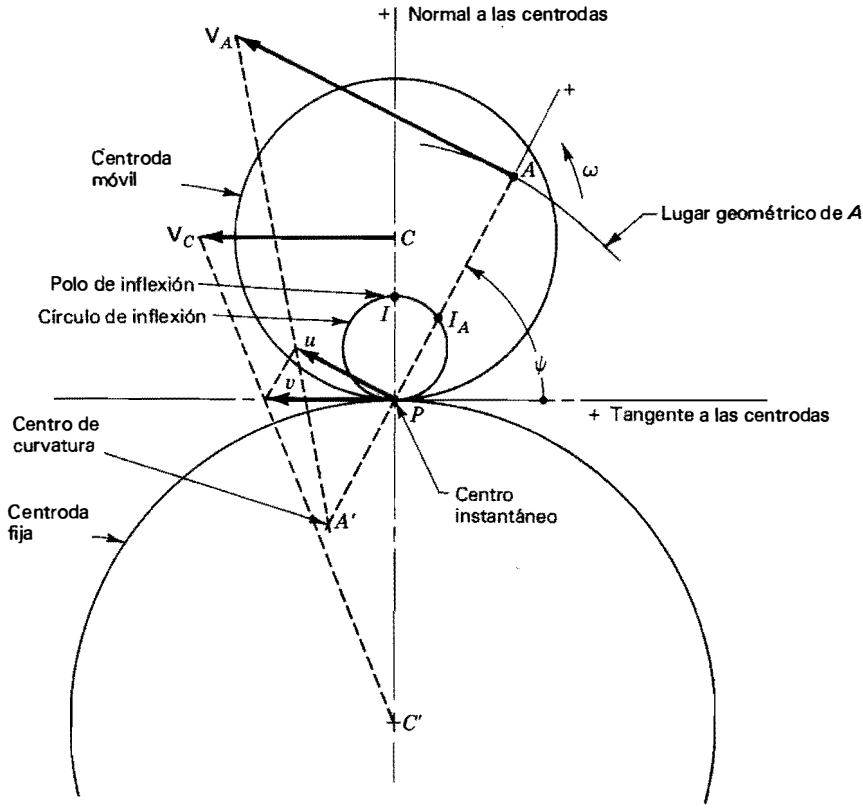


Figura 4-19 Construcción de Hartmann.

$$V_A = \omega R_{AP} \qquad (b)$$

Conforme progresa el movimiento, el punto de contacto de las dos centrodas y, por ende, la ubicación del centro instantáneo P, se mueve a lo largo de ambas centrodas, con cierta velocidad **v**. Como se muestra en la figura, se puede hallar **v** conectando una recta que vaya del extremo de $\mathbf{V}_C$ hasta el punto C'. De otra manera, se puede determinar su magnitud partiendo de

$$v = \frac{R_{PC'}}{R_{CC'}} V_C \qquad (c)$$

En la figura 4-19 se presenta una construcción gráfica para A', el centro de curvatura del lugar geométrico del punto A, y recibe el nombre de *construcción de Hartmann*. En primer lugar, se encuentra la componente **u** de la velocidad **v**, del centro instantáneo, como esa componente paralela a $\mathbf{V}_A$ o perpendicular a $\mathbf{R}_{AP}$. A continuación, la intersección de la recta AP y la recta que conecta a los extremos de las velocidades $\mathbf{V}_A$ y **u** da la ubicación del punto conjugado A'. El radio de curvatura $\boldsymbol{\rho}$ del lugar geométrico del punto A es $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R}_{AA'}$.

También resultaría conveniente una expresión analítica para localizar el punto A', y se puede obtener a partir de la construcción de Hartmann. La magnitud de la velocidad $\mathbf{u}$ está dada por

$$u = v \operatorname{sen} \psi \tag{d}$$

en donde ψ es el ángulo medido desde la tangente a las centrodas a la línea de acción de $\mathbf{R}_{AP}$. Luego, observando los triángulos semejantes de la figura 4-19, se puede escribir también

$$u = \frac{R_{PA'}}{R_{AA'}} V_A \tag{e}$$

Ahora, al igualar las expresiones de las ecuaciones (*d*) y (*e*), y sustituir lo expresado en las ecuaciones (*a*), (*b*) y (*c*), da

$$u = \frac{R_{PC'}R_{CP}}{R_{CC'}} \omega \operatorname{sen} \psi = \frac{R_{PA'}R_{AP}}{R_{AA'}} \omega \tag{f}$$

Si se divide entre ω sen ψ y se invierte, se llega a

$$\frac{R_{AA'}}{R_{AP}R_{PA'}} \operatorname{sen} \psi = \frac{R_{CC'}}{R_{CP}R_{PC'}} = \frac{\omega}{v} \tag{g}$$

Luego, tomando en cuenta que $\mathbf{R}_{AA'} = \mathbf{R}_{AP} - \mathbf{R}_{A'P}$ y $\mathbf{R}_{CC'} = \mathbf{R}_{CP} - \mathbf{R}_{C'P}$, se puede reducir esta ecuación a la forma

$$\left(\frac{1}{R_{AP}} - \frac{1}{R_{A'P}}\right) \operatorname{sen} \psi = \frac{1}{R_{CP}} - \frac{1}{R_{C'P}} \tag{4-32}$$

Esta importante expresión es una de las formas de la *ecuación de Euler-Savary*. Una vez que se conocen los radios de curvatura de las dos centrodas R_{CP} y $R_{C'P}$, se puede aplicar esta ecuación para determinar las posiciones de los dos puntos conjugados A y A' relativas al centro instantáneo P.

Antes de proseguir, es preciso aclarar algo sobre las convenciones de los signos. Cuando se usa la ecuación de Euler-Savary, es factible elegir arbitrariamente un sentido positivo para la tangente a las centrodas; entonces, la normal positiva a las centrodas está entonces a 90° de ella, en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj. Esto establece una dirección positiva para la recta CC' que se puede usar para asignar los signos apropiados a R_{CP} y $R_{C'P}$. De manera análoga, se puede elegir una dirección positiva arbitraria para la recta AA'. Entonces se toma el ángulo ψ como positivo en el sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj, partiendo de la tangente positiva a las centrodas hasta el sentido positivo de la recta AA'. El sentido de la recta AA' da también los signos apropiados para R_{AP} y $R_{A'P}$, para la ecuación (4-32).

Existe un inconveniente importante con la forma anterior de la ecuación de Euler-Savary, en que es preciso encontrar los radios de curvatura de ambas centrodas, R_{CP} y $R_{C'P}$. Por lo general, se desconocen tanto como la curvatura del propio lugar geométrico; puede vencerse esta dificultad buscando una nueva forma de la ecuación.

Consideremos el punto particular identificado como I en la figura 4-19. Este punto se localiza sobre la normal a las centrodas en la posición definida por

$$\frac{1}{R_{IP}} = \frac{1}{R_{CP}} - \frac{1}{R_{C'P}} \qquad (h)$$

Si se elige este punto en particular para A en la (4-32), se encuentra que su punto conjugado I' deben estar localizado en el infinito. El radio de curvatura de la trayectoria del punto I es infinito y el lugar geométrico de I tiene, por ende, un punto de inflexión en I. El punto I se conoce con el nombre de *polo de inflexión.*

Consideremos ahora si hay algunos otros puntos I_A del cuerpo en movimiento que tengan también radios de curvatura infinitos en el instante considerado. Si es así, entonces, para cada uno de dichos puntos, $R_{I_AP} = 0$ y, según las ecuaciones (4-32) y (*h*)

$$R_{I_AP} = R_{IP} \operatorname{sen} \psi \qquad (4\text{-}33)$$

Esta ecuación define un círculo llamado *círculo de inflexión* cuyo diámetro es R_{IP}, como se ilustra en la figura 4-19. Todo punto de este círculo tiene su punto conjugado en el infinito y, por lo tanto, cada uno posee un radio de curvatura infinito en el instante que se muestra.

Ahora, con la ayuda de la (4-33), la ecuación de Euler-Savary se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{R_{AP}} - \frac{1}{R_{A'P}} = \frac{1}{R_{I_AP}} \qquad (4\text{-}34)$$

Asimismo, después de varias operaciones, a esto se le puede dar la forma

$$\rho = R_{AA'} = \frac{R_{AP}^2}{R_{I_AP}} \qquad (4\text{-}35)$$

Cualquiera de estas dos formas de la ecuación de Euler-Savary, (4-34) y (4-35), es más útil en la práctica que la (4-32), ya que no exigen que se conozcan las curvaturas de las dos centrodas. Lo que sí requieren es encontrar el círculo de inflexión; pero en el siguiente ejemplo se demostrará cómo se puede hacer esto.

Ejemplo 4-9 Hállese el círculo de inflexión para el movimiento del acoplador del eslabonamiento de corredera y manivela ilustrado en la figura 4-20, y determínese el radio instantáneo de curvatura de la trayectoria del punto C del acoplador.

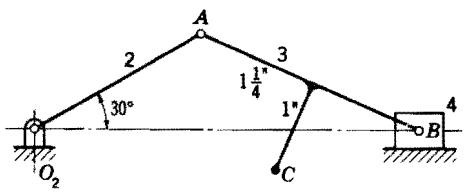


Figura 4-20 Ejemplo 4-9. $R_{AO_2} = 2$ pulg, $R_{BA} = 2.5$ pulg.

SOLUCIÓN Se principia en la figura 4-21 por localizar el centro instantáneo P en la intersección de la recta O_2A y la recta que pasa por B, perpendicular a su dirección de recorrido. Por definición, los puntos B y P deben estar sobre el círculo de inflexión; de donde, sólo se necesita conocer un punto adicional para construir el círculo.

Por supuesto, el centro de curvatura de A se encuentra en O_2, que se llamará ahora A'. Tomando el sentido positivo de la recta AP como descendente y hacia la izquierda, se tiene $R_{AA'} = -2$ pulg y $R_{AP} = 2.64$ pulg. Entonces, al hacer la sustitución correspondiente en la (4-35), se obtiene

$$R_{AI_A} = \frac{R_{AP}^2}{R_{AA'}} = \frac{2.64^2}{-2.00} = -3.48 \text{ pulg} \tag{1}$$

Con esto, se miden 3.48 pulg a partir de A para localizar I_A, un tercer punto sobre el círculo de inflexión. Ahora, se puede construir el círculo que pasa por los tres puntos B, P e I_A, y puede determinarse su diámetro,

$$R_{IP} = 6.28 \text{ pulg.} \quad \textit{Resp.}$$

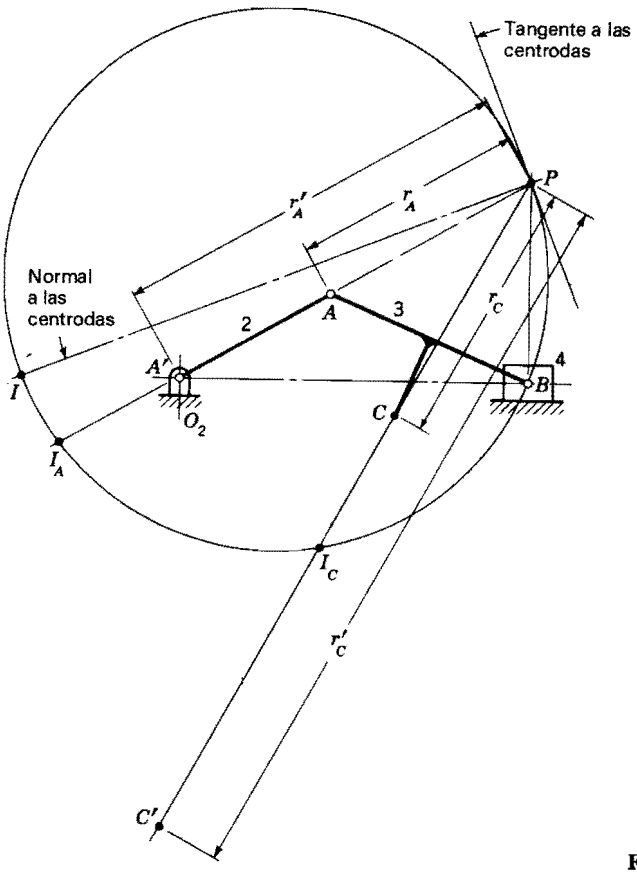


Figura 4-21 Ejemplo 4-9.

También pueden trazarse, si se desea, la normal y la tangente a las centrodas como se ilustra en la figura.

Después, al trazar el rayo R_{CIc} y tomar como su sentido positivo el descendente y hacia la izquierda se puede medir $R_{CP} = 3.1$ pulg y $R_{CIc} = -1.75$ pulg. Al sustituir estos valores en la (4-35), se puede despejar el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria del punto C.

$$\rho = R_{CC'} = \frac{R_{CP}^2}{R_{IcP}} = \frac{3.1^2}{-1.75} = -5.49 \text{ pulg} \quad Resp. \tag{2}$$

en donde el signo negativo indica que C' está debajo de C sobre la recta $C'CP$.

4-11 CONSTRUCCIONES DE BOBILLIER

La construcción de Hartmann, sección 4-10, proporciona un método gráfico para encontrar el punto conjugado y el radio de curvatura de la trayectoria de un punto en movimiento; pero requiere que se conozca la curvatura de las centrodas fija y móvil. Sería conveniente contar con métodos *gráficos* para obtener el círculo de inflexión y el conjugado de un punto dado, sin necesidad de conocer la curvatura de las centrodas. En esta sección se presentan este tipo de soluciones gráficas que reciben el nombre de *construcciones de Bobillier*.

Para entender estas construcciones gráficas, considérese el círculo de inflexión y la normal a las centrodas N así como la tangente a las centrodas T, ilustradas en la figura 4-22. Seleccionemos dos puntos cualesquiera A y B del cuerpo en movimiento, que no estén sobre una recta que pase por P. Ahora, con la ecuación de Euler-Savary, es factible encontrar los dos puntos conjugados correspondientes A' y B'. La intersección de las rectas AB y $A'B'$ se identifica con la letra Q; entonces,

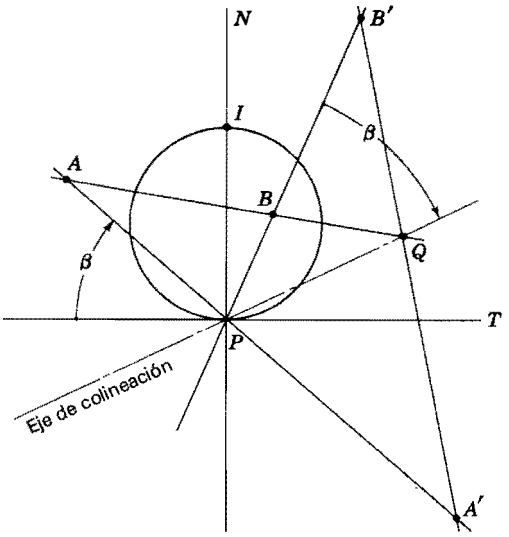


Figura 4-22 Teorema de Bobillier.

la recta que se traza por P y Q se denomina *eje de colineación*. Este eje se aplica sólo a las dos rectas AA' y BB', de modo que se dice que *pertenece* a estos dos rayos; asimismo, el punto Q se localizará en forma distinta sobre el eje de colineación, si se elige otro conjunto de puntos A y B, sobre los mismos rayos. Sin embargo, existe una relación única entre el eje de colineación y los dos rayos usados para definirlo. Esta relación se expresa en el *teorema de Bobillier*, el cual afirma que *el ángulo medido de la tangente a las centrodas hasta uno de estos rayos es el negativo del ángulo medido del eje de colineación hasta el otro rayo*.

Al aplicar la ecuación de Euler-Savary a un mecanismo plano, por lo común se pueden encontrar dos pares de puntos conjugados por simple observación y, a partir de ellos, se busca determinar en forma gráfica el círculo de inflexión. Por ejemplo, un eslabonamiento de cuatro barras con una manivela O_2A y un seguidor O_4B tiene a A y O_2 como un juego de puntos conjugados, y a B y O_4 como el otro, cuando se tiene interés en el movimiento del acoplador en relación con el marco de referencia. Dados estos dos pares de puntos conjugados, ¿cómo se aplica el teorema de Bobillier para hallar el círculo de inflexión ?

En la figura 4-23*a*, supóngase que A y A' y B y B' representan los pares conocidos de puntos conjugados. Los rayos trazados por cada par se intersecan en P, el centro instantáneo de velocidad, dando un punto del círculo de inflexión. El punto Q se localiza a continuación, por medio de la intersección de un rayo que pase por A y B con otro que pase por A' y B'. Después se puede trazar el eje de colineación como la recta PQ.

El siguiente paso se ilustra en la figura 4-23*b*. Al trazar una recta por P, paralela a $A'B'$, se identifica el punto W como la intersección de esta recta con la recta AB. Ahora se hace pasar por W una segunda recta paralela al eje de colineación. Esta recta se interseca con AA' en I_A y con BB' en $I_{B'}$, los dos puntos adicionales del círculo de inflexión que se están buscando.

Ahora se podría construir el círculo por los tres puntos I_A, I_B, y P; pero existe una manera más fácil. Recordando que un triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo recto que tiene al diámetro por hipotenusa, se levanta una perpendicular a AP en I_A y otra a BP en I_B. La intersección de estas dos perpendiculares da el punto I, el polo de inflexión, como se ilustra en la figura 4-23*c*. Puesto que PI es el diámetro, se pueden construir con suma facilidad el círculo de inflexión, la normal a las centrodas N y la tangente a las centrodas T.

Para demostrar que esta construcción satisface el teorema de Bobillier, nótese que el arco que va de P a I_A es inscrito por el ángulo que forma I_AP con la tangente a las centrodas. Pero el mismo arco también es inscrito por el ángulo PI_AI_B; de donde, estos dos ángulos son iguales. Pero la recta I_AI_B se trazó originalmente paralela al eje de colineación; en consecuencia, la recta PI_B forma también el mismo ángulo β con el eje de colineación.

El problema final es aprender a usar el teorema de Bobillier para hallar el conjugado de otro punto arbitrario, por ejemplo C, cuando se da el círculo de inflexión. En la figura 4-24 se une C con el centro instantáneo P y se localiza el punto de intersección I_C con el círculo de inflexión. Este rayo sirve como uno de los

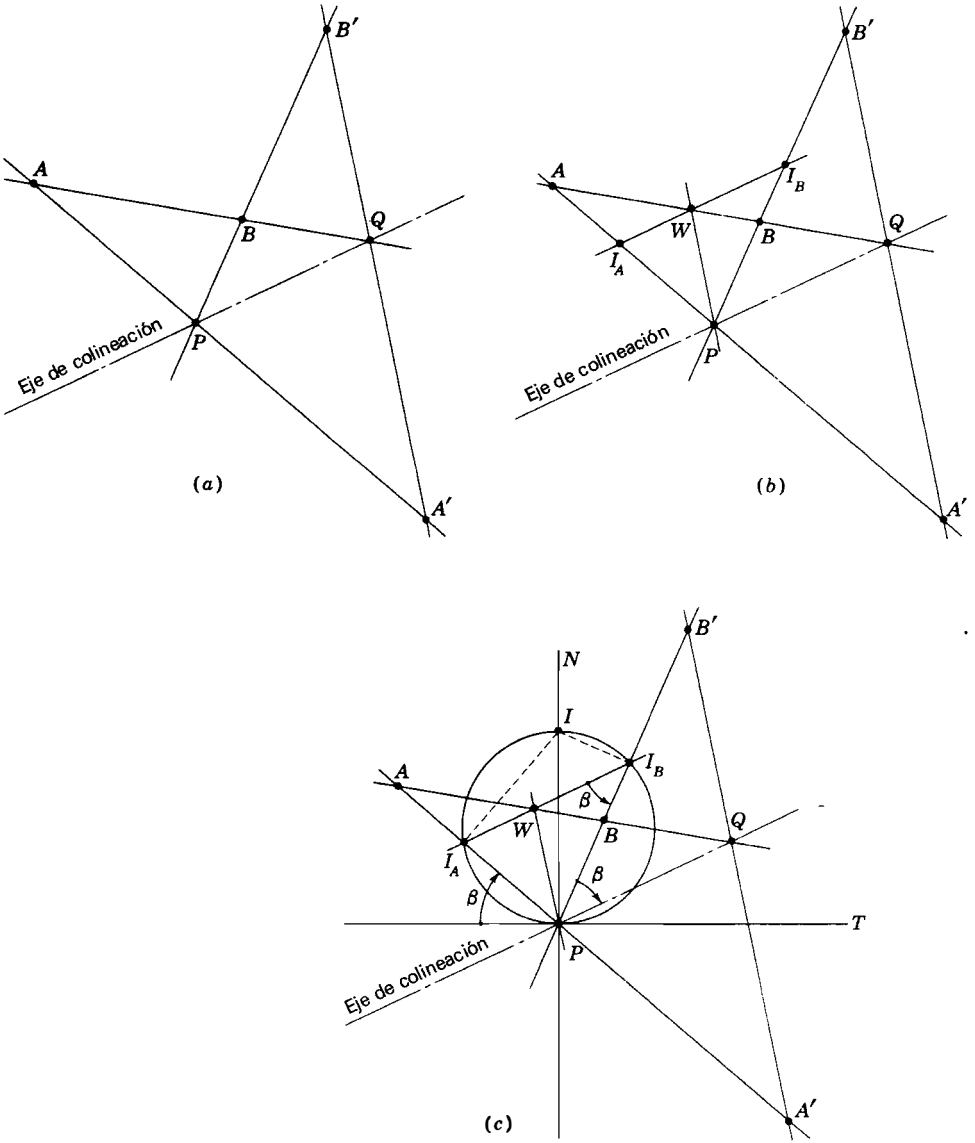


Figura 4-23 Construcción de Bobillier para localizar el círculo de inflexión.

dos que se necesitan para localizar el eje de colineación. Para el otro, se puede usar también la normal a las centrodas, en vista de que se conoce tanto I como su punto conjugado I', en el infinito. Para estos dos rayos, el eje de colineación es una recta que pasa por P, paralela a la recta $I_C I$, como se mostró en la figura 4-23. Lo que falta de la construcción es semejante a la de la figura 4-23. Q se localiza por la in-

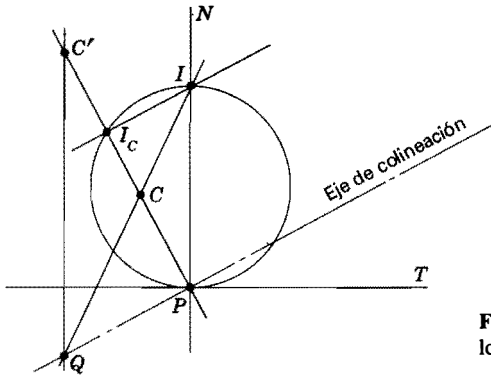


Figura 4-24 Construcción de Bobillier para localizar el punto conjugado C'.

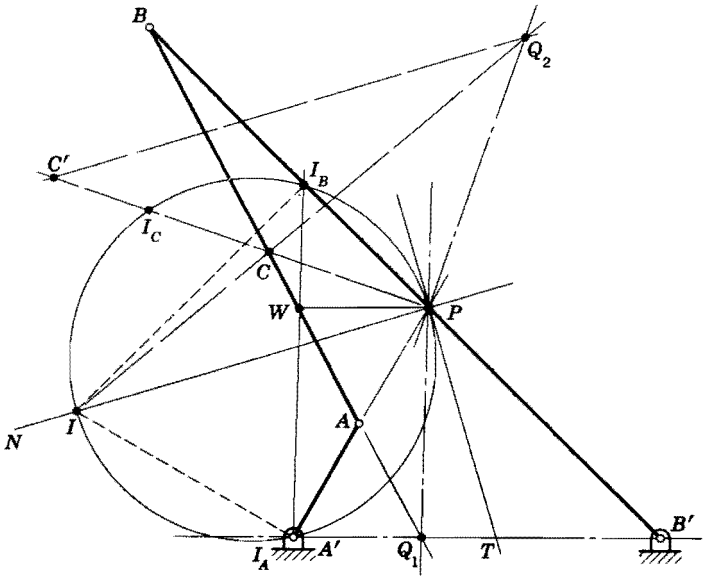


Figura 4-25 Ejemplo 4-10.

tersección de una recta que pase por I y C, con el eje de colineación. Luego, una recta que pase por Q e I', en el infinito se interseca con el rayo PC en C', el punto conjugado para C.

Ejemplo 4-10 Apliquese el teorema de Bobillier para hallar el centro de curvatura de la curva del acoplador del punto C, correspondiente al eslabonamiento de cuatro barras ilustrado en la figura 4-25.

SOLUCIÓN Localícese el centro instantáneo P en la intersección de AA' y BB'; localícese también Q_1 en la intersección de AB y $A'B'$. PQ_1 es el primer eje de colineación. Pasando por P, trácese una recta paralela a $A'B'$ a fin de localizar a W sobre AB. Trácese una recta paralela a

PQ_1, pasando por W, para ubicar a I_A sobre AA' y a I_B sobre BB'. Luego, pasando por I_A, trácese una perpendicular a AA' y, pasando por I_B, una perpendicular a BB'. Estas perpendiculares se intersecan en el polo de inflexión I y definen el círculo de inflexión, la normal a las centrodas N y la tangente a las centrodas T.

Para obtener el punto conjugado de C, trácese el rayo PC y localícese I_C sobre el círculo de inflexión. El segundo eje de colineación PQ_2, perteneciente al par de rayos PC y PI, es una recta que pasa por P, paralela a una recta (suprimida) que va de I a I_C. El punto Q_2 se obtiene como la intersección de este eje de colineación y una recta IC. Ahora, pasando por Q_2, trácese una recta paralela a la normal a las centrodas; su intersección con el rayo PC da C', el centro de curvatura de la trayectoria de C

4-12 CÚBICA DE CURVATURA ESTACIONARIA

Considérese un punto del acoplador de un eslabonamiento plano de cuatro barras que genera una trayectoria relativa al marco de referencia cuyo radio de curvatura, en el instante considerado, es ρ. Puesto que la curva del acoplador, en la mayor parte de los casos, es de sexto orden, este radio de curvatura cambia continuamente conforme el punto se mueve. Sin embargo, en ciertas situaciones, la trayectoria tendrá una curvatura estacionaria, lo cual significa que

$$\frac{d\rho}{ds} = 0 \qquad (a)$$

en donde s es la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria. El lugar geométrico de todos los puntos del acoplador, o el plano en movimiento, que tienen curvatura estacionaria en el instante considerado, recibe el nombre de *cúbica de curvatura estacionaria* o bien, en algunas ocasiones, *curva del punto en circulación*. Se debe observar que la curvatura estacionaria no significa necesariamente curvatura constante, sino más bien que el radio de curvatura que varía continuamente está pasando por un máximo o un mínimo.

Aquí se presentará un método gráfico rápido y simple para obtener la cúbica de curvatura estacionaria, según descripción de Hain.† En la figura 4-26 se tiene el eslabonamiento de cuatro barras $A'ABB'$, en donde A' y B' son los pivotes en el marco. Entonces, A y B poseen una curvatura estacionaria, de hecho, una curvatura constante en torno a los centros en A' y B'; por consiguiente, A y B están sobre la cúbica.

El primer paso de la construcción es obtener la normal a las centrodas y la tangente a las centrodas. Dado que no se necesita el círculo de inflexión, se localiza el eje de colineación PQ como se ilustra, y se traza la tangente a las centrodas T con el ángulo ψ respecto a la recta PB', igual pero con dirección opuesta al ángulo ψ, de la recta PA' al eje de colineación. Esta construcción se deduce directamente del teorema de Bobillier. También se puede construir la normal a las centrodas N. En este punto conviene reorientar el dibujo sobre la mesa, del tal modo que la regla T o la orilla horizontal del aparato de dibujo quede a lo largo de la normal a las centrodas.

†Hain, *op. cit.*, pp. 498-502.

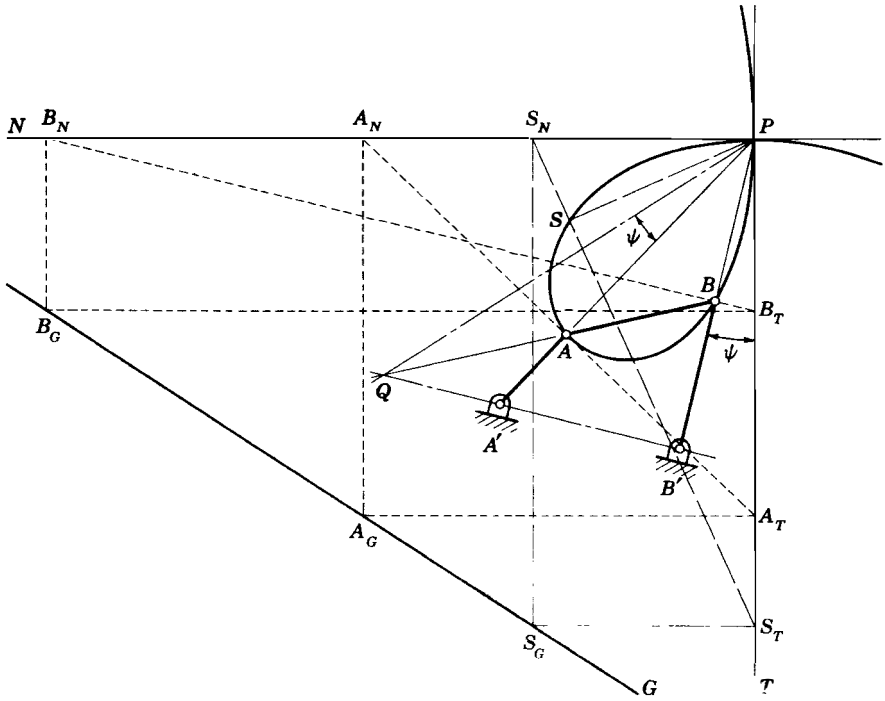


Figura 4-26 Cúbica de curvatura estacionaria.

A continuación se traza una recta que pase por A, perpendicular a PA, y otra que pase por B, perpendicular a PB. Estas rectas se intersecan con la normal a las centrodas y la tangente a las centrodas en A_N, A_T y B_N, B_T, respectivamente, como se muestra en la fig. 4-26. Ahora se dibujan los dos rectángulos $PA_NA_GA_T$ y $PB_NB_GB_T$; los puntos A_G y B_G definen una recta auxiliar G que se usa para obtener otros puntos de la cúbica.

Ahora se elige cualquier punto S_G de la recta G. Un rayo paralelo a N ubica a S_T y otro paralelo a T localiza a S_N. Conéctese S_T con S_N y trácese una perpendicular a esta recta que pase por P; esto ubicará al punto S, otro punto de la cúbica de curvatura estacionaria. Ahora se repite este proceso con la frecuencia que se desee, eligiendo diferentes puntos sobre G, y se traza la cúbica como una curva suave que pase por todos los puntos S así obtenidos.

Nótese que la cúbica de curvatura estacionaria posee dos tangentes en P, *la tangente normal a las centrodas* y *la tangente tangente a las centrodas*. El radio de curvatura de la cúbica en estas tangentes se obtiene como se indica a continuación. Prolónguese G para que se interseque con T en G_T y con N en G_N (no aparece en la ilustración). Luego, la mitad de la distancia PG_T es el radio de curvatura de la cúbica en la tangente normal a las centrodas, y la mitad de la distancia PG_N es el radio de curvatura de la cúbica en la tangente a la tangente de las centrodas.

Se produce un punto con propiedades interesantes en la intersección de la cúbica de curvatura estacionaria con el círculo de inflexión; conocido como *punto de Ball.* Un punto del acoplador coincidente con el punto de Ball describe una trayectoria que es aproximadamente una recta, en virtud de que tiene curvatura estacionaria y se localiza en un punto de inflexión de su trayectoria.

La ecuación de la cúbica de curvatura estacionaria* es

$$\frac{1}{M \operatorname{sen} \psi} + \frac{1}{N \cos \psi} - \frac{1}{r} = 0 \tag{4-36}$$

en donde r es la distancia del centro instantáneo hasta el punto de la cúbica, medida con un ángulo ψ respecto a la tangente a las centrodas. Las constantes M y N se obtienen aplicando dos puntos cualesquiera que se sepa están sobre la cúbica, como por ejemplo, A y B de la figura 4-26. Sucede también† que M y N son, respectivamente, los diámetros PG_T y PG_N de los círculos con centro sobre la tangente a las centrodas y la normal a las centrodas, cuyos radios representan las curvaturas de la cúbica en el centro instantáneo.

PROBLEMAS‡

4-1 El vector de posición de un punto se define mediante la ecuación en donde R se da en pulgadas y t

$$\mathbf{R} = \left(4t - \frac{t^3}{3}\right)\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}}$$

en segundos. Calcúlese la aceleración del punto cuando $t = 2$ s.

4-2 Encuéntrese la aceleración en $t = 3$ s de un punto que se mueve según la ecuación

$$\mathbf{R} = \left(t^2 - \frac{t^3}{6}\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{t^3}{3}\hat{\mathbf{j}}$$

Las unidades son metros y segundos.

4-3 La trayectoria de un punto se describe por la ecuación

$$\mathbf{R} = (t^2 + 4)e^{-i\pi t/10}$$

en donde R se expresa en milímetros y t en segundos. Para $t = 20$ s, encuéntrese el vector tangente unitario para la trayectoria, las componentes normal y tangencial de la aceleración absoluta del punto y el radio de curvatura de la trayectoria.

4-4 El movimiento de un punto se describe mediante las ecuaciones en donde x y y se dan en pies y t en

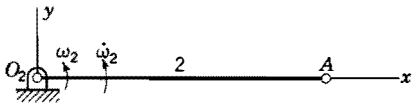
$$x = 4t \cos \pi t^3 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{t^3 \operatorname{sen} 2\pi t}{6}$$

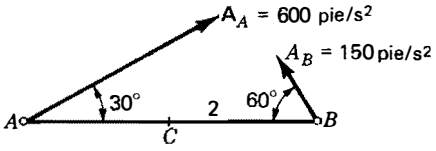
segundos. Calcúlese la aceleración del punto cuando $t = 1.40$ s.

*Si se desea una deducción de esta ecuación, véase Hall, *op. cit.,* pág. 98, o Hartenberg y Denavit, *op. cit.,* p. 206.

† D. C. Tao, *Applied Linkage Synthesis,* Addison, Wesley, Reading, Mass., 1964, p. 111.

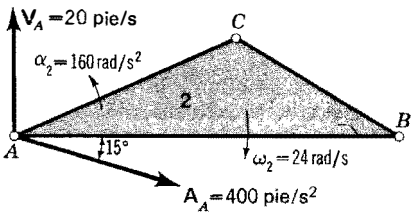
‡Al asignar los problemas, quizá el maestro desee especificar el método de resolución a seguir, en vista de la diversidad de planteamientos que se dan en el texto.



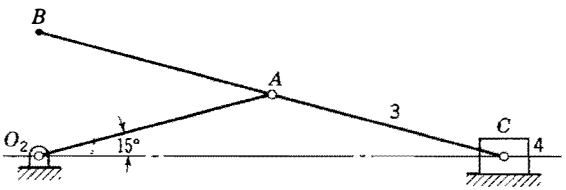


Problema 4-5 $R_{AO_2} = 500$ mm. **Problema 4-6** $R_{BA} = 20$ pulg.

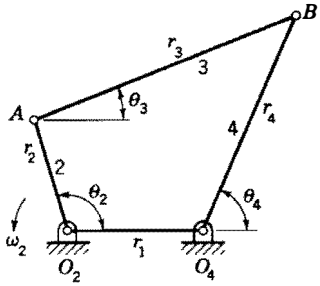
4-5 El eslabón 2 de la figura posee una velocidad angular $\omega_2 = 120$ cmr y una aceleración angular de 4800 rad/s² cmr en el instante que se muestra. Determínese la aceleración absoluta del punto A.
4-6 El eslabón 2 está girando en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj, como se indica en la figura. Encuéntrese su velocidad angular y aceleración, así como la aceleración de su punto medio C.
4-7 Para los datos que se dan en la figura, determínese la velocidad y la aceleración de los puntos B y C.
4-8 En el caso del mecanismo de línea recta ilustrado en la figura, $\omega_2 = 20$ rad/s mmr y $\alpha_2 = 140$ rad/s² mmr. Determínese la velocidad y la aceleración del punto B, y la aceleración angular del eslabón 3.
4-9 En la figura correspondiente, la corredera 4 se está moviendo hacia la izquierda a una velocidad constante de 20 m/s². Calcúlese la velocidad y la aceleración del eslabón 2.
4-10 Resuélvase el problema 3-8 para la aceleración del punto A y la aceleración angular del eslabón 3.
4-11 En el caso del problema 3-9, encuéntrense las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4.
4-12 Resuélvase el problema 3-10 para la aceleración del punto C y las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4.
4-13 Calcúlese la aceleración del punto C y las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4, con los datos del problema 3-11.
4-14 Con los datos del problema 3-13, calcúlense las aceleraciones de los puntos C y D, y la aceleración angular del eslabón 4.
4-15 Con los datos del problema 3-14, calcúlense la aceleración del punto C y la aceleración angular del eslabón 4.
4-16 Resuélvase el problema 3-16 por lo que respecta a la aceleración del punto C y la aceleración angular del eslabón 4.
4-17 Determínese la aceleración del punto B y las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 6, para el problema 3-17.



Problema 4-7 $R_{BA} = 16$ pulg, $R_{CA} = 10$ pulg, $R_{CB} = 8$ pulg.



Problemas 4-8 y 4-9 $R_{AO_2} = R_{CA} = R_{BA} = 100$ mm.

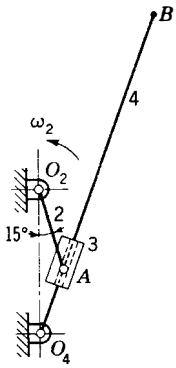


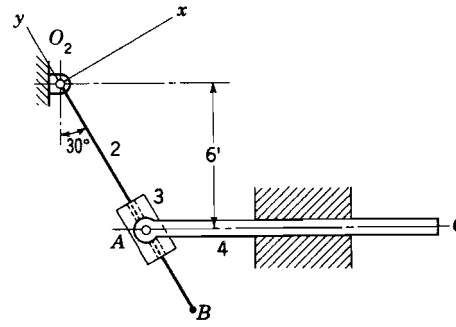
Problemas 4-24 a 4-30

4-18 Con los datos del problema 3-18, ¿qué aceleración angular se le debe dar al eslabón 2 para que en la posición que se muestra la aceleración angular del eslabón 4 sea cero?
4-19 Con los datos del problema 3-19, ¿qué aceleración angular se le debe dar al eslabón 2 para que la aceleración angular del eslabón 4 sea 100 rad/s^2 mmr, en el instante que se muestra?
4-20 Resuélvase el problema 3-20 para la aceleración del punto C y la aceleración angular del eslabón 3.
4-21 Con los datos del problema 3-21, calcúlese la aceleración del punto C y la aceleración angular del eslabón 3.
4-22 Determínese la aceleración de los puntos B y D del problema 3-22.
4-23 Encuéntrense las aceleraciones de los puntos B y D del problema 3-23.
4-24 a 4-30 La nomenclatura para este grupo de problemas se indica en la figura, y las dimensiones y los datos aparecen en la tabla adjunta. En cada caso, se deben determinar los valores de θ_3, θ_4, ω_3, ω_4, α_3, y α_4. La velocidad angular ω_2 es constante para cada problema y se usa un signo negativo para indicar el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Las dimensiones de los problemas con número par se dan en pulgadas; y los problemas impares se expresan en milímetros.

Prob.	r_1	r_2	r_3	r_4	θ_2, grad	ω_2, rad/s
4-24	4	6	9	10	240	1
4-25	100	150	250	250	−45	56
4-26	14	4	14	10	0	10
4-27	250	100	500	400	70	−6
4-28	8	2	10	6	40	12
4-29	400	125	300	300	210	−18
4-30	16	5	12	12	315	−18

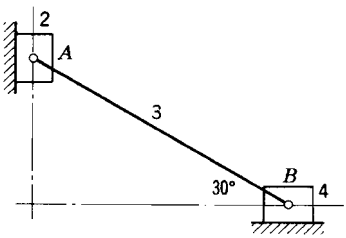
4-31 La manivela 2 del sistema ilustrado posee una velocidad de 60 rpm cmr. Determínese la velocidad y la aceleración del punto B y la velocidad y aceleración angulares del eslabón 4.
4-32 El mecanismo ilustrado en la figura es un mecanismo de dirección marino denominado *corredera de Rapson*. O_2B es la caña del timón y AC es la varilla de mando. Si la velocidad de AC es de 10 pulg/min hacia la izquierda, determínese la aceleración angular de la caña del timón.
4-33 Determínese la aceleración del eslabón 4 del problema 3-26.
4-34 Con los datos del problema 3-27, determínese la aceleración del punto E.
4-35 Calcúlese la aceleración del punto B y la aceleración angular del eslabón 4 que se citó en el problema 3-24.
4-36 Con los datos del problema 3-25, determínese la aceleración del punto B y la aceleración angular del eslabón 3.
4-37 Suponiendo que los eslabones 2 y 3 del problema 3-28 están girando a velocidad constante, encuéntrese la aceleración del punto P_4.

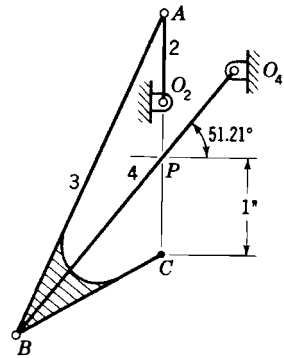




Problema 4-31 $R_{O_4O_2} = 12$ pulg, $R_{AO_2} = 7$ pulg, $R_{BO_4} = 28$ pulg. **Problema 4-32**

4-38 Resuélvase el problema 3-22 para las aceleraciones de los puntos A y B.
4-39 Con los datos del problema 3-33, determínese la aceleración del punto C_4 y la aceleración angular del eslabón 3, si a la manivela 2 se le imprime una aceleración angular de 2 rad/s^2 cmr.
4-40 Determínense las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4 del problema 3-30.
4-41 Para el problema 3-31, determínese la aceleración del punto G y las aceleraciones angulares de los eslabones 5 y 6.
4-42 Encuéntrese el círculo de inflexión para el movimiento del acoplador del mecanismo de doble corredera ilustrado en la figura. Escójanse varios puntos sobre la normal a las centrodas y determínense

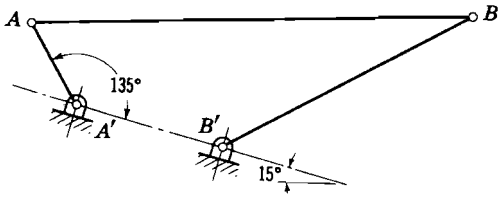




Problema 4-42 $R_{BA} = 125$ mm. **Problema 4-43** $R_{CA} = 2.5$ pulg, $R_{AO_2} = 0.9$ pulg, $R_{BO_4} = 3.5$pulg, $R_{PO_4} = 1.17$ pulg.

sus puntos conjugados. Háganse las gráficas de las porciones de las trayectorias de estos puntos, para que el lector se convenza de que, en efecto, los conjugados son los centros de curvatura.
4-43† Encuéntrese el círculo de inflexión para el movimiento del acoplador relativo al marco del eslabonamiento ilustrado en la figura. Encuéntrese el centro de curvatura de la curva de acoplador del punto C y genérese una porción de la trayectoria de C para verificar los resultados.

† Este mecanismo aparece en la obra de D. Tesar y J. C. Wolford, "Five Point Exact Four-Bar Straight-Line Mechanisms", *Trans. 7th Conf. Mech.*, Penton, Cleveland, Ohio, 1962.



Problema 4-45 $R_{AA'} = 1$pulg, $R_{BA} = 5$pulg, $R_{B'A'} = 1.75$ pulg, $R_{BB'} = 3.25$ pulg.

4-44 Para el movimiento del acoplador en relación con el marco, hállese el círculo de inflexión, la normal a las centrodas, la tangente a las centrodas y los centros de curvatura de los puntos C y D del eslabonamiento del problema 3-13. Elíjanse puntos del acoplador que coincidan con el centro instantáneo y el polo de inflexión, y trácense sus trayectorias.

4-45 En un papel de 18 ×24 pulg, trácese el eslabonamiento ilustrado en la figura, con sus dimensiones reales, ubicando A' a 6 pulg del borde inferior y a 7 pulg del derecho. Se aprovechará mejor el papel inclinando el marco aproximadamente 15°, como se indica.

a) Encuéntrese el círculo de inflexión.

b) Trácese la cúbica de curvatura estacionaria.

c) Elíjase un punto C del acoplador que coincida con la cúbica y constrúyase la gráfica de una porción de su curva del acoplador cerca de la cúbica.

d) Encuéntrese el punto conjugado C'. Trácese un círculo que pase por C y cuyo centro sea C' y compárelo con la trayectoria real de C.

e) Encuéntrese el punto de Ball. Localícese un punto D en el acoplador, en el punto de Ball, y constrúyase la gráfica de una porción de su trayectoria. Compárese el resultado con una recta.

CAPÍTULO

CINCO

MÉTODOS NUMÉRICOS EN EL ANÁLISIS CINEMÁTICO

5-1 INTRODUCCIÓN

Los primeros cuatro capítulos se dedicaron a desarrollar una base teórica firme para el análisis cinemático de los mecanismos. Se han presentado los métodos para el análisis de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración, y se citaron ejemplos de cómo pueden aplicarse tales métodos a la resolución de problemas en el plano.

Por sus propias definiciones, las soluciones de velocidad y aceleración son problemas del *análisis vectorial*. Sin embargo, aunque se utilizó una notación vectorial rigurosa en todos los desarrollos anteriores, se presentó una gran variedad de técnicas de solución, incluyendo soluciones gráficas, técnicas algebraicas, álgebra vectorial y métodos del álgebra compleja. Como se vio, la base teórica de todos estos procedimientos es la misma; no obstante, cada método de resolución posee sus propios puntos débiles y fuertes que le son característicos.

Desde un punto de vista histórico, las técnicas gráficas han desempeñado un papel predominante en la resolución de problemas de cinemática, en el plano. Esto se entiende con facilidad tomando en cuenta las ventajas del procedimiento gráfico: se realiza sencilla y rápidamente, y ofrece una visión interna excelente del funcionamiento de un mecanismo en particular, debido a la facilidad con que se pueden concebir los pasos de resolución. También evita las operaciones algebraicas tediosas inherentes a la resolución de ecuaciones de orden elevado o trascendentes.

No obstante, el método gráfico cuenta también con ciertas desventajas. Cuando se trabaja con una escala razonable, en la mayor parte de los problemas se puede esperar una solución con un error del 1 o 2 por ciento, si se tiene el cuidado suficiente. Sin embargo, no es factible esperar una mayor precisión a partir de una

solución gráfica. Asimismo, un método gráfico es una buena elección cuando se analiza un mecanismo en una sola posición; pero se hace muy laborioso cuando se trata de muchas posiciones, debido a que debe iniciarse cada una de ellas como si se tratara de un problema completamente nuevo. Con frecuencia, el diseño de una máquina requiere encontrar la velocidad *máxima* de un punto o la fuerza *máxima* que se transmite a través de una articulación, en todo su ciclo de operación. En tales circunstancias, cuando se trabaja gráficamente, se ha hecho práctica común obtener soluciones únicamente para unas cuantas posiciones, suponer, sin demostración, que los valores obtenidos son representativos y luego aplicar un factor de seguridad adecuado para cubrir esta suposición arriesgada.

Por otro lado, ya sea que se basen en el álgebra compleja o en el álgebra vectorial, los métodos algebraicos no adolecen de las desventajas antes citadas. La exactitud del método no se ve limitada por el álgebra sino sólo por la exactitud de los *datos* del problema, y el cuidado que se tenga en la *evaluación numérica* final de los resultados. Asimismo, una vez que se ha obtenido la *forma algebraica* de la solución, se puede *evaluar* con la frecuencia que se desee, en diferentes posiciones del mecanismo, con muy poco esfuerzo. Los inconvenientes de los procedimientos algebraicos son la necesidad de operaciones matemáticas tediosas que se pueden requerir para determinar la forma de la solución y la posibilidad de un error matemático, puesto que se reduce la íntima relación entre la concepción y la intuición física.

En resumen, aunque la preferencia histórica se ha inclinado a favor de los procedimientos gráficos, dicha preferencia se vio totalmente trastornada por el desarrollo de la computadora digital y, en los últimos años, de la calculadora electrónica de bolsillo. Antes de que surgieran estas herramientas, la promesa de una mayor exactitud para los procedimientos algebraicos fue un tanto ficticia, porque la regla de cálculo no brindaba una precisión mayor que la que ofrecían las construcciones gráficas cuidadosas. Por otro lado, la precisión de la calculadora o la computadora digital sobrepasa con mucho la que requieren los problemas de diseño mecánico, y no exige más esfuerzo por parte del diseñador que la preparación cuidadosa de los datos de entrada.

La segunda ventaja notable de la computadora es su capacidad de conservar y reutilizar un programa de trabajo. Por ende, vale la pena realizar las tediosas manipulaciones matemáticas para encontrar la forma de la solución, puesto que ahora sólo se necesita hacerlo una vez y luego puede usarse para una gran variedad de problemas, con dimensiones diferentes o en posiciones diferentes. Aunque el esfuerzo para resolver un problema particular en una posición dada es quizá mayor, esto puede quedar recompensado por las soluciones casi instantáneas en otras posiciones o con los cambios en las dimensiones de los eslabones. Aunque esta capacidad para reutilizar un programa se restringió inicialmente a las grandes computadoras digitales, ahora es bastante común en las calculadoras de bolsillo *programables,* en las que se cuenta con cintas magnéticas de memoria en las que se pueden almacenar programas operacionales para uso posterior.

Dada esta capacidad de conservarlos y reutilizarlos, ahora vale la pena escribir programas un tanto complejos para computadora o calculadora, porque el esfuer-

zo invertido en escribirlos lo justifica su uso repetido. En general, se dispone de algunos programas bastante complejos (véase la sección 5-5), los cuales permiten una amplia variedad de capacidades de análisis; incluso en problemas muy complicados, tan sólo se requiere un esfuerzo mínimo en la preparación de los datos por parte del diseñador. A decir verdad, áreas del conocimiento tales como el análisis de esfuerzos, se han revolucionado por completo gracias a la aplicación de procedimientos basados en computadoras que se han desarrollado en los últimos años. Con el tiempo, esto mismo puede suceder en los campos de la cinemática de los mecanismos o la dinámica de las máquinas. No obstante, en la actualidad, la necesidad primordial es la comprensión básica de los principios fundamentales de la manera en que se puede usar la computadora en estas áreas, puesto que el desarrollo y la adopción de programas generales de gran alcance están todavía en la infancia.

El propósito de este capítulo es presentar una comprensión básica de cómo puede usarse la calculadora electrónica o la computadora digital para resolver las relaciones cinemáticas de los capítulos anteriores. Los métodos fundamentales empleados son las técnicas algebraicas, incluyendo vectores y álgebra compleja, que ya se trataron con cierta profundidad. El objetivo de este capítulo no es volver a desarrollar las técnicas del álgebra compleja de Raven, por ejemplo, sino presentar lineamientos que muestren la manera en que se pueden programar para usarlos en la computación digital. Hasta ahora, el material referente a los análisis de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración se han presentado sin hacer mención alguna de las computadoras, de modo que este capítulo se puede ocupar de ellos en forma conjunta. Aquí se presentará el procedimiento general para usar una computadora en esos problemas y se harán muchas sugerencias sobre estilos y procedimientos de programación. Luego, al proseguir con los capítulos subsiguientes, con frecuencia se hará una pausa para reflexionar sobre cómo se puede programar ese aspecto en particular.

Este capítulo no tiene como fin convertirse en un tratado sobre análisis numérico, ni presentar los detalles de algún lenguaje de programación para computadora en particular. La presentación que se hace aquí está encaminada a un aspecto un tanto general, puesto que cada individuo se verá limitado en su elección por los medios con los que cuente y los lenguajes de que disponga. Es más, la tecnología de las computadoras sigue avanzando con gran rapidez, y cualquier procedimiento específico pronto se volverá obsoleto.

5-2 PROGRAMACIÓN DE UNA CALCULADORA ELECTRÓNICA

En esta sección se presentan varios ejemplos apropiados para obtener soluciones utilizando una calculadora programable; aunque, por supuesto, también son aplicables en grandes computadoras. Los lectores que usen una calculadora no programable o que tenga una capacidad limitada de almacenamiento, seguirían las mismas estrategias para resolver estos ejemplos; pero encontrarían necesario volver a marcar las operaciones cada vez que se inicien.

Para principiar a enfocar un problema que va a resolverse en una calculadora programable, el primer paso es desarrollar un método apropiado, denominado *algoritmo*. Se debe recordar que una calculadora (o computadora) sólo puede manejar cantidades numéricas y no símbolos algebraicos; de donde, es necesario desarrollar por completo una *solución algebraica de forma cerrada* para el problema deseado, *antes* de que pueda programarse. *No se puede* usar una calculadora con este fin; y sólo es útil cuando llega el momento de *evaluar* la respuesta numérica para un conjunto específico de datos numéricos.

Al desarrollar el algoritmo para un problema en cinemática, se puede usar cualquiera de los métodos algebraicos de los capítulos anteriores. Por supuesto, no se puede hacer que la calculadora lea datos tales como las longitudes de los eslabones a partir de un dibujo; en consecuencia, se debe considerar con mucho cuidado cuál debe ser el conjunto mínimo de datos que se pedirán al usuario. Asimismo, es preciso ver que los pasos de solución queden ordenados de tal manera que, en cada uno de ellos, se disponga de los datos requeridos ya sea por parte del usuario o del paso de cálculo previo.

Ejemplo 5-1 Desarróllese un algoritmo apropiado para una calculadora electrónica programable, para hallar la suma

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \cdots + \mathbf{r}_i + \cdots + \mathbf{r}_m + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_j \times \mathbf{b}_j + \cdots + \mathbf{a}_n \times \mathbf{b}_n \qquad (1)$$

en donde los datos de entrada van a ser las coordenadas cartesianas de los vectores tridimensionales $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{a}_j$, y $\mathbf{b}_j$

$$\mathbf{r}_i = r_i^x\hat{\mathbf{i}} + r_i^y\hat{\mathbf{j}} + r_i^z\hat{\mathbf{k}} \qquad (2)$$

$$\mathbf{a}_j = a_j^x\hat{\mathbf{i}} + a_j^y\hat{\mathbf{j}} + a_j^z\hat{\mathbf{k}} \qquad (3)$$

$$\mathbf{b}_j = b_j^x\hat{\mathbf{i}} + b_j^y\hat{\mathbf{j}} + b_j^z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4)$$

El resultado final se va a almacenar, en la forma de coordenadas cartesianas, en las memorias 1, 2 y 3.

SOLUCIÓN El siguiente algoritmo se presenta como una serie de pasos, aunque se podría mostrar con igual facilidad en forma de diagrama de flujo.

Paso 1. Sitúense las memorias en cero.
Paso 2. Recíbanse los datos enteros para m; almacénese $-m$ en la memoria 4.
Paso 3. Si la memoria 4 es cero o positivo, pásese al paso 8.
Paso 4. Recíbanse los datos para r_i^x y súmense a la memoria 1.
Paso 5. Recíbanse los datos para r_i^y y súmense a la memoria 2.
Paso 6. Recíbanse los datos para r_i^z y súmense a la memoria 3.
Paso 7. Súmese 1 a la memoria 4 y regrésese al paso 3.
Paso 8. Recíbanse los datos enteros para n; almacénese $-n$ en la memoria 4.
Paso 9. Si la memoria 4 es cero o positivo, pásese el paso 16.
Paso 10. Recíbanse los datos para a_j^x, a_j^y y a_j^z; almacénense en las memorias 5, 6 y 7, respectivamente.
Paso 11. Recíbanse los datos para b_j^x, b_j^y y b_j^z; almacénense en las memorias 8, 9 y 10, respectivamente.
Paso 12. Calcúlese $a_j^y b_j^z - a_j^z b_j^y$ y súmese el resultado a la memoria 1.

Paso 13. Calcúlese $a_i^z b_i^x - a_i^x b_i^z$ y súmese el resultado a la memoria 2.
Paso 14. Calcúlese $a_i^x b_i^y - a_i^y b_i^x$ y súmese el resultado a la memoria 3.
Paso 15. Súmese 1 a la memoria 4 y regrésese al paso 9.
Paso 16. Muéstrese sucesivamente en la pantalla el contenido de las memorias 1, 2 y 3, como los resultados para R^x, R^y y R^z, respectivamente.

Se pueden usar los datos siguientes para comprobar la programación obtenida. Dados $m = 2$, $\mathbf{r}_1 = -4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, $n = 2$, $\mathbf{a}_1 = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{b}_1 = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{a}_2 = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{b}_2 = \hat{\mathbf{i}}$. El vector solución es $\mathbf{R} = -8\hat{\mathbf{i}}$.

En este ejemplo se observará que el cuidado que se ponga en enunciar cada paso de un algoritmo con precisión, reducirá enormemente el tiempo requerido para escribir un programa, y eliminará muchas fuentes potenciales de error. Escribir cada paso o dibujar un diagrama de flujo, antes de hacer la programación, ayudará también en la búsqueda posterior de errores posibles, y en la presentación del programa final.

Conforme se desarrolla el algoritmo, también se debe considerar con amplitud el uso eficiente de las memorias disponibles. La mayor parte de los programas para calculadora encontrarán que las memorias insuficientes son el factor limitante en la complejidad de los algoritmos que sea factible emplear. En el caso del ejemplo anterior, puede verse cómo se usó la memoria 4 para almacenar tanto a m como a n, y cómo se usó cada vector recibido como datos antes de que se recibiera el siguiente, en lugar de admitir y almacenar todos los vectores antes de que se iniciaran los cálculos. Por lo tanto, el programa resultante sólo necesita 10 memorias y no queda limitado por lo que respecta a los números de vectores m y n.

Cuando se completa la programación, se debe dar atención especial a la redacción del programa; porque, de otra manera, se corre el riesgo de olvidar el procedimiento de resolución cuando se desee volver a usarlo. La documentación debe incluir, como mínimo, una descripción breve del método usado, toda suposición limitante, una lista del número, orden y forma de los datos de entrada necesarios, y una descripción del número, orden, forma y ubicación de los resultados finales. Además, también se considera que un problema de ejemplo, junto con sus datos numéricos y su solución, constituyen una parte recomendable de un programa bien documentado. La buena documentación es quizá el aspecto más importante de la escritura de un programa y, sin embargo, a menudo es la más descuidada. Con frecuencia, esto conduce a tener que volver a desarrollar, con el costo consecuente, programas ya existentes, debido a que su documentación es inadecuada y, por ende, resultan inútiles cuando se presenta la necesidad de utilizarlos.

Ejemplo 5-2 Desarróllese un algoritmo para un programa de calculadora que tenga por fin calcular la posición, la velocidad y la aceleración de todos los eslabones de un mecanismo excéntrico de corredera-manivela. Las dimensiones r_1, r_2, y r_3, consignadas en la figura 5-1, se van a recibir como datos. La solución se va a iniciar con el ángulo especificado de la manivela θ_2 y se va a incrementar en el ángulo especificado $\Delta\theta_2$, con la frecuencia que se desee. Se supondrá además que la velocidad angular de la manivela, especificada por el usuario, es constante.

SOLUCIÓN El desarrollo de las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración para el mecanismo excéntrico de corredera y manivela se puede llevar a cabo por medio del método de Raven, aplicando álgebra compleja, como se describió con todo detalle en las secciones 2-10, 3-8 y 4-8. Las ecuaciones finales son de la (4-17) a la (4-22). El algoritmo para evaluarlas con una calculadora programable podría ser como sigue:

Paso 1. Recíbanse los datos numéricos para r_1, r_2 y r_3, y almacénense en las memorias 1, 2 y 3, respectivamente.
Paso 2. Recíbanse los datos numéricos para θ_2, $\Delta\theta_2$ y θ_2, y almacénense en las memorias 4, 5 y 6, respectivamente.
Paso 3. Calcúlese $r_2 \operatorname{sen} \theta_2$ y $r_2 \cos \theta_2$, y almacénense en las memorias 7 y 8, respectivamente.
Paso 4. Calcúlese y muéstrese en la pantalla $\theta_3 = -\operatorname{sen}^{-1}[(r_1 + r_2 \operatorname{sen} \theta_2)/r_3]$.
Paso 5. Calcúlese $r_3 \operatorname{sen} \theta_3$ y $r_3 \cos \theta_3$, y almacénense en las memorias 9 y 10, respectivamente.
Paso 6. Calcúlese y muéstrese en la pantalla $r_4 = r_2 \cos \theta_2 + r_2 \cos \theta_3$.
Paso 7. Calcúlese y muéstrese en la pantalla $\dot{\theta}_3 = -(\dot{\theta}_2 r_2 \cos \theta_2)/(r_2 \cos \theta_3)$.
Paso 8. Calcúlese y muéstrese en la pantalla $\dot{r}_4 = -\dot{\theta}_2 r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - \dot{\theta}_3 r_3 \operatorname{sen} \theta_3$.
Paso 9. Calcúlese y muestrese en la pantalla $\ddot{\theta}_3 = (\ddot{\theta}_2 r_2, \operatorname{sen} \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 r_3 \operatorname{sen} \theta_3)/(r_3 \cos \theta_3)$.
Paso 10. Calcúlese y muéstrese en la pantalla $\ddot{r}_4 = -(\ddot{\theta}_3 r_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \dot{\theta}_2^2 r_2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 r_3 \cos \theta_3)$.
Paso 11. Súmese $\Delta\theta_2$ de la memoria 5 a θ_2 de la memoria 4.
Paso 12. Regrésese al paso 3 y repítase.

Como comprobación de la exactitud del programa, úsese: $r_1 = 0.150$ m, $r_2 = 0.300$ m, $r_3 = 0.900$ m, $\theta_2 = 0$, $\Delta\theta_2 = 90°$, y $\dot{\theta}_2 = 40$ rad/s. Cuando se llega a la posición $\theta_2 = 270°$, el conjunto de resultados redondeados que se presenten deben ser $\theta_3 = 9.594°$, $r_4 = 0.887$ m, $\dot{\theta}_3 = 0$, $\dot{r}_4 = 12$ m/s, $\ddot{\theta}_3 = -540.899$ rad/s^2, y $\ddot{r}_4 = 81.135$ m/s^2.

Este ejemplo pone en evidencia la cuestión de las unidades. Se considera buena práctica obtener las ecuaciones para los programas de esta índole sin hacer referencia alguna a un conjunto de unidades en particular. Luego, es factible aplicar cualquier sistema de ellas con el programa, siempre y cuando sean coherentes. La alternativa es restringir el programa a un conjunto particular de unidades. En todo caso, la elección de las mismas se debe establecer con toda claridad en la documentación. En el ejemplo anterior, el programa mismo es independiente del conjunto de unidades empleado; sin embargo, puesto que los datos de prueba se dieron en metros, los resultados tuvieron las unidades de metros por segundos y metros por segundo al cuadrado.

El ejemplo revela también un caso típico de equilibrio necesario entre el uso eficiente de las memorias y la velocidad mejorada de los cálculos. Las memorias 7

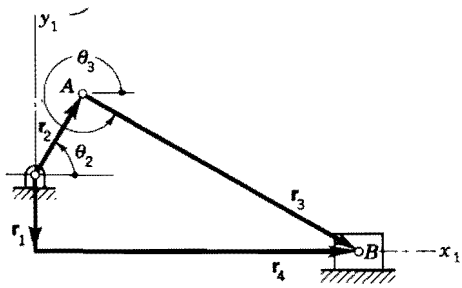


Figura 5-1 Ejemplo 5-2. Mecanismo excéntrico de corredera-manivela.

a 10 se emplearon en los pasos 3 y 5 para almacenar términos geométricos a los cuales se recurre repetidas veces en los cálculos de los pasos 4 y del 6 al 10. Al usar estas cuatro memorias, las funciones trigonométricas se calculan una sola vez cada una, ahorrando así un tiempo considerable. Si no se cuenta con el número suficiente de memorias, podrían volverse a calcular cada vez. También se evitó el uso de más memorias, mostrando inmediatamente los resultados en la pantalla después de calcularlos, en lugar de almacenarlos.

Otra cuestión que se presenta también es la de las unidades que se usarán para los valores numéricos almacenados de los ángulos. Evidentemente, para facilitar su uso, cualesquiera datos de entrada que comprendan ángulos, como θ_2 y $\Delta\theta_2$ del ejemplo anterior, se deben expresar en grados y no en radianes; no obstante, es preferible usar radianes para las velocidades y las aceleraciones angulares. En la mayor parte de las calculadoras los ángulos se pueden expresar ya sea en grados o radianes, y se aplicarán las funciones trigonométricas según la situación de un teclado que indica la selección. En tales casos, es preferible dejar todos los ángulos en grados; pero es necesario hacer notar que algunas calculadoras no poseen esta opción. Asimismo, en las computadoras digitales que usan FORTRAN o BASIC, las funciones trigonométricas tales como SIN, COS o TAN presupondrán que los ángulos se expresan en radianes. En estos casos es necesario convertir los datos angulares de entrada a radianes, por medio de pasos de programa adicionales, y luego convertir cualquier ángulo calculado nuevamente a grados, para presentarlo en la pantalla.

Por lo común, el mejor método para comprobar un programa es comparar los resultados con una solución gráfica del mismo problema. Los ángulos se pueden medir rápidamente con un transportador. Mientras que un punto decimal se puede colocar erróneamente en un programa de computadora, un vector que sea 10 veces más largo que lo normal no pasará inadvertido en una solución gráfica. De la misma manera, la precisión gráfica es casi siempre suficiente como para verificar si un programa de computadora funciona en forma adecuada, ya que generalmente los errores de programación darán origen a diferencias más bien drásticas que sutiles en los resultados.

Ejemplo 5-3 Desarróllese un algoritmo para un programa de calculadora para calcular la posición angular y velocidad de todos los eslabones de un eslabonamiento plano de cuatro barras. Las longitudes de los eslabones r_1, r_2, r_3, y r_4 que se dan en la figura 5-2 se recibirán como datos, junto con el ángulo inicial especificado θ_2, el incremento en el ángulo $\Delta\theta_2$, y la velocidad angular $\dot{\theta}_2$ de la manivela de entrada.

SOLUCIÓN El desarrollo de las ecuaciones apropiadas se hizo en las secciones 2-10 y 3-8, y se trata de las ecuaciones (2-58), (2-59), (3-18) y (3-19). El algoritmo para su evaluación es el siguiente:

Paso 1. Recíbanse los datos numéricos para r_1, r_2, r_3 y r_4, y almacénense en las memorias 1,2, 3 y 4, respectivamente.

Paso 2. Recíbanse los datos numéricos para θ_2, $\Delta\theta_2$ y $\dot{\theta}_2$, y almacénense en las memorias 5, 6 y 7, respectivamente.

Paso 3. Calcúlese $a = (r_3^2 + r_4^2 - r_1^2 - r_2^2)/2r_3r_4$ y almacénese en la memoria 8.
Paso 4. Calcúlese $b = r_1/r_3r_4$ y almacénese en la memoria 9.
Paso 5. Calcúlese $c = r_2 \operatorname{sen} \theta_2$ y almacénese en la memoria 10.
Paso 6. Calcúlese $d = r_2 \cos \theta_2$ y almacénese en la memoria 11.
Paso 7. Calcúlese y preséntese en la pantalla el ángulo de transmisión $\gamma = \cos^{-1}(a + bd)$.
Paso 8 Calcúlese sen γ y cos γ, y almacénense en las memorias 12 y 13.
Paso 9. Calcúlese y muéstrese en la pantalla.

$$\theta_3 = 2 \tan^{-1} \frac{-c + r_4 \operatorname{sen} \gamma}{d + r_3 - r_1 - r_4 \cos \gamma}$$

y almacénese en la memoria 14.
Paso 10. Calcúlese y muéstrese en la pantalla

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} \frac{c - r_3 \operatorname{sen} \gamma}{d + r_4 - r_1 - r_3 \cos \gamma}.$$

Paso 11. Calcúlese y muéstrese en la pantalla

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\dot{\theta}_2 r_2 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_2)}{r_3 \operatorname{sen} \gamma}$$

Paso 12. Calcúlese y muéstrese en la pantalla

$$\dot{\theta}_4 = \frac{\dot{\theta}_2 r_2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{r_4 \operatorname{sen} \gamma}$$

Paso 13. Súmese $\Delta\theta_2$ de la memoria 6 a θ_2 de la memoria 5.
Paso 14. Regrésese al paso 5 y repítase.

Para comprobar el programa, úsese un eslabonamiento de manivela y oscilador con las siguientes dimensiones: $r_1 = 10$ pulg, $r_2 = 4$ pulg, $r_3 = 10$ pulg y $r_4 = 12$ pulg. En $\theta_2 = 0$, $\dot{\theta}_2 = 45$ rad/s, los resultados redondeados son $\gamma = 30°$, $\theta_3 = 93.8°$, $\theta_4 = 123.7°$, y $\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_4 = -30$ rad/s.

El algoritmo antes descrito da la solución para la configuración abierta de un eslabonamiento plano de cuatro barras. Dependiendo de la situación inicial, es probable que el usuario desee resolverlo para la configuración cruzada. Como lo indican las ecuaciones (2-58) y (2-59), se obtendría el caso de la configuración cruzada cambiando los signos más y menos en los numeradores de los pasos 9 y 10. Esto requiere una leve reprogramación, a medida que se corre cada conjunto de datos del problema, lo que crea una situación poco deseable. Una alternativa sería solicitar otro elemento de los datos de entrada que especificara la configuración

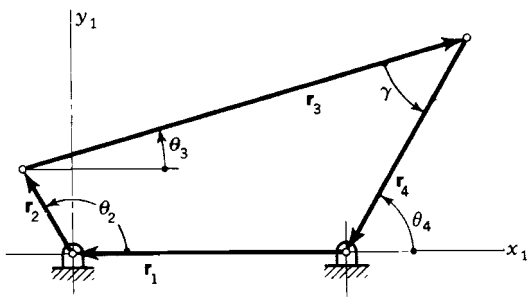


Figura 5-2 Ejemplo 5-3.

buscada, y luego modificar el algoritmo para que se bifurque hacia las ecuaciones apropiadas. Una alternativa más sería calcular y presentar en la pantalla ambas configuraciones para cada conjunto de datos del problema. No obstante, cada una de estas alternativas requiere más memorias y un programa más largo.

Una cuestión íntimamente relacionada con esto es la que consiste en saber, si las ecuaciones originales se desarrollaron con la precisión necesaria para hacer que se distingan las configuraciones abierta y cruzada del eslabonamiento. Si se hubieran usado las ecuaciones (2-52) y (2-53) en lugar de las (2-58) y (2-59), por ejemplo, habría sido necesario ver que los ángulos ϕ y ψ fueran ambos menores que 180°, y que ψ fuera positivo en tanto que sen ϕ tuviera el mismo signo que sen θ_2. Estas son condiciones no fáciles de programar y pueden resultar engañosas cuando se trata de juzgar lo apropiado de una solución analítica. A primera vista, las ecuaciones (2-58) y (2-59) parecen ser más complicadas que la (2-52) y (2-53), pero no requieren estas pruebas adicionales. Este tipo de sutilezas se pasan a menudo por alto (o se desprecian deliberadamente), cuando se desarrollan ecuaciones para resolver a mano, porque se pueden tomar en cuenta con facilidad por el conocimiento de la naturaleza física de la situación en la etapa apropiada de los cálculos. Sin embargo, al escribir un programa, cada detalle se debe definir con precisión, de tal suerte que sea factible ejecutarlo en una calculadora o computadora que son, en resumidas cuentas, aparatos sin inteligencia.

Otro aspecto importante es el referente a los cuadrantes de los ángulos, sobre todo al calcular las funciones trigonométricas inversas, como el arco coseno del paso 7 o los arcos tangentes de los pasos 9 y 10. Este tipo de funciones trigonométricas inversas son, por sus definiciones matemáticas, multiformes, o de valores múltiples. Con todo, cada programa para calculadora o computadora dará lugar a una sola respuesta, elegida por decisión del fabricante más que del programador. Es preciso tener un cuidado extremo para saber cuál es el cuadrante específico seleccionado para que una calculadora en particular proporcione el resultado, al emplear esta clase de funciones de valores múltiples, no siempre son los mismos en calculadoras diferentes.

Algunas calculadoras vienen equipadas para efectuar directamente la conversión de un vector bidimensional, de la forma rectangular bien la polar, o a la función inversa, de la forma polar a la rectangular. Después de colocar las componentes x y y de un vector en los registros apropiados, basta un solo golpe de tecla (o paso del programa) para obtener tanto la magnitud como el ángulo del vector. Más aún, en este caso se obtendrá el ángulo en el cuadrante apropiado, determinado por los signos de las componentes x y y. Si se dispone de esta índole de conversiones, se pueden usar para evitar el cálculo directo del seno y el coseno, digamos como alternativas de los pasos 5 y 6 del ejemplo anterior. También es factible usarlas para evitar el dilema del cuadrante de las funciones trigonométricas inversas, si se pueden calcular tanto el coseno como el seno del ángulo †

† Al escribir un programa para computadora en FORTRAN, se puede obtener la misma ventaja usando la función ATAN2 en lugar de ATAN, ASIN o ACOS. No obstante, en algunas computadoras,

5-3 PROGRAMACIÓN DE LAS ECUACIONES DE CHACE

Cuando se analizan mecanismos planos resulta muy útil contar con un conjunto de programas ya escritos y probados para la resolución de los cuatro casos de la ecuación de cierre del circuito en el plano que comprenda dos incógnitas. Estos cuatro casos se identificaron y analizaron en el capítulo 2. Los procedimientos gráficos de resolución se presentaron con todo detalle en la sección 2-7, las soluciones con álgebra compleja en la sección 2-8 y las soluciones con álgebra vectorial de Chace en la sección 2-9. En esta sección se presentan algoritmos para la solución numérica de cada uno de los cuatro casos, aplicando el método de Chace en una calculadora electrónica.

Por lo que respecta a la notación, se supone que la ecuación bidimensional de cierre del circuito que se va a resolver se ha reducido previamente a tres vectores con dos incógnitas. Así pues, tiene la forma

$$C\hat{\mathbf{C}} = A\hat{\mathbf{A}} + B\hat{\mathbf{B}} \tag{5-1}$$

donde $\hat{\mathbf{C}}$ por ejemplo, es un vector unitario a lo largo del vector $\mathbf{C}$; forma un ángulo θ_C en relación con el eje x y posee las componentes $\hat{C}^x$ y $\hat{C}^y$ en las direcciones x y y.

Puesto que a menudo los cuatro casos se usarán juntos, resulta útil organizar sus datos en la forma semejante. Por consiguiente, se supone que las memorias 1 a 12 están reservadas para los valores de C, θ_C, C^x, C^y, A, θ_A, A^x, A^y, B, θ_B, B^x, y B^y, respectivamente. Se supone que si se necesita la solución de un caso en particular se introducirán datos conocidos en las memorias apropiadas. Entonces se cargará y se correrá el programa, situando los resultados en otras memorias apropiadas. Por lo tanto, los problemas de introducción de datos y presentación de los resultados se consideran como algo independiente de los algoritmos de solución.

Ejemplo 5-4 Desarróllese un algoritmo para resolver el caso 1 de la ecuación (5-1) cuando las incógnitas son C y θ_C. Supóngase que los datos para A^x, A^y, B^x y B^y ya están almacenados en las memorias 5, 6, 9 y 10, respectivamente. Se deben calcular los valores C^x, C^y, C y θ_C y almacenarlos en las memorias 1 a 4, respectivamente.

SOLUCIÓN La ecuación apropiada para encontrar la solución es la (2-39); y el algoritmo es:

Paso 1. Calcúlese $C^x = A^x + B^x$ y almacénese en la memoria 1.
Paso 2. Calcúlese $C^y = A^y + B^y$ y almacénese en la memoria 2.
Paso 3. Calcúlese $C = \sqrt{(C^x)^2 + (C^y)^2}$ y almacénese en la memoria 3.
Paso 4. Calcúlese $\theta_C = \tan^{-1}(C^y/C^x)$; úsense los signos de C^x y C^y para que se obtenga el cuadrante correcto; y almacénese en la memoria 4.
Paso 5. Alto.

ATAN2(Y,X) simplemente dividirá el primer argumento entre el segundo y luego utilizará ATAN. Puesto que esto anula por completo el propósito de la función ATAN2, es necesario escribir un subprograma ARCT(Y,X) para ejecutar lo que ATAN2 debe hacer.

Para comprobar el programa pueden usarse los siguientes datos:
almacénense $A^x = 5$, $A^y = -8.661$, $B^x = -20$, $B^y = 0$ en las memorias 5, 6, 9 y 10, respectivamente. Los resultados redondeados, almacenados en las memorias 1 a 4, deben ser $C^x = -15.000$, $C^y = -8.661$, $C = 17.321$, y $\theta_C = 210.000°$.

Ejemplo 5-5 Desarróllese un algoritmo para la solución del caso 2a de la ecuación (5-1), tomando A y B como incógnitas. Supóngase que los datos de C^x, C^y, θ_A y θ_B ya están almacenados en las memorias 1, 2, 8 y 12, respectivamente.

SOLUCIÓN La solución para el caso 2*a* está dada por las ecuaciones (2-40) y (2-41). El algoritmo propuesto es:

Paso 1. Calcúlese $\hat{A}^x = \cos\theta_A$ y $\hat{A}^y = \text{sen}\,\theta_A$ y almacénese en las memorias 5 y 6.
Paso 2. Calcúlese $\hat{B}^x = \cos\theta_B$ y $\hat{B}^y = \text{sen}\,\theta_B$ y almacénese en las memorias 9 y 10.
Paso 3. Calcúlese $P = \cos(\theta_B - \theta_A)$ y almacénese en la memoria 13.
Paso 4. Calcúlese $A = (C^x\hat{B}^y - C^y\hat{B}^x)/P$ y almacénese en la memoria 7.
Paso 5. Calcúlese $B = (C^y\hat{A}^x - C^x\hat{A}^y)/P$ y almacénese en la memoria 11.
Paso 6. Multiplíquese el contenido de las memorias 5 y 6 por A.
Paso 7. Multiplíquese el contenido de las memorias 9 y 10 por B.
Paso 8. Alto.

Los siguientes datos servirán para comprobar el programa: almacénense $C^x = -15$, $C^y = -8.661$, $\theta_A = -60°$, $\theta_B = 180°$ en las memorias 1, 2, 8 y 12, respectivamente. Los resultados redondeados, almacenados en las memorias 5 a 7 y 9 a 11, deben ser $A^x = 5.000$, $A^y = -8.661$, $A = 10.000$, $B^x = -20.000$, $B^y = 0$, y $B = 20.000$.

Ejemplo 5-6 Desarróllese un algoritmo para resolver el caso 2*b* de la ecuación (5-1), siendo A y θ_B las incógnitas. Supóngase que los datos para C^x, C^y, θ_A y B ya están almacenados en las memorias 1, 2, 8 y 11, respectivamente.

SOLUCIÓN La solución para el caso 2*b* está dado por las ecuaciones (2-42) y (2-43). El algoritmo propuesto es:

Paso 1. Calcúlese $\hat{A}^x = \cos\theta_A$ y $\hat{A}^y = \text{sen}\,\theta_A$ y almacénese en las memorias 5 y 6.
Paso 2. Calcúlese $P = C^x\hat{A}^y - C^y\hat{A}^x$ y almacénese en la memoria 13.
Paso 3. Calcúlese $Q = \sqrt{B^2 - P^2}$ y almacénese en la memoria 14.
Paso 4. Calcúlese $A = C^x\hat{A}^x + C^y\hat{A}^y \mp Q$ y almacénese en la memoria 7.
Paso 5. Calcúlese $B^x = P\hat{A}^y \pm Q\hat{A}^x$ y almacénese en la memoria 9.
Paso 6. Calcúlese $B^y = -P\hat{A}^x \pm Q\hat{A}^y$ y almacénese en la memoria 10.
Paso 7. Multiplíquese el contenido de las memorias 5 y 6 por A.
Paso 8. Calcúlese $\theta_B = tan^{-1}(B^y/B^x)$; utilícense los signos de B^x y B^y para dar el cuadrante correcto; y almacénese en la memoria 12.
Paso 9. Alto.

Como se analizó en la sección 2-7, existen dos soluciones para el caso 2*b*; las que aparecen como los diferentes signos en los pasos 4 a 6. Se recomienda escribir dos programas por separado, uno llamado caso 2*b* usando los signos superiores, y el otro llamado caso 2*b'* con los signos inferiores. Los programas se pueden comprobar aplicando los datos que se dan a continuación: $C^x = -15$, $C^y = -8.661$, $\theta_A = -60°$, y $B = 20$, almacenados, respectivamente, en las memorias 1, 2, 8 y 11. En tal caso, el programa 2*b* debe dar los resultados redondeados $A^x = -5.000$, $A^y = 8.661$, $A = -10$.

ben ser $A^x = 5.000$, $A^y = -8.661$, $A = 10.000$, $B^x = -20.000$, $B^y = 0.000$, y $\theta_B = 180.000°$. Estos se deben almacenar en las memorias 5, 6, 7, 9, 10 y 12, respectivamente.

Ejemplo 5-7 Desarróllese un algoritmo para resolver el caso 2*c* de la ecuación (5-1), siendo θ_A y θ_B las incógnitas. Supóngase que los datos que corresponden a C^x, C^y, A, y B ya están almacenados en las memorias 1, 2, 9 y 12, respectivamente.

SOLUCIÓN La solución para el caso 2*c* está dada en las ecuaciones (2-44) y (2-45). El algoritmo propuesto es:

Paso 1. Calcúlese $P = (A^2 - B^2 + C^2)/2C^2$ y almacénese en la memoria 13.
Paso 2. Calcúlese $Q = \sqrt{(A/C)^2 - P^2}$ y almacénese en la memoria 14.
Paso 3. Calcúlese $A^x = PC^x \pm QC^y$ y almacénese en la memoria 5.
Paso 4. Calcúlese $A^y = PC^y \mp QC^x$ y almacénese en la memoria 6.
Paso 5. Calcúlese $\theta_A = \tan^{-1}(A^y/A^x)$; úsense los signos de A^x y A^y para dar el cuadrante correcto; y almacénese en la memoria 8.
Paso 6. Calcúlese $R = 1 - P$ y almacénese en la memoria 13.
Paso 7. Calcúlese $B^x = RC^x \mp QC^y$ y almacénese en la memoria 9.
Paso 8. Calcúlese $B^y = RC^y \pm QC^x$ y almacénese en la memoria 10.
Paso 9. Calcúlese $\theta_B = \tan^{-1}(B^y/B^x)$; úsense los signos de B^x y B^y para dar el cuadrante correcto; y almacénese en la memoria 12.
Paso 10. Alto.

Como sucede en el caso 2*b*, el caso 2*c* cuenta con dos soluciones y requiere de dos programas por separado. Uno de ellos, el que utilice los signos superiores de los pasos 3, 4, 7 y 8, puede llamarse programa 2*c*; y el otro, el de los signos inferiores, puede denominarse programa 2*c*′.

Los dos programas se pueden comprobar con los siguientes datos: $C^x = 15$, $C^y = -8.661$, $A = 10$, y $B = 20$, almacenados en las memorias 1, 2, 7 y 11, respectivamente. Luego, el programa 2*c* debe dar $A^x = -5.000$, $A^y = 8.661$, $\theta_A = 120.000°$, $B^x = -17.321$, y $\theta_B = 240.000°$. Los resultados del programa 2*c*′ deben ser $A^x = 5.000$, $A^y = -8.661$, $\theta_A = -60.000°$, $B^x = -20.000$, $B^y = 0.000$, y $\theta_B = 180.000°$. Todo esto se debe almacenar en las memorias 5, 6, 8, 9, 10 y 12, respectivamente.

Los programas desarrollados en estos cuatro ejemplos pueden resultar bastante beneficiosos al realizar la solución de posición de la mayor parte de los mecanismos planos. Los procedimientos para analizar su velocidad y su aceleración, con el método de Chace, se explicaron en las secciones 3-9 y 4-8. También resulta útil contar con programas comprobados con anterioridad a fin de evaluar operaciones vectoriales como $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, y $(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}) \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})$ y un programa para resolver dos ecuaciones simultáneas lineales con dos incógnitas. Con éstas, se pueden aplicar los métodos de las secciones 3-9 y 4-8 en forma directa y evaluarse con gran rapidez en una calculadora.

Aunque en esta sección se ha reforzado el método de Chace, es fácil ver cómo se podrían desarrollar programas paralelos usando álgebra compleja y el método de Raven. De hecho, una vez programados, existen muy pocas diferencias entre los métodos y se pueden entremezclar con toda libertad. Su principal diferencia es fundamentalmente de notación y preferencia del usuario. Por ejemplo, en el curso de los cálculos, A^x y A^y, desempeñan el papel de las componentes de un vector en el método de Chace, o de las partes real e imaginaria de un número complejo, en el método de Raven.

Por supuesto, en el caso de mecanismos tridimensionales, los algoritmos anteriores rinden pocos beneficios y se deben generalizar. Es factible desarrollar procedimientos exactamente paralelos para tres dimensiones en el capítulo 11; sin embargo, los cálculos relativos son necesariamente más complejos y, por lo común, van más allá de la capacidad de una calculadora programable. Sin embargo, se pueden aplicar algoritmos similares en una computadora digital, en la que las memorias son más grandes.

Para quienes prefieren trabajar con una computadora digital en lugar de una calculadora, los cuatro algoritmos anteriores se pueden programar directamente como se expresaron, en un lenguaje como el FORTRAN o el BASIC. Las memorias mencionadas se sustituirían con nombres de variables como A, AX, THETAB, y así sucesivamente. Se recomienda que cada algoritmo se programe como un procedimiento por separado para usarse dentro de un programa principal de mayor amplitud, escrito para cada problema. Por ejemplo, al usar FORTRAN, el caso 2*a* se podría programar como una SUBROUTINE:

```
SUBROUTINE CASE 2A (CX, CY, THETAA, THETAB, A, B)
```

Esto permitiría que se pidiera a partir de un programa FORTRAN principal, asignando los valores específicos.

```
CALL CASE 2A (—15.0, —8.661, — 60.0, 180.0, A, B)
```

y los valores A y B se retornarían bajo esos dos nombres de variables. Entonces cada aplicación requeriría escribir un programa principal para adaptarlo al problema particular. Sin embargo, el esfuerzo se reduciría notablemente puesto que se dispondría en una biblioteca de subprogramas precomprobados y se podrían usar con la misma facilidad con que se emplea un cálculo SIN o COS.

5-4 PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA MECANISMOS PLANOS

Conforme aumenta la necesidad de introducir más características en un programa, pronto se sobrepasa la capacidad de una calculadora programable, y es preciso recurrir a una computadora digital. Sin embargo, no siempre se tiene acceso a una computadora y, con frecuencia, tiene un costo asociado con su uso. Por consiguiente, conviene usar la calculadora siempre que sea posible. No obstante, gracias a su mayor potencial, a menudo se tiene la justificación suficiente como para ameritar la utilización de una computadora. Del mismo modo, cuando se programa para una computadora en lugar de para una calculadora, se debe tratar de aprovechar todas sus capacidades al grado máximo posible para que el uso del programa sea más conveniente, más flexible, más poderoso, de comprensión más rápida, etc. El esfuerzo y el costo asociados con la programación para una computadora suelen ser más altos que en el caso de la calculadora; pero se justifican por los ahorros que se obtienen en su uso reiterado.

Por supuesto, todos los algoritmos desarrollados hasta ahora en este capítulo se pudieron programar para una computadora digital; pero, por su naturaleza, son quizá más adecuados para una calculadora. Se trata de programas pequeños cuyo tamaño se restringió intencionalmente para una calculadora; y dejan también una cantidad sustancial de análisis al usuario. Son algoritmos para efectuar pequeños cálculos específicos, o sea, la automatización de cierto número de los pequeños pasos que se presentan con frecuencia al analizar un mecanismo. No se trata de algoritmos para analizar en forma total un eslabonamiento completo, como podría hacerse en una computadora. En esta sección se estudiará un algoritmo adecuado para el análisis cinemático de *todos* los eslabonamientos planos, en un solo programa.

Al considerar la programación en una computadora digital, también se debe tener presente que el algoritmo, es decir, el procedimiento de análisis, debe ser apropiado para la capacidad de la computadora, no del usuario, aun cuando la entrada y la salida deben ser apropiados para este último. Con frecuencia se encuentra que el procedimiento más directo para la solución a mano no es la más apropiada para una computadora; tal es el caso del algoritmo que se explica a continuación, que depende de la *iteración numérica* más que de la solución algebraica de la ecuación de posición.

Para hacer más comprensible la técnica de análisis, se explicará en términos del problema ejemplo ilustrado en la figura 5-3; pero es preciso tener presente a lo largo de todo el desarrollo, que lo que se pretende es un procedimiento general y un solo programa.

En el caso del problema ilustrado en la figura 5-3, la ecuación de cierre del circuito se puede escribir como

$$\epsilon = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2 = 0 \qquad (a)$$

en donde el significado del símbolo ϵ quedará aclarado conforme se avance. Expresada en forma compleja polar, toma la forma

$$\epsilon = r_1 e^{j\theta_1} + r_3 e^{j\theta_3} + r_4 e^{j\theta_4} - r_2 e^{j\theta_2} = 0 \qquad (b)$$

y, en el caso del problema general con n vectores, es

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \pm r_i e^{j\theta_i} = 0 \qquad (5\text{-}2)$$

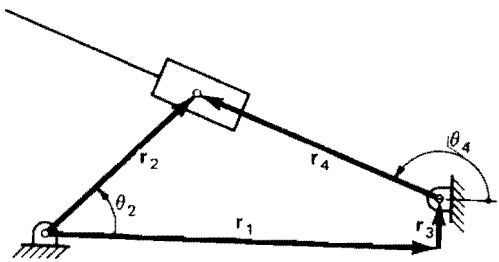


Figura 5-3 Mecanismo invertido de corredera y manivela.

No es difícil escribir un subprograma para evaluar la ecuación de cierre del circuito para cualquier mecanismo en particular. Para el ejemplo, recurriendo al FORTRAN, el subprograma se podría escribir

```
SUBROUTINE LOOPEQ (LOOP)
COMPLEX LOOP (1), R
LOOP (1) = R(1) + R(3) + R(4) - R(2)
RETURN
END
```

Esta subrutina emplea otro subprograma FORTRAN denominado R, que se describe a continuación, el cual evaluará un vector expresado en la forma compleja polar dados su longitud y su ángulo. Después de evaluar y sumar cada uno de los vectores, la subrutina LOOPEQ proporciona el resultado, que es ϵ de la (*b*), en la variable compleja denominada LOOP (1). En el caso general, un problema podría tener varias ecuaciones de cierre del circuito que se programarían como LOOP(1), LOOP(2) y así sucesivamente, en la subrutina LOOPEQ.

En general, las velocidades y las aceleraciones se obtendrán a partir de las derivadas respecto al tiempo de la ecuación de cierre del circuito. Según la ecuación (5-2), éstas son

$$\dot{\epsilon} = \sum_{i=1}^{n} \pm (\dot{r}_i e^{j\theta_i} + j\dot{\theta}_i r_i e^{j\theta_i}) = 0 \tag{5-3}$$

$$\ddot{\epsilon} = \sum_{i=1}^{n} \pm (\ddot{r}_i e^{j\theta_i} + j2\dot{\theta}_i \dot{r}_i e^{j\theta_i} + j\ddot{\theta}_i r_i e^{j\theta_i} - \dot{\theta}_i^2 r_i e^{j\theta_i}) \tag{5-4}$$

que, en el caso de este ejemplo, se convierten en

$$\dot{\epsilon} = \dot{r}_4 e^{j\theta_4} + j\dot{\theta}_4 r_4 e^{j\theta_4} - j\dot{\theta}_2 r_2 e^{j\theta_2} = 0 \tag{c}$$

$$\ddot{\epsilon} = \ddot{r}_4 e^{j\theta_4} + j2\dot{\theta}_4 \dot{r}_4 e^{j\theta_4} + j\ddot{\theta}_4 r_4 e^{j\theta_4} - \dot{\theta}_4^2 r_4 e^{j\theta_4} - j\ddot{\theta}_2 r_2 e^{j\theta_2} + \dot{\theta}_2^2 r_2 e^{j\theta_2} = 0 \tag{d}$$

en donde se dan $\dot{\theta}_2$ y $\ddot{\theta}_2$ y las incógnitas son $\dot{r}_4$, $\dot{\theta}_4$, $\ddot{r}_4$ y $\ddot{\theta}_4$

Ahora, en lugar de reprogramar estas expresiones para cada problema nuevo, aprovechemos la subrutina LOOPEQ. Definamos el subprograma R de tal modo que cuando un cierto valor, llamado LEVEL se haga igual 0, 1 ó 2, la función R calcule la expresión apropiada de posición, velocidad o aceleración, respectivamente. En FORTRAN, el subprograma funcional R podría tener la secuencia de la siguiente forma:

```
      COMPLEX FUNCTION R(I)
      COMMON LEVEL,RM(20),RA(20),DRM(20),DRA(20),
        DDRM(20),DDRA(20)
      COMPLEX Z,CMPLX,CEXP
      IF(LEVEL - 1)1,2,3
    1 Z = CMPLX(RM(I),0.0)
      GO TO 4
```

```
2  Z = CMPLX(DRM(I), DRA(I)*RM(I))
   GO TO 4
3  Z = CMPLX(DDRM(I)-RM(I)*DRA(I)**2, &
         2.0*DRA(I)*DRM(I) + DDRA(I)*RM(I))
4  R = Z*CEXP(CMPLX(0.0,RA(I)))
   RETURN
   END
```

Cuando se use este subprograma para R, supongamos que ya se han calculado los datos apropiados para los valores de las magnitudes RM y los ángulos RA de todos los vectores, y para sus primeras derivadas DRM y DRA, y sus segundas derivadas DDRM y DDRA, con respecto al tiempo. Nótese en la proposición COMMON antes citada, que se han reservado espacios de memoria para 20 vectores, aun cuando en este ejemplo sólo se usan 4. Cada vez que se pide la función R de la subrutina LOOPEQ, se suministra a R un número de vector I a R y se evalúa la expresión apropiada de posición, velocidad o aceleración, dependiendo del valor de LEVEL. En este caso, cuando LEVEL = 0, la subrutina LOOPEQ evaluará LOOP(1) como ϵ de la ecuación (*b*); pero cuando LEVEL = 1 o LEVEL = 2, la subrutina LOOPEQ evaluará LOOP(1) como $\dot{\epsilon}$ o $\ddot{\epsilon}$ de la ecuación (*c*) o (*d*), respectivamente. En todos los casos, si los datos son exactos, el resultado debe ser LOOP(1) = 0.

Se podría poner en tela de juicio el propósito de calcular LOOP(1) si siempre es cero para datos correctos; pero esto es precisamente lo importante; si los datos *no* satisfacen exactamente la condición de cierre del circuito, ecuación (*b*), LOOP(1) o ϵ contendrán una evaluación numérica del *error,* y se pueden usar para ajustar numéricamente los datos hasta que sea correcta.

Supóngase que se escribe un programa principal que principia por leer las longitudes y los ángulos de todos los vectores en alguna posición inicial del eslabonamiento. Estos datos se medirían en un dibujo, se llevarían al programa principal y almacenarían en las disposiciones RM(20) y RA(20) de COMMON, de acuerdo con sus números de vector. Por supuesto, los datos para RM(1), RM(2), RM(3), RA(1) y RA(3) se deben medir con exactitud puesto que representan dimensiones fijas del eslabonamiento. El ángulo RA(2) representa el ángulo de entrada de la manivela. RM(4) y RA(4) representan cantidades variables que se deben calcular por medio del programa, y sólo se necesitan valores aproximados de ellas. Supongamos que existe algún error desconocido asociado con cada una de estas. Entonces, los valores exactos $\bar{r}_4$ y $\bar{\theta}_4$, son

$$\bar{r}_4 = r_4 + \delta r \qquad (e)$$

$$\bar{\theta}_4 = \theta_4 + \delta\theta_4 \qquad (f)$$

en donde δr_4 y $\delta\theta_4$ representan los errores.

Puesto que se dispone de datos para todas las variables RM y RA, se podría citar el subprograma LOOPEQ, pero daría por resultado LOOP(1) con un valor diferente de cero de ϵ. Si la ecuación (*b*) se desarrolla en una serie de Taylor, se

puede obtener una aproximación de cómo este error en el cierre ϵ está relacionado con δr_4 y $\delta\theta_4$,

$$(r_1 e^{j\theta_1} + r_2 e^{j\theta_2} + r_3 e^{j\theta_3} + r_4 e^{j\theta_4}) + (e^{j\theta_4})\,\delta r_4 + (jr_4 e^{j\theta_4})\,\delta\theta_4 + \cdots = 0$$

Suprimiendo los términos orden superior, aplicando la ecuación (*b*) y reordenando se obtiene

$$(e^{j\theta_4})\,\delta r_4 + (jr_4 e^{j\theta_4})\,\delta\theta_4 = -\epsilon \qquad (g)$$

Esta es una ecuación compleja, con partes real e imaginaria y, por ende, se resuelve para los dos errores desconocidos δr_4 y $\delta\theta_4$. A continuación, estos se pueden sumar a r_4 y θ_4 y el procedimiento se puede repetir hasta que los errores converjan a un valor dentro de una tolerancia aceptable. En ese momento, los valores exactos de $\bar{r}_1$ y $\bar{\theta}_4$ se almacenarán en RM(4) y RA(4). Este procedimiento recibe el nombre de *método de interación de Newton-Raphson.* † Para el eslabonamiento general, la ecuación de iteración se encuentra mediante un desarrollo de la ecuación (5-2) en serie de Taylor,

$$\sum_{i=1}^{n} \pm (e^{j\theta_i})\,\delta r_i + (jr_i e^{j\theta_i})\,\delta\theta_i = -\epsilon \qquad (5\text{-}5)$$

en donde todos los δr_i y $\delta\theta_i$ son cero, excepto los correspondientes a las variables dependientes. Puesto que siempre se tiene el doble de variables dependientes que de ecuaciones de cierre del circuito, se contará con el mismo número de ecuaciones y términos desconocidos de error. Las ecuaciones son lineales en los términos de error y se pueden resolver mediante un programa de inversión de matrices, disponible en la mayor parte de las bibliotecas de programas estándar para computadoras digitales.

Es muy probable que el lector objete con justa razón que se necesita una gran cantidad de programación especial para formar los coeficientes de la (*g*), y que la forma de estos coeficientes cambia para cada problema nuevo, contraviniendo así la meta propuesta de escribir un programa general. No obstante, se puede evitar esto aplicando un método debido a Wengert.†† Supóngase que se igualan a cero los datos de velocidad DRM y DRA, que representan a $\dot{r}_i$ y $\dot{\theta}_i$, para todos los vectores. Luego, supóngase que DRM(4), que representa a $\dot{r}_4$, se iguala a 1. Si se emplean estos datos para las velocidades, aunque no sean correctos, una comprobación de la ecuación (*c*) mostrará que se obtiene

$$\dot{\epsilon} = e^{j\theta_4}$$

† J. J. Uicker, Jr., y otros, "An Interative Method for the Displacement Analysis of Spatial Linkages", *J. Appl. Mech.*, vol. 31, *ASME Trans.*, vol. 86, series E., pp. 309-314; 1964.

†† R. E. Wengert, "A Simple Automatic Derivative Evaluation Program", *Commun, ACM;* vol. 7, no. 8, pp. 463-464, 1964.

Del mismo modo, si todas las velocidades se hacen igual a cero, excepto DRA(4) $= \dot{\theta}_4 = 1$, entonces

$$\dot{\epsilon} = jr_4 e^{j\theta_4}$$

Si se generaliza esto, se observará que al hacer iguales a cero todos los datos de velocidad, entonces igualando a la unidad la velocidad de cualquiera de las variables dependientes y enseguida se pide la subrutina LOOPEQ con LEVEL = 1, se podrán obtener precisamente los vectores correctos en la variable LOOP, los cuales se necesitan como los coeficientes de la ecuación de iteración (5-5) para la columna de la matriz correspondiente a ese término de error de la variable dependiente. Por lo tanto, al pedir el subprograma LOOPEQ una vez para cada variable dependiente, se puede desarrollar la matriz de los coeficientes de la (5-5) sin codificación dependiente del problema especializado. Regresando LEVEL a cero, pidiendo una vez más LOOPEQ se producirá la negativa de la columna de constantes del segundo miembro de la ecuación (5-5). A continuación se pueden resolver las ecuaciones por inversión de matrices, aplicando un subprograma estándar tomado de la biblioteca de la computadora.

Una vez que converge el procedimiento de iteración antes explicado, esto completa el análisis de posición para la posición presente de entrada de la manivela. Ahora deben considerarse los análisis de velocidad y aceleración. Reacomodando las ecuaciones (*c*) y (*d*) se pueden poner a la izquierda los términos desconocidos, y los términos conocidos se colocan a la derecha, obteniéndose

$$(e^{j\theta_4})\dot{r}_4 + (jr_4 e^{j\theta_4})\dot{\theta}_4 = -(-j\dot{\theta}_2 r_2 e^{j\theta_2}) \qquad (h)$$

$$(e^{j\theta_4})\ddot{r}_4 + (jr_4 e^{j\theta_4})\ddot{\theta}_4 = -(-j\ddot{\theta}_2 r_2 e^{j\theta_2} + \dot{\theta}_2^2 r_2 e^{j\theta_2} + j2\dot{\theta}_4 \dot{r}_4 e^{j\theta_4} - \dot{\theta}_4^2 r_4 e^{j\theta_4}) \qquad (i)$$

Nótese que los coeficientes del primer miembro de estas ecuaciones son idénticos a los de la (*g*); de hecho, se encontrará que esto siempre sucede así. Por consiguiente, los análisis de velocidad y aceleración pueden emplear la misma matriz inversa hallada para resolver la ecuación (*g*), para los errores de posición. Todo lo que se necesita para los análisis de posición y velocidad son las columnas apropiadas de constantes para las ecuaciones (*h*) e (*i*). Al igual que antes, éstas se encuentran mediante la aplicación juiciosa de la subrutina LOOPEQ.

Después de igualar todas las velocidades a cero, regresar la velocidad de entrada $\dot{\theta}_2$ a su valor apropiado y hacer LEVEL = 1, una petición de LOOPEQ producirá la negativa de la columna de constantes para las ecuaciones de velocidad (*h*). Con los signos invertidos, estas constantes se pueden multiplicar por la matriz inversa almacenada, para dar los valores de las velocidades dependientes desconocidas $\dot{r}_4$ y $\dot{\theta}_4$. Una vez concluido esto, se puede hacer lo mismo para el análisis de aceleración. Después de igualar todas las aceleraciones a cero, regresar la aceleración de entrada $\ddot{\theta}_2$ a su valor apropiado y hacer LEVEL = 2, una petición de LOOPEQ producirá la negativa de la columna de constantes de las ecuaciones de aceleración (*i*). Al invertir los signos, también se pueden multiplicar estas cons-

tantes por la misma matriz inversa almacenada, para dar los valores de las aceleraciones dependientes desconocidas, $\ddot{r}_4$ y $\ddot{\theta}_4$. El análisis queda así concluido para esta posición del mecanismo y se pueden imprimir los resultados.

Procediendo a analizar la siguiente posición, se puede incrementar el ángulo de entrada de la manivela θ_2 en $\Delta\theta_2$ y se usan los datos de la última posición como estimaciones iniciales para la siguiente, al repetir el proceso de iteración.

Repasemos el proceso una vez más estableciendo los pasos del algoritmo en el orden apropiado para la programación. Suponiendo que el programa estuviera en FORTRAN, se iniciaría definiendo las configuraciones de almacenamiento de los datos. Estas incluyen una proposición COMMON similar a la de la función R, así como las configuraciones para la matriz de los coeficientes, la columna de constantes y su producto. Si se diseña el programa para máximos de, por ejemplo, 20 vectores con 10 variables dependientes (cinco circuitos) y una variable de entrada, el almacenamiento de los datos iniciales se podría definir mediante las proposiciones

```
COMMON LEVEL,RM(20),RA(20),DRM(20),DRA(20),DDRM(20),DDRA(20)
DIMENSION COEFF(10,10),CONST(10),PROD(10)
```

El programa principal se escribiría según el algoritmo siguiente:

Paso 1. Póngase ceros en todas las configuraciones.
Paso 2. Recíbanse los datos para el número de vectores, el de circuitos y los números y tipos (longitud o ángulo de los vectores) de las variables dependientes y la variable de entrada.
Paso 3. Recíbanse los datos para las magnitudes y los ángulos RM(I) y RA(I) de todos los vectores.
Paso 4. Recíbanse los datos para el incremento de la variable de entrada, la posición final, la velocidad de entrada y la aceleración de entrada.
Paso 5. Imprímanse todos los datos de entrada. Si el programa es interactivo, permítase que los usuarios modifiquen cualquier dato que deseen cambiar.
Paso 6. Conviértanse todos los ángulos a radianes.
Paso 7. Establézcase un contador de iteraciones, ITER = 0.
Paso 8. Hágase LEVEL = 0 y CALL LOOPEQ(CONST).
Paso 9. Hágase LEVEL = 1 y J = 1.
Paso 10. Iguálense a cero todas las velocidades, DRM(I) y DRA(I).
Paso 11. Hágase la velocidad apropiada, DRM o DRA, igual a 1 para la J-*ésima* variable dependiente.
Paso 12. CALL LOOPEQ(COEFF(J,1)) para calcular la J-*ésima* columna de la matriz de los coeficientes de la ecuación (5-5).
Paso 13. Increméntese J y repítanse los pasos 10 a 12 para cada variable dependiente sucesivamente.
Paso 14. Utilícese un subprograma de biblioteca para invertir la matriz COEFF.
Paso 15. Compruébense las dificultades posibles (determinante cero) durante la

inversión matricial del paso 14. Si el determinante es cero, imprímase el mensaje apropiado y hacer alto.

Paso 16. Hágase LEVEL = 0 y CALL LOOPEQ(CONST).

Paso 17. Premultiplíquese la columna CONST por la matriz inversa COEFF para formar la columna PROD de errores negativos $-\delta r_i$ y $-\delta\theta_i$.

Paso 18. Fórmense los valores corregidos de posición $r_i + \delta r_i$ y $\theta_i + \delta\theta_i$ para todas las variables dependientes.

Paso 19. Si el contador de iteraciones ITER es mayor que 10, imprímase un mensaje adecuado y hacer alto.

Paso 20. Si cualquiera de los errores δr_i y $\delta\theta_i$ es mayor que una tolerancia aceptablemente pequeña, increméntese ITER en 1 y regrésese al paso 10.

Paso 21. Póngase ceros en las configuraciones de velocidad, DRM(I) y DRA(I). Luego, introdúzcase el valor de la velocidad de entrada en la variable apropiada.

Paso 22. Hágase LEVEL = 1 y CALL LOOPEQ(CONST).

Paso 23. Premultiplíquese la columna CONST por la matriz inversa COEFF para formar la columna PROD de velocidades negativas $-\dot{r}_i$ y $-\dot{\theta}_i$.

Paso 24. Inviértanse los signos de las velocidades del paso 23 y almacénense en la DRM o DRA apropiada, para cada variable dependiente.

Paso 25. Póngase ceros en las configuraciones de aceleración, DDRM(I) y DDRA(I). A continuación, introdúzcase la aceleración de entrada en la variable apropiada.

Paso 26. Hágase LEVEL = 2 y CALL LOOPEQ(CONST).

Paso 27. Premultiplíquese la columna CONST por la matriz inversa COEFF para formar la columna PROD de aceleraciones negativas $-\ddot{r}_i$ y $-\ddot{\theta}_i$.

Paso 28. Inviértanse los signos de las aceleraciones del paso 27 y almacénese en la DDRM o DDRA apropiada para cada variable dependiente.

Paso 29. Imprímanse las posiciones (con los ángulos expresados en grados), las velocidades y las aceleraciones de todas las variables dependientes.

Paso 30. Si la variable de entrada no ha alcanzado aún la posición final, súmese el incremento de la variable de entrada y regrésese al paso 7.

Paso 31. Si es interactiva, pregúntese al usuario si desea continuar. De ser así, regrésese al paso 5.

Paso 32. Alto.

A quienes han empleado métodos iterativos en otros campos, les parecerá quizá que un programa de esta índole sería terriblemente ineficiente, que requiere un gran número de iteraciones para lograr la convergencia. Sin embargo, en el análisis cinemático, este no es el caso. La experiencia con una amplia variedad de problemas, ha demostrado que, por lo común, bastan tres o cuatro iteraciones para resolver las ecuaciones de cierre del circuito incluso de eslabonamientos muy complicados, con una exactitud mayor que las tolerancias de maquinado de las dimensiones de los eslabones. Aunque la convergencia es lenta en posiciones con

ventajas mecánicas bajas, jamás se requieren más de cinco iteraciones. Por consiguiente, la prueba del paso 19 nunca se debe satisfacer, a menos que se hayan dado datos no válidos para las dimensiones de los eslabones, o se haya llegado a una posición de centro muerto (véase a continuación) o bien, se tomen pasos extremadamente grandes entre posiciones.

Otra de las preocupaciones podría ser que el proceso de iteración pudiera no converger a una solución, si cualquiera de las estimaciones iniciales de las variables dependientes tiene un error sustancial, o los incrementos entre posiciones son tan grandes que los valores de la última no resultan ser estimaciones iniciales razonables para la siguiente. Una vez más, la experiencia no demuestra que estas preocupaciones sean válidas. Los valores iniciales de las variables dependientes se pueden estimar sin necesidad de hacer mediciones, y los cambios en el ángulo de entrada de la manivela del orden de 45 a 60° no generan problemas por lo que respecta a la convergencia.

En el análisis cinemático, el esquema de iteración antes mencionado es muy eficiente y sólo tiene una fuente potencial de dificultad; cuando la matriz de los coeficientes tiene un determinante de cero o cercano a cero, lo que causa problemas en el cálculo de su inversa. Como se indica en el paso 15, esto hará que el programa se detenga; sin embargo, al analizar mecanismos diseñados para máquinas reales, esta es una indicación de una dificultad mecánica con el propio dispositivo; se encuentra en una posición de centro muerto o cercano a él. Se puede demostrar esto recurriendo a la ecuación (5-3); si la matriz tiene un determinante de cero, no existe solución finita para las velocidades dependientes, o sea, la definición de posición de centro muerto (véase la sección 3-16).

Algunos estudiantes de la Universidad de Wisconsin escribieron un programa denominado KAPCA†, utilizando el algoritmo descrito con anterioridad y que ha resultado sumamente eficiente y fácil de usar. El programa se ha ampliado para producir una imagen del mecanismo en una pantalla para gráficas de computadora, y en la figura 5-4 se muestran algunas fotografías tomadas de tales imágenes. Sin importar la antigüedad de la computadora en la cual se opere, la velocidad de los cálculos del algoritmo anterior, aunque iterativos, es lo suficientemente rápida como para presentar el mecanismo en movimiento. Como se ilustra en la figura 5-4, el programa también está equipado para trazar la gráfica del lugar geométrico de los puntos en movimiento, facilitando con ello la presentación en la pantalla de curvas del acoplador. Sentándose ante la consola, observando esa presentación, alterando las dimensiones de los eslabones y llevando a cabo el análisis una vez más, el usuario puede diseñar con rapidez un mecanismo que cuente con las propiedades cinemáticas deseadas.

El único inconveniente del algoritmo anterior es que el usuario debe escribir un nuevo subprograma LOOPEQ para cada nuevo *tipo* de mecanismo que va a

† El Programa de Análisis Cinemático Utilizando el Álgebra Compleja (*Kinematics Analysis Program Using Complex Algebra,* KAPCA) fue escrito por R. A. Lund y O. Hanson, y las mejoras y ampliaciones corrieron a cargo de L.T. Suong, C. R. Kishline y R. Lozano.

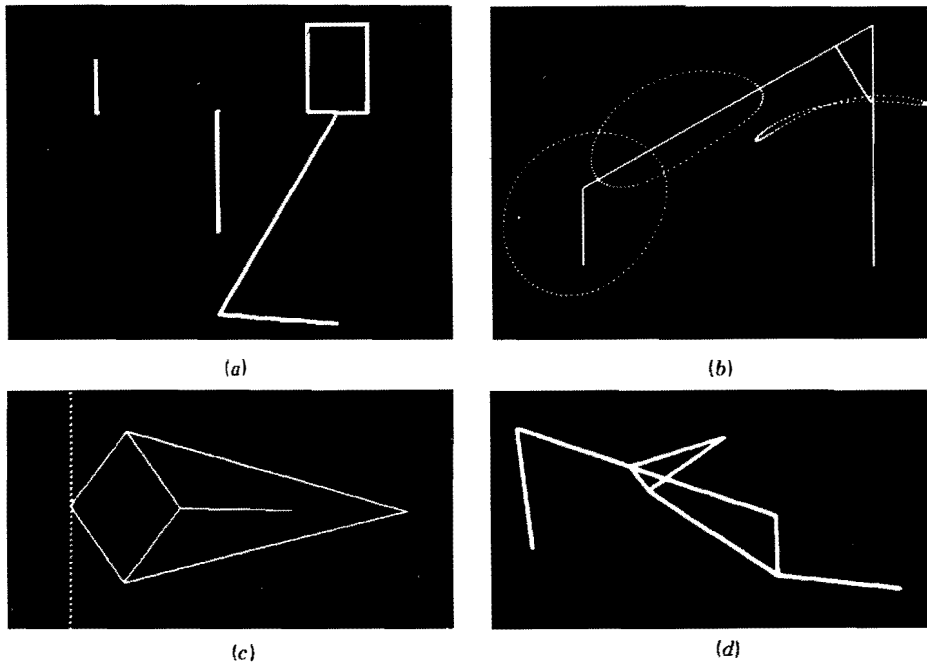


Figura 5-4 Ejemplos de eslabonamientos analizados con el programa KAPCA: *a*) Mecanismo de corredera y manivela, mostrando los vectores velocidad y aceleración para el pistón (presentados de izquierda a derecha); *b*) eslabonamiento de cuatro barras con tres de sus curvas del acoplador trazadas; *c*) mecanismo de Peaucellier, mostrando la curva rectilínea del acoplador; *d*) mecanismo de un vehículo elevador de horquilla en su posición *abatida*.

analizar. Aunque esto requiere cierto conocimiento limitado del FORTRAN, es un trabajo fácil de realizar, como lo demuestra el ejemplo previo. Asimismo, una vez que se escriben unos cuantos subprogramas básicos (uno para un eslabonamiento de cuatro barras, uno para un mecanismo de corredera y manivela, y así sucesivamente), se encuentra que muchos mecanismos planos son variaciones de uno de ellos, difiriendo sólo en las dimensiones o en la elección de los eslabones de entrada y salida.

5-5 PROGRAMAS GENERALIZADOS PARA ANÁLISIS DE MECANISMOS

Como lo sugiere el programa descrito en la sección anterior, conviene desarrollar programas generales para computadora con intervalos de aplicación muy amplios, para que se puedan justificar los costos de desarrollo a través del uso repetido. Asimismo, cada programa para computadora requiere de cierto estudio inicial y de su experimentación a tanteos por parte del usuario, antes de que se puedan aprovechar plenamente todas sus capacidades; los programas generales necesitan

menos tiempo y costo para su aprendizaje que usar un programa diferente para cada nuevo problema.

Aunque puede parecer que el programa KAPCA de la sección anterior tiene un amplio intervalo de aplicación, todavía tiene fuertes limitaciones, que rápidamente restringen su utilidad en una situación verdadera de diseño industrial. Es probable que la limitación más severa del KAPCA sea su incapacidad para efectuar un análisis de fuerza del mecanismo que se está estudiando.

El primer programa general ampliamente difundido para analizar mecanismos, fue el KAM (*Kinematic Analysis Method,* Método de Análisis Cinemático) que escribió y distribuyó la IBM. Éste incluía las capacidades necesarias para efectuar análisis de posición, velocidad, aceleración y fuerza, tanto para mecanismos planos como espaciales, y se desarrolló en torno a las soluciones del tetraedro vectorial de Chace (Cap. 11). Este programa, que se hizo público por vez primera en 1964, constituyó un logro sobresaliente, siendo el primero en reconocer la necesidad de un programa general para sistemas mecánicos que exhiban grandes cambios geométricos. Sin embargo, por ser el primero, tuvo ciertas limitaciones que ahora han sido superadas por los programas modernos y más poderosos que se describen a continuación.

También se han desarrollado poderosos programas generalizados aplicando métodos de elementos finitos, el NASTRAN y el ANSYS son dos ejemplos. Estos programas se han desarrollado primordialmente para el análisis de esfuerzos y, por ende, poseen capacidades excelentes tanto para analizar fuerzas estáticas como dinámicas de los sistemas mecánicos. También admiten que los eslabones de un mecanismo simulado se deflexionen bajo cargas y son capaces de resolver problemas de fuerzas estáticamente indeterminadas. Son programas de gran capacidad y con amplia aplicación en la industria. Aunque en ocasiones se usan para analizar mecanismos, están limitados por su incapacidad para simular los grandes cambios geométricos que caracterizan a los sistemas cinemáticos.

Hay cuatro grandes programas generalizados para computadora para el uso público general, que se dedican al tipo de problemas que se analizaron en este texto.† Los nombres de estos cuatro programas son KINSYN, DRAM, ADAMS e IMP.

El KINSYN es el único programa generalizado del que se dispone hoy en día, dirigido fundamentalmente a la síntesis cinemática. Se enfoca a la síntesis de los eslabonamientos planos, aplicando métodos análogos a los descritos en el capítulo 10. Este programa fue desarrollado por Kaufman en el Instituto de Tecnología de Massachusetts.

El modo primario de comunicación entre el KINSYN y el usuario es gráfico. Los usuarios introducen los datos que describen sus requisitos de movimiento con una pluma electrónica sobre una tablilla también electrónica de datos; la computadora recibe el esquema y proporciona la información de diseño solicitada en

† R. E. Kaufman, "Mechanism Design by Computer", *Mach. Des.*, vol. 50, no. 24, pp. 94-100, 1978.

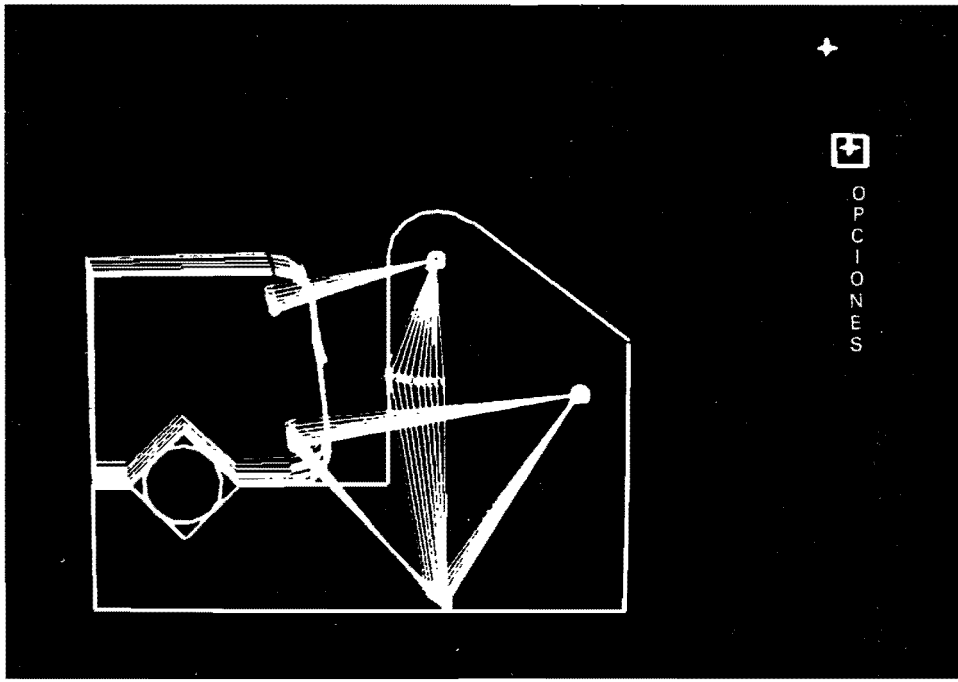


Figura 5-5 Ejemplo de diseño de un eslabonamiento. Este mecanismo de sujeción de tubería fue diseñado en unos 15 minutos, aproximadamente, utilizando el KINSYN III. El KINSYN III fue desarrollado en la *Joint Computer Facility* (Instalaciones conjuntas de computación) del Instituto de Tecnología de Massachusetts, bajo la dirección de Roger E. Kaufman, que actualmente funge como profesor de ingeniería en la Universidad George Washington. (*Por cortesía del profesor Roger E. Kaufman.*)

una pantalla de presentación gráfica. Los usuarios pueden obtener una buena sensación intuitiva respecto a la calidad de su diseño, observando su imagen animada en la pantalla de presentación. A partir de esta animación pueden desarrollar juicios concernientes a holguras, velocidades o fuerzas. En la figura 5-5 se ilustra un ejemplo de aplicación del KINSYN sobre una pantalla de presentación gráfica.

El programa DRAM, que significa Respuesta Dinámica de Maquinaria Articulada (*Dynamic Response of Articulated Machinery*), es un programa generalizado para el análisis cinemático y dinámico de mecanismos planos. Fue desarrollado por Chace en la Universidad de Michigan. Se puede usar el DRAM incluso para simular mecanismos planos de extrema complejidad, y proporcionar análisis de posición, velocidad, aceleración y fuerzas estáticas o dinámicas. El programa es interactivo y el usuario se comunica con él recurriendo al lenguaje especial DRAM orientado a problemas, ya sea por teletipo o mediante una terminal de presentación gráfica. El programa cuenta con recursos especiales para manejar el impacto entre piezas, así como una gran variedad de efectos de fricción.

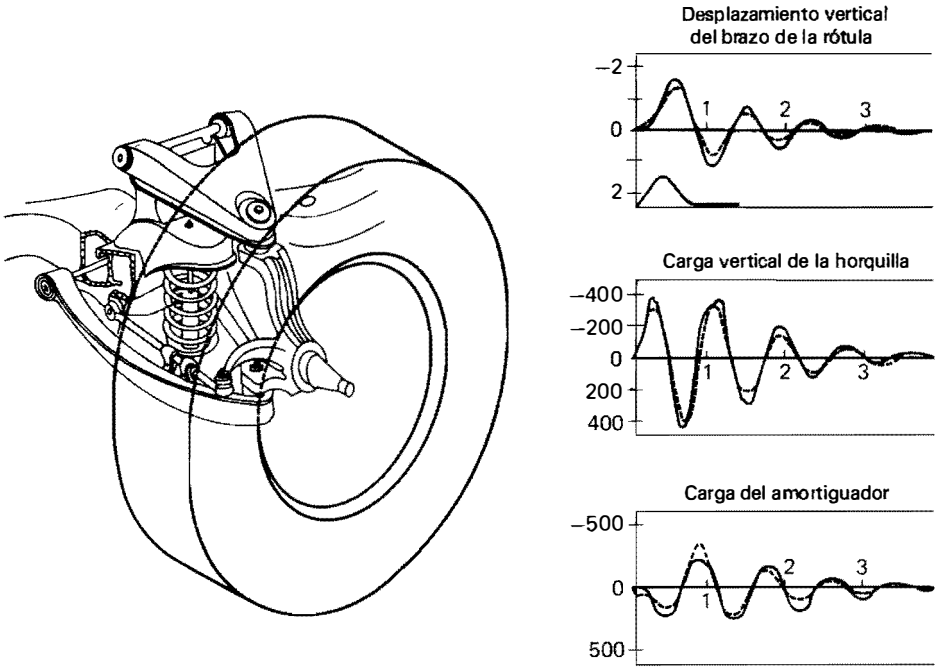


Figura 5-6 Ejemplo de medio sistema de suspensión delantera automotriz, simulado tanto con el programa ADAMS como con el IPM. Las gráficas muestran la comparación de los datos experimentales de prueba (curvas continuas) y los resultados de la simulación numérica (curvas a trazos), cuando la suspensión pasa por un bache de una pulgada de profundidad. Las unidades de las gráficas son pulgadas y libras, en los ejes verticales, contra el del tiempo en segundos, en los ejes horizontales. (Universidad de Wisconsin, Madison, Wisconsin, y *Mechanical Dynamics, Inc., Ann Arbor, Michigan.*)

El programa ADAMS, que significa Análisis Dinámico Automático de Sistemas Mecánicos (*Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems*), fue desarrollado también por Chace en la Universidad de Michigan. Al igual que el DRAM, su objetivo es el análisis cinemático, estático o dinámico de sistemas mecánicos. No obstante, permite simular sistemas bidimensionales y tridimensionales.

El IMP, Programa Integrado para Mecanismos (*Integrated Mechanisms Program*), fue desarrollado por Uicker en la Universidad de Wisconsin. También se puede emplear para simular sistemas planos o espaciales y proporcionar análisis cinemáticos, estáticos o dinámicos.

Aunque desde el punto de vista interno son muy diferentes, el IMP y el ADAMS son comparables desde el punto de vista del usuario; ambos tienen la capacidad de simular incluso complejos sistemas tridimensionales de cuerpos rígidos y proporcionar una amplia gama de análisis, incluyendo posiciones, velocidades, aceleraciones y fuerzas estáticas y dinámicas. Cada uno de ellos usa su propio lenguaje orientado a problemas, para los datos de entrada, y ambos se

pueden emplear ya sea en un medio intermitente, o bien, interactivo. Cualquiera de ellos puede simular la historia de un sistema mecánico, que parte de una cierta configuración inicial y se somete a perturbaciones de fuerza o de movimiento conocidas. Asimismo, los dos tienen capacidad para tener salida en pantalla, en una terminal de presentación gráfica. Una aplicación excelente para cualquiera de estos programas sería la simulación de la suspensión delantera de un automóvil, que se muestra en la figura 5-6. Se ha llevado a cabo la simulación de este mismo problema con ambos programas, y los dos coinciden bien con los datos experimentales de prueba.†

PROBLEMAS

5-1 Escríbase un programa para calculadora o computadora, para el análisis del mecanismo de compás de barras elíptico que se muestra en la figura de esta página. La posición de partida, el incremento en la posición y la velocidad (constante) del eslabón 4 deben ser recibidos como datos, y deben presentarse en la pantalla la posición, la velocidad y la aceleración de los eslabones 2 y 3.

5-2 Escríbase un programa para calculadora o computadora, para analizar la posición, la velocidad y la aceleración del eslabón 4 del mecanismo de yugo escocés ilustrado en la figura. La posición, el incremento y la velocidad (constante) de la manivela, se deben recibir como datos, y el análisis se continuará sobre el ciclo de operación completo.

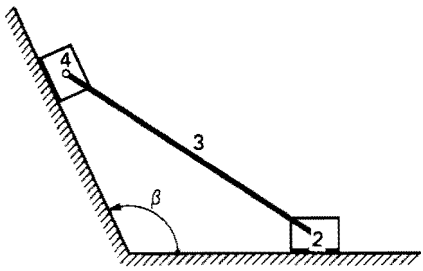
5-3 Escríbanse y verifíquense los programas para cada uno de los algoritmos de la sección 5-2.

5-4 Escríbanse y verifíquense los programas para cada uno de los algoritmos de la sección 5-3.

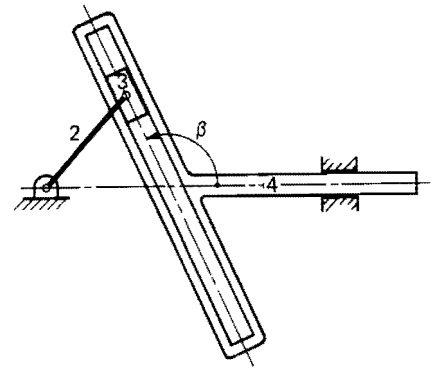
5-5 Escríbase un programa para computadora usando el algoritmo descrito en la sección 5-4.

5-6 Hágase una investigación en las bibliotecas y escríbase un informe acerca de los programas para computadora, para el diseño y el análisis de mecanismos. Se puede desarrollar este informe sobre la descripción de los programas que se mencionaron en la sección 5-5, o bien, incluir descripciones similares de otros programas.

† Estas simulaciones se realizaron para el *Strain HistoryPrediction Committee* (Comité de Predicción del Historial de Deformaciones) de la *Society of Automotive Engineers* (Sociedad de Ingenieros en Automoción). Los datos de vehículo y los resultados experimentales de las pruebas fueron proporcionados por la *Chevrolet Engineering Division, General Motors Corporation.*



Problema 5-1



Problema 5-2

CAPÍTULO

SEIS

DISEÑO DE LEVAS

Una *leva* es un elemento mecánico que sirve para impulsar a otro elemento, llamado *seguidor*, para que desarrolle un movimiento especificado, por contacto directo. Los mecanismos de leva y seguidor son sencillos y poco costosos, tienen pocas piezas móviles y ocupan espacios muy reducidos. Además, no son difíciles de diseñar movimientos del seguidor que tengan casi cualquier característica deseada. Por estas razones, los mecanismos de leva se emplean profusamente en la maquinaria moderna.

Gran parte del material de este capítulo es una aplicación de la teoría desarrollada en los anteriores. Además, uno de los problemas más interesantes que se trata es cómo determinar un contorno de leva que produzca, en última instancia, un movimiento especificado.

6-1 CLASIFICACIÓN DE LAS LEVAS Y LOS SEGUIDORES

La versatilidad y flexibilidad en el diseño de los sistemas de levas se encuentran entre sus características más atractivas. Con todo, esto da origen también a una gran variedad de perfiles y formas, y a la necesidad de cierta terminología para distinguirlas.

Las levas se clasifican según sus formas básicas; en la figura 6-1 se ilustran cuatro tipos diferentes:

a) *Leva de placa,* llamada también de *disco* o *radial*
b) *Leva de cuña*
c) *Leva cilíndrica* o *de tambor*
d) *Leva lateral* o *de cara*

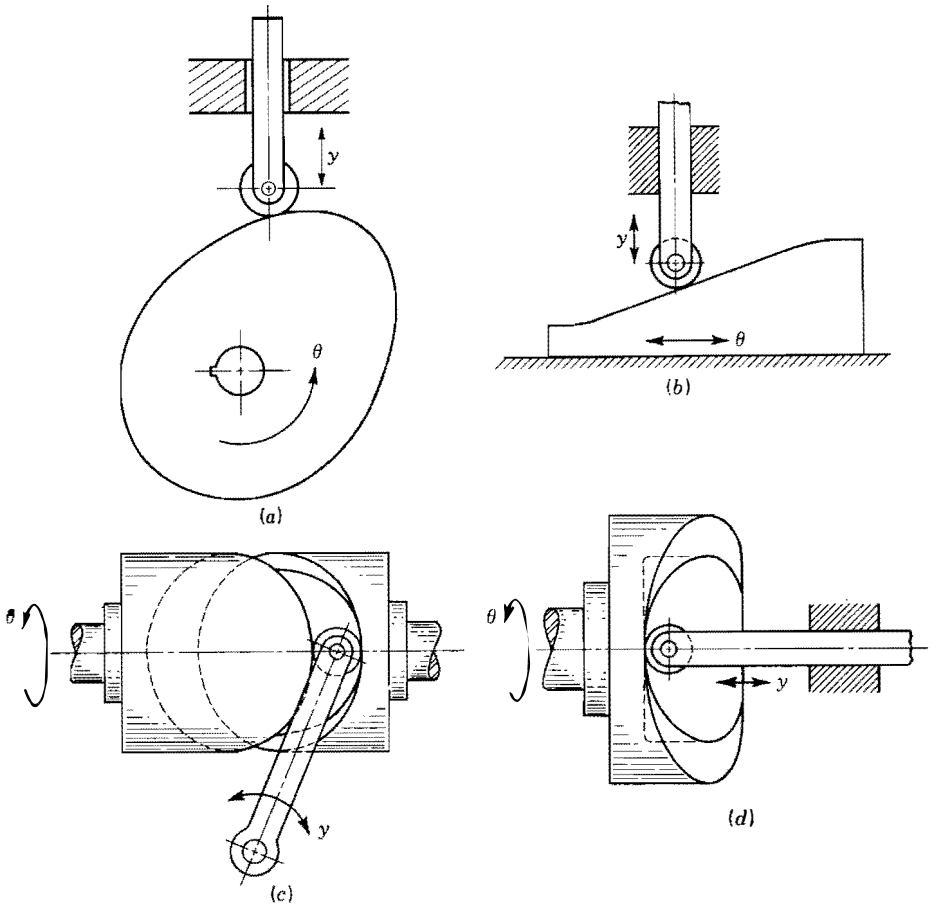


Figura 6-1 Tipos de levas: *a*) de placa, *b*) de cuña, *c*) de tambor y *d*) de cara.

La menos común de ellas en aplicaciones prácticas es la leva de cuña debido a que necesita un movimiento alternativo de entrada en lugar de un movimiento continuo y, con mucho, la más común de todas es la leva de placa. Por esta razón, la mayor parte de lo que resta de este capítulo se ocupará específicamente de las levas de placa, aunque los conceptos presentados se aplican a todas.

Los sistemas de levas se clasifican también según la forma básica del seguidor. En la figura 6-2 se presentan levas de placa que actúan con cuatro tipos diferentes de seguidores:

a) Seguidor *de cuña*
b) Seguidor *de cara plana*
c) Seguidor *de rodillo*
d) Seguidor *de cara esférica* o *zapata curva*

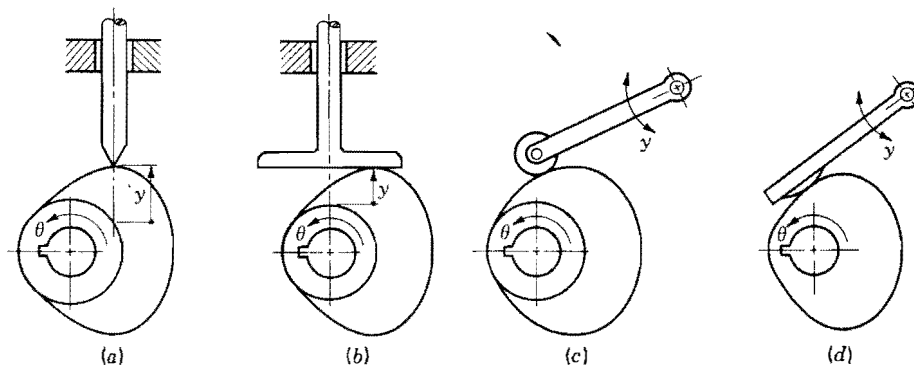


Figura 6-2 Levas de placa con *a*) un seguidor excéntrico de cuña con movimiento alternativo; *b*) seguidor de movimiento alternativo y cara plana, *c*) seguidor oscilante de rodillo y *d*) seguidor oscilante de zapata curva.

Nótese que, por lo común, se hace que la cara del seguidor tenga una forma geométrica simple, y el movimiento se logra mediante el diseño apropiado del perfil de la leva con la que constituirá el sistema. Por supuesto, no siempre sucede así, y existen ejemplos de *levas inversas* en las que el elemento de salida se hace en máquina dándole una forma compleja.

Otro método para clasificar las levas es de acuerdo con el movimiento de salida característico, permitido entre el seguidor y el marco de referencia. Por ende, algunas levas tienen seguidores de *movimiento alternativo* (traslación) como se ilustra en las figuras 6-1*a, b, d* y 6-2*a, b,* en tanto que otras lo tienen *oscilante* (rotación) como en las figuras 6-1*c* y 6-2*c, d*. Además, una subdivisión posterior de los seguidores de movimiento alternativo se basa en el hecho de si la línea

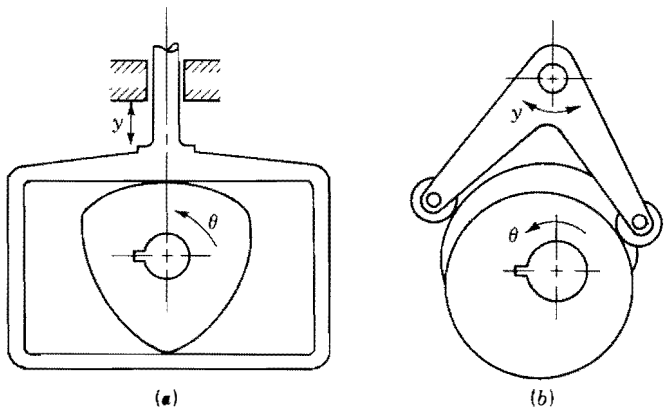


Figura 6-3 *a*) Leva de anchura constante con seguidor de movimiento alternativo y cara plana. *b*) Levas conjugadas con un seguidor oscilante de rodillo.

central del vástago del seguidor es *excéntrico*, en relación con el centro de la leva, como en la figura 6-2*a*, o *radial* como se presenta en la figura 6-2*b*.

En todos los sistemas de levas el diseñador debe asegurarse de que el seguidor se mantenga en contacto con la leva. Esto se logra mediante la gravedad, incluyendo un resorte apropiado o por medio de una restricción mecánica. En la figura 6-1*c*, el seguidor está restringido por la ranura. En la figura 6-3*a* se incluye un ejemplo de leva de *anchura constante,* en donde se tienen dos puntos de contacto entre la leva y el seguidor proporcionados por la restricción. También se puede introducir la restricción mecánica empleando levas *duales* o *conjugadas*, en una disposición como la que se ilustra en la figura 6-3*b*. En este caso, cada leva tiene su propio rodillo; pero estos están montados sobre un seguidor común.

6-2 DIAGRAMAS DE DESPLAZAMIENTOS

A pesar de la amplia variedad de tipos de levas usados y sus diferentes formas, poseen también ciertas características comunes que permiten un enfoque sistemático para su diseño. Por lo común, un sistema de leva es un dispositivo con un solo grado de libertad. Es impulsado por un movimiento de entrada conocido, casi siempre un eje que gira a velocidad constante, y se pretende producir un movimiento de salida determinado que se desea para el seguidor.

Con objeto de investigar el diseño de las levas en general, el movimiento de entrada conocido se denotará por $\theta(t)$ y el de salida por y. Si se examinan nuevamente las figuras 6-1 a 6-3, se observarán las definiciones de y y θ para varios tipos de levas. Estas figuras muestran también que y es una distancia de traslación para un seguidor de movimiento alternativo; pero es un ángulo para un seguidor oscilante.

Durante la rotación de la leva a lo largo de un ciclo del movimiento de entrada, el seguidor ejecuta una serie de eventos como los que se muestran gráficamente en el *diagrama de desplazamientos* de la figura 6-4. En un diagrama de esta índole, la abscisa representa un ciclo del movimiento de entrada θ (una revolución de la leva) y se dibuja a cualquier escala conveniente. La ordenada representa el recorrido y del seguidor y, en el caso de un seguidor de movimiento alternativo, se dibuja casi siempre a escala completa para ayudar al trazado de la

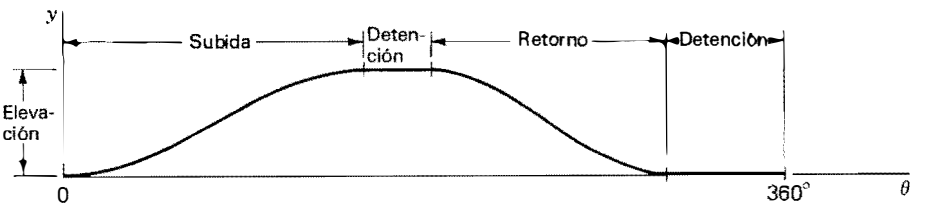


Figura 6-4 Diagrama de desplazamientos.

leva. En un diagrama de desplazamientos se puede identificar una porción de la gráfica conocida como *subida,* en donde el movimiento del seguidor es hacia afuera del centro de la leva. La subida máxima se llama *elevación*. Los periodos durante los cuales el seguidor se encuentra en reposo se conocen como *detenciones* y el *retorno* es el periodo en el que el movimiento del seguidor es hacia el centro de la leva.

Muchas de las características esenciales de un diagrama de desplazamientos, por ejemplo, la elevación total o la colocación y duración de las detenciones, por lo común son dictadas por las necesidades de la aplicación. Sin embargo, hay muchos movimientos posibles para el seguidor que se pueden usar para la subida y el retorno, y algunos son preferibles a otros, dependiendo de la situación. Uno de los pasos clave en el diseño de una leva es la elección de las formas apropiadas para estos movimientos. Una vez que estos se han elegido, es decir, una vez que se establece la relación exacta entre la entrada θ y la salida y, se puede construir el diagrama de desplazamiento con precisión y es una representación gráfica de la relación funcional

$$y = y(\theta)$$

Esta ecuación contiene en su expresión misma la naturaleza exacta del perfil de la leva final, la información necesaria para su trazado y fabricación, y también las características importantes que determinan la calidad de su comportamiento dinámico. No obstante, antes de examinar estos temas más a fondo, se exhibirán los métodos gráficos de construcción de los diagramas de desplazamientos, para diversos movimientos de subida y retorno.

El diagrama de desplazamientos para el *movimiento uniforme* es una recta con una pendiente constante. Por consiguiente, en el caso de una velocidad constante de entrada, la velocidad del seguidor también es constante. Este movimiento no es útil para la elevación completa debido a los vértices que se producen en los límites o fronteras con otras secciones del diagrama de desplazamientos. Con todo, se emplea a menudo entre otras secciones curvas, eliminando con ello esos vértices.

En la figura 6-5*a* se ilustra el diagrama de desplazamientos para un movimiento uniforme modificado. La porción central del diagrama, subtendida por el ángulo de leva β_2 y la elevación L_2, es un movimiento uniforme. A los extremos, a saber, los ángulos β_1 y β_3, y las elevaciones correspondientes L_1 y L_3, se les da una forma tal como para conferir al seguidor un *movimiento parabólico.* En breve se verá que esto produce una aceleración constante. El diagrama muestra la forma en que se deben igualar las pendientes del movimiento parabólico con la del movimiento uniforme. Conocidos β_1, β_2, β_3, y la elevación total L, se pueden hallar las elevaciones individuales L_1, L_2, y L_3, localizando los puntos medios de las secciones β_1 y β_3, y trazando una recta como se indica. En la figura 6-5*b* se ilustra una construcción gráfica para una parábola que se debe ajustar dentro de una frontera rectangular dada, definida por L_1 y β_1. La abscisa y la ordenada se dividen primero en un número conveniente, pero igual, de divisiones y se numeran

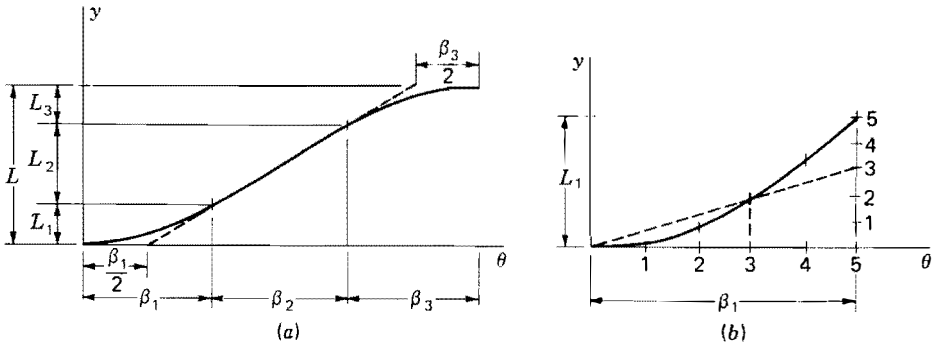


Figura 6-5 Movimiento parabólico: *a*) entrecaras con movimiento uniforme y *b*) construcción gráfica del diagrama de desplazamientos.

como se indica. La construcción de cada punto de la parábola sigue entonces la que se señala por medio de las rectas a trazos, para el punto 3.

En el trazado de una leva real, deben emplearse muchas divisiones para obtener una exactitud adecuada. Al mismo tiempo, el dibujo se hace a una escala grande, tal vez 10 veces el tamaño. No obstante, para mayor claridad en su lectura, las figuras de este capítulo se presentan con un número mínimo de puntos, para definir las curvas e ilustrar las técnicas gráficas.

En la figura 6-6 se muestra el diagrama de desplazamientos para el *movimiento armónico simple*. La construcción gráfica utiliza un semicírculo que tiene un diámetro igual a la elevación L. El semicírculo y la abscisa se dividen en un número igual de partes, y luego la construcción sigue el camino que se indica mediante las rectas a trazos para el punto 2.

El *movimiento cicloidal* obtiene su nombre de la curva geométrica llamada cicloide. Como se muestra a la izquierda de la figura 6-7, un círculo de radio $L/2\pi$, en donde L es la elevación total, efectuará exactamente una revolución al rodar

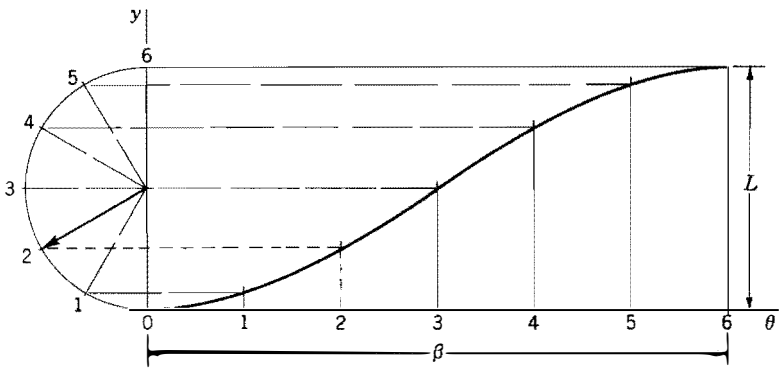


Figura 6-6 Movimiento armónico simple.

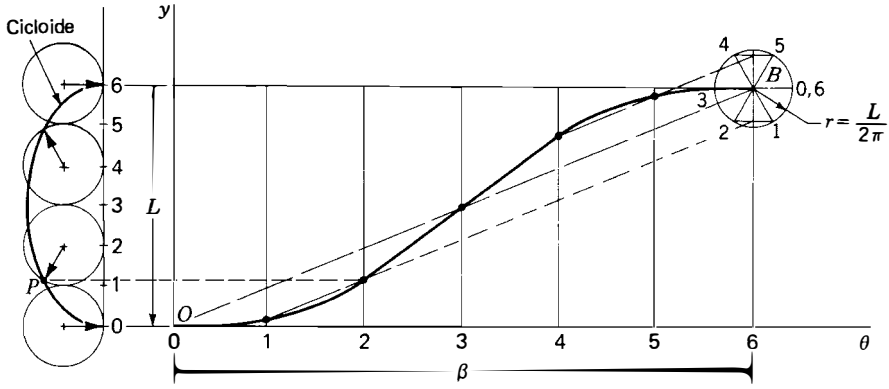


Figura 6-7 Movimiento cicloidal.

a lo largo de la ordenada, desde el origen hasta $y = L$. Un punto P del círculo, localizado inicialmente en el origen, traza un cicloide como se muestra. Si el círculo rueda sin resbalar con una velocidad constante, la gráfica de la posición vertical y del punto contra el tiempo da el diagrama de desplazamientos que se muestra a la derecha de la figura. Para los fines gráficos, resulta mucho más conveniente dibujar el círculo una sola vez, empleando el punto B como centro. Después de dividir el círculo y la abscisa en un número igual de partes y numerándolas como se indica, se proyecta cada punto del círculo horizontalmente hasta que se interseca la ordenada; a continuación, partiendo de esta última, se proyecta paralelo a la diagonal OB para obtener el punto correspondiente sobre el diagrama de desplazamientos.

6-3 DISEÑO GRÁFICO DE PERFILES DE LEVAS

Examinemos ahora el problema de determinar el perfil exacto de la superficie de una leva requerido para entregar un movimiento especificado del seguidor. Aquí se supone que el movimiento requerido se determinó por completo en forma gráfica, analítica o numérica, como se analiza en las secciones posteriores. Por consiguiente, se puede trazar un diagrama completo a escala de desplazamientos para la rotación completa de la leva. El problema ahora es trazar el perfil apropiado de la leva para lograr el movimiento del seguidor representado por este diagrama de desplazamientos.

Se presentará una ilustración para el caso de una leva de placa, como la que se ve en la figura 6-8. En primer lugar observemos cierta nomenclatura adicional que se muestra en esta figura:

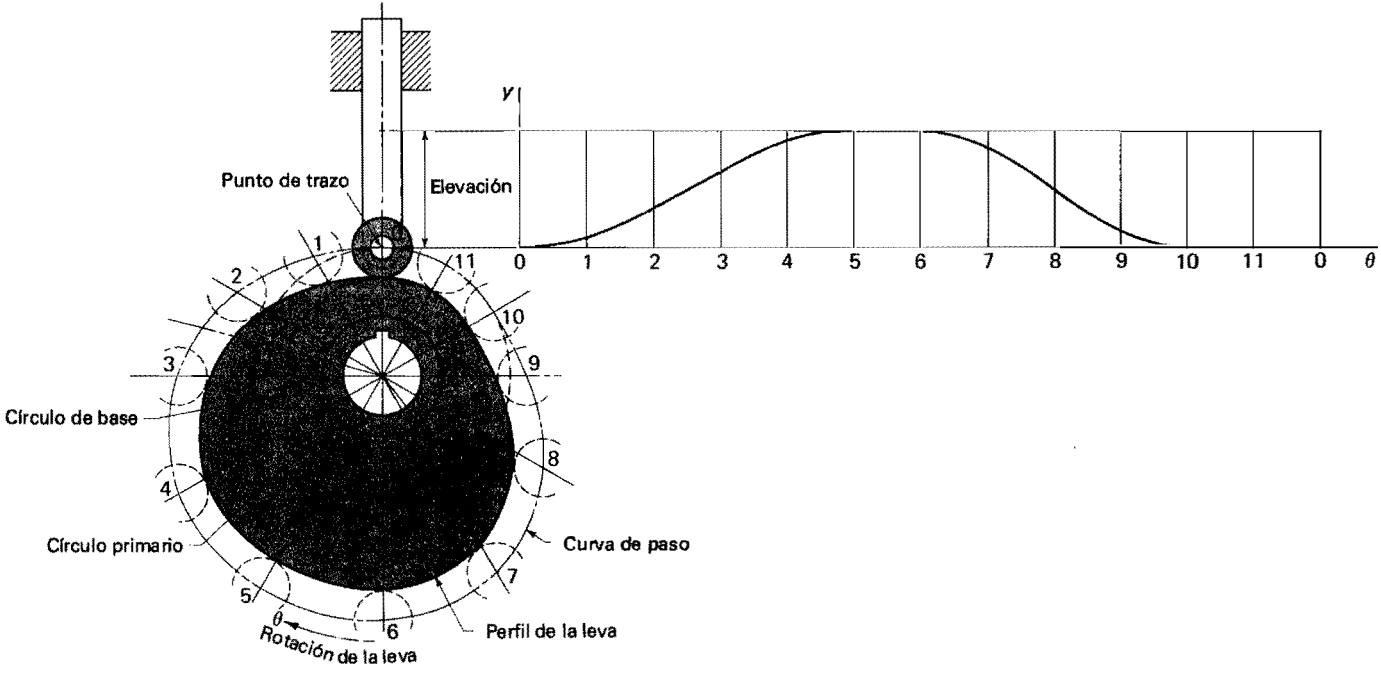


Figura 6-8 Nomenclatura de las levas. Superficie de la leva desarrollada manteniéndola estacionaria y haciendo girar al seguidor desde la estación 0 y pasando por las estaciones 1, 2, 3, etc.

El *punto de trazo* es un punto teórico del seguidor; corresponde al punto de un seguidor de cuña ficticio. Se elige en el centro de un seguidor de rodillo o sobre la superficie de un seguidor de cara plana.

La *curva de paso* es el lugar geométrico generado por el punto de trazo conforme el seguidor se mueve en relación con la leva. Para un seguidor de cuña, la curva de paso y la superficie de la leva son idénticas. En el caso de un seguidor de rodillo, están separadas por el radio del rodillo.

El *círculo primario* es el más pequeño que se puede trazar con centro en el eje de rotación de la leva y tangente a la curva de paso. El radio de este círculo es R_0.

El *círculo de base* es el círculo más pequeño con centro sobre el eje de rotación de la leva y tangente a la superficie de ésta. En el caso de un seguidor de rodillo, es más pequeño que el círculo primario, siendo la diferencia el radio del rodillo y, en el caso de un seguidor de cara plana, es idéntico al círculo primario.

Al construir un perfil de leva se aplica el principio de inversión cinemática, imaginando que la leva es estacionaria y haciendo que el seguidor gire *en sentido*

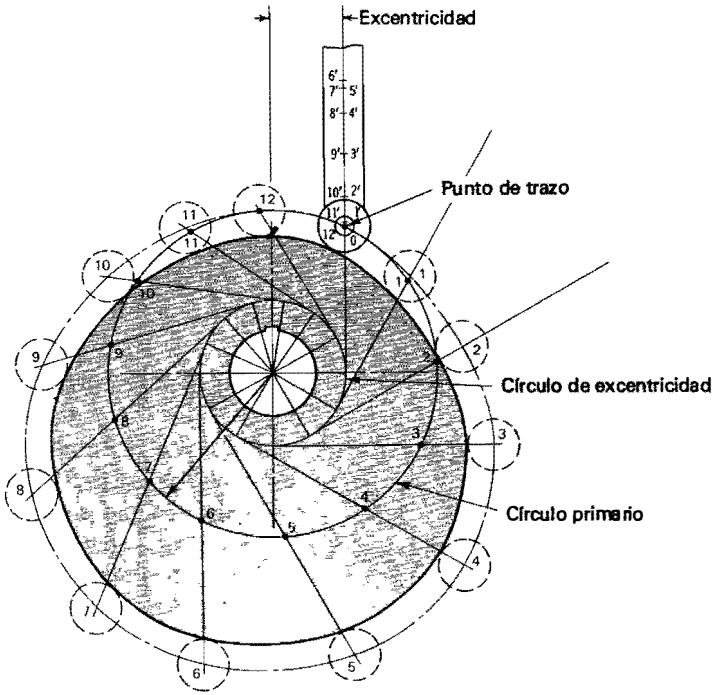


Figura 6-9 Trazado de un perfil de leva para un seguidor excéntrico de movimiento alternativo con rodillo.

opuesto a la dirección de rotación de la leva. Como se muestra en la figura 6-8, el círculo primario se divide en un cierto número de segmentos y se asignan números de estación a los límites de dichos sementos. Dividiendo la abscisa del diagrama de desplazamientos en segmentos correspondientes, se pueden transferir entonces las distancias, por medio de divisores, del diagrama de desplazamientos directamente sobre el trazado de la leva, a fin de localizar las posiciones correspondientes al punto de trazo. Una curva suave que pase por estos puntos es la curva de paso. En el caso de un seguidor de rodillo, como el de este ejemplo, simplemente se dibuja el rodillo en su posición apropiada en cada estación y luego se construye el perfil de la leva como una curva suave tangente a todas estas posiciones del rodillo.

En la figura 6-9 se muestra cómo se debe modificar el método de construcción para un seguidor excéntrico de rodillo. Se principia construyendo un *círculo de excentricidad,* usando un radio igual a la magnitud de la excentricidad. Después de identificar los números de estación en torno al círculo primario, se construye la línea central del seguidor para cada estación, haciéndola tangente al círculo de excentricidad. Ahora se establecen los centros del rodillo para cada estación, transfiriendo las distancias del diagrama de desplazamientos directamente a estas líneas centrales del seguidor, midiendo siempre hacia afuera desde el círculo primario. Un procedimiento alternativo es identificar los puntos 0′,1′,2′, etc., sobre una sola línea central del seguidor y luego hacerlos girar en torno al centro de la leva, hasta las posiciones correspondientes de la línea central del seguidor. En cualquiera de am-

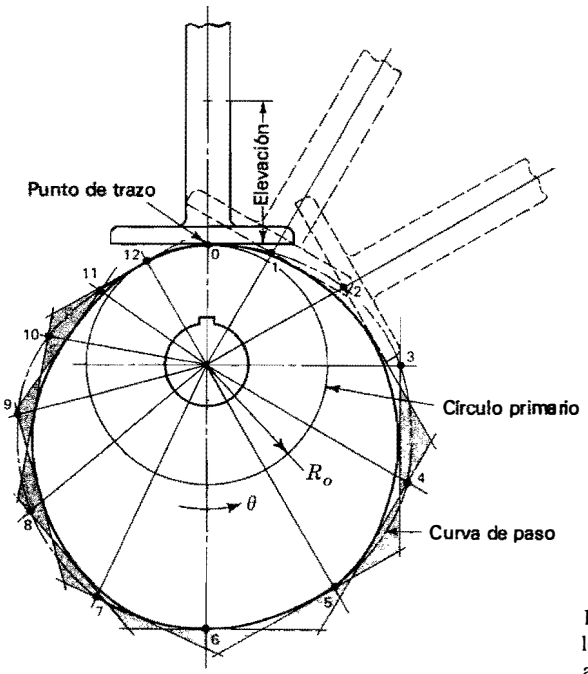


Figura 6-10 Trazado de un perfil de leva para un seguidor de movimiento alternativo y cara plana.

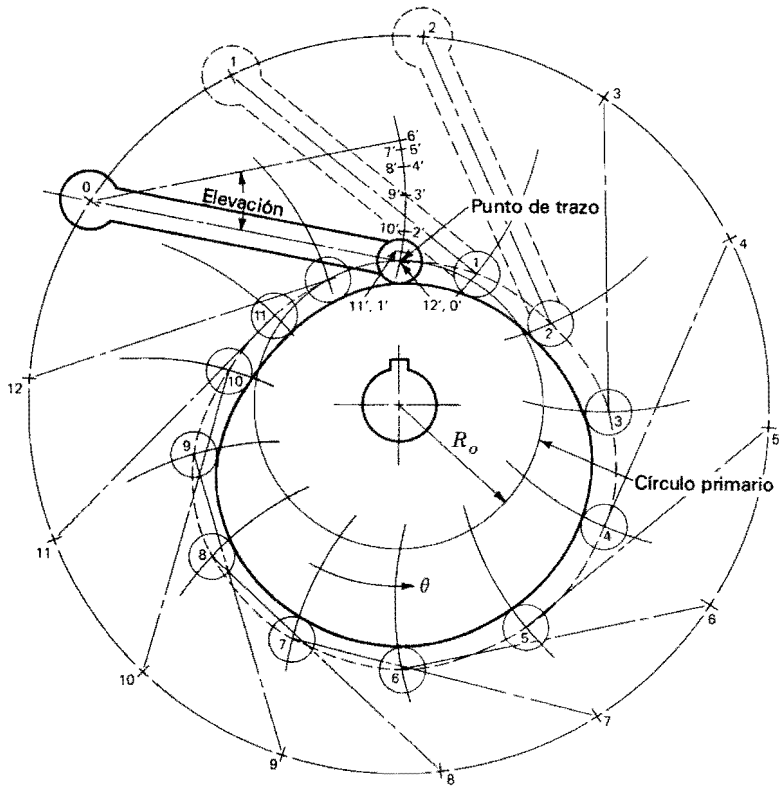


Figura 6-11 Trazado de un perfil de leva para un seguidor oscilante de rodillo.

bos casos, se pueden trazar a continuación los círculos del rodillo y una curva suave tangente a todos los círculos del rodillo es el perfil requerido de la leva.

En la figura 6-10 se ilustra la construcción para una leva de placa con seguidor de movimiento alternativo, de cara plana. La curva de paso se construye aplicando un método similar al que se empleó para el seguidor de rodillo en la figura 6-8. Entonces se construye en cada posición una recta que represente la cara plana del seguidor. El perfil de la leva es una curva suave que se traza tangente a todas las posiciones del seguidor. Quizá resulte útil extender cada recta que represente una posición de la cara del seguidor, para formar una serie de triángulos. Si éstos se sombrean ligeramente, como lo sugiere la ilustración, será más fácil trazar el perfil de la leva, dentro de todos los triángulos sombreados y tangente a los lados interiores de los triángulos.

En la figura 6-11 se muestra el trazado del perfil de una leva de placa con un seguidor oscilante de rodillo. En este caso se debe hacer girar el centro pivotal fijo del seguidor en sentido opuesto a la dirección de rotación de la leva, para desarrollar el perfil de la misma. Para lograr esta inversión, primero se traza un círculo

en torno al centro del eje de la leva que pase por el pivote fijo del seguidor. A continuación se divide este círculo y se asignan números de estación que correspondan con el diagrama de desplazamiento. Luego se dibujan arcos en torno a cada uno de estos centros, todos con radios iguales que correspondan a la longitud del seguidor.

En el caso de un seguidor oscilante, los valores de las ordenadas del diagrama de desplazamientos representan movimientos angulares del seguidor. Sin embargo, si desde un principio se elige la escala vertical del diagrama de desplazamientos en forma adecuada, y si la elevación total del seguidor es un ángulo razonablemente pequeño, se pueden transferir directamente las distancias de las ordenadas del diagrama de desplazamientos en cada estación, al arco correspondiente recorrido por el seguidor, utilizando divisores y midiendo hacia afuera a lo largo del arco a partir del círculo primario, con el fin de localizar el centro del rodillo para esa estación. Por último, se dibujan los círculos que representan las posiciones del rodillo en cada estación, y se construye el perfil de la leva como una curva suave tangente a cada una de estas posiciones del rodillo.

A partir de los diferentes ejemplos presentados en esta sección, debe haberse aclarado que cada tipo diferente de sistema de leva y seguidor requiere de su propio método de construcción para determinar gráficamente el perfil de la leva, a partir del diagrama de desplazamientos. No se pretende que los ejemplos presentados sean exhaustivos de todos los posibles, pero ilustran el procedimiento general. También deben servir para ilustrar y reforzar el análisis de la sección anterior; ahora debe quedar claro que gran parte de la forma detallada de la propia leva es un resultado directo de la forma del diagrama de desplazamientos. Aunque los diferentes tipos de levas y seguidores tendrán formas distintas para el mismo diagrama de desplazamientos, una vez que se dan unos cuantos parámetros (como por ejemplo, el radio del círculo primario) para determinar el tamaño de la leva, el resto de su forma resulta directamente de las necesidades de movimiento dadas por el diagrama de desplazamientos.

6-4 DERIVADAS DEL MOVIMIENTO DEL SEGUIDOR

Se ha visto que el diagrama de desplazamientos se representa gráficamente con el movimiento del seguidor y como la ordenada y el ángulo de rotación de la leva θ como la abscisa, sea cual fuere el tipo de leva o seguidor de que se trate. El diagrama de desplazamientos es, por ende, una gráfica que representa alguna función matemática que relaciona los movimientos de entrada y de salida del sistema de leva. En términos generales, esta relación es

$$y = y(\theta) \tag{6-1}$$

Si se quisiera tomar la molestia de hacerlo, se podrían trazar gráficas adicionales que representen las derivadas de y con respecto a θ. La primera derivada se denotará como y',

$$y'(\theta) = \frac{dy}{d\theta} \tag{6-2}$$

Esta expresión representa la pendiente del diagrama de desplazamientos en cada ángulo θ. Está derivada, aunque ahora parece tener poco valor práctico, es una medida de "lo empinado" del diagrama de desplazamientos. En secciones posteriores se descubrirá que está íntimamente relacionada con la ventaja mecánica del sistema de leva y se manifiesta en aspectos tales como el ángulo de presión (véase la sección 6-10). Si se considera una leva de cuña (Fig. 6-1*b*) con un seguidor también de cuña, el propio diagrama de desplazamientos tiene la misma forma que la leva correspondiente. Aquí se puede empezar por imaginar las dificultades que se presentarán si la leva es demasiado "empinada", esto es, si y' tiene un valor demasiado alto.

La segunda derivada de y con respecto a θ también es significativa. Se representa aquí como y''

$$y''(\theta) = \frac{d^2y}{d\theta^2} \tag{6-3}$$

Aunque no tan fácil de imaginar, esta derivada está íntimamente relacionada con el radio de curvatura de la leva en varios puntos a lo largo de su perfil. Puesto que existe una relación inversa, conforme y'' se hace muy grande, el radio de curvatura se hace muy pequeño; si y'' se hace infinita, el perfil de la leva se hace puntiaguda en esa posición, lo que constituye una condición no satisfactoria en extremo desde el punto de vista de los esfuerzos de contacto entre las superficies de la leva y el seguidor.

La siguiente derivada también se puede representar gráficamente, si así se desea,

$$y'''(\theta) = \frac{d^3y}{d\theta^3} \tag{6-4}$$

Aunque no es fácil describirla geométricamente, es la rapidez de cambio de y'', y más adelante se verá que esta derivada también se debe controlar al elegir la forma detallada del diagrama de desplazamientos.

Ejemplo 6-1 Obténganse ecuaciones para describir el diagrama de desplazamientos de una leva que sube con movimiento parabólico, desde una detención hasta otra, de tal manera que la elevación total es L y el ángulo total de rotación de la leva es β. Hágase la gráfica del diagrama de desplazamientos y dé sus tres primeras derivadas con respecto a la rotación de la leva.

SOLUCIÓN Como se ilustra en la figura 6-5-*a*, se necesitarán dos parábolas que se encuentren en un punto de inflexión que, en este caso, se toma a la mitad del desplazamiento. Para la primera mitad del movimiento se elige la ecuación general de una parábola,

$$y = A\theta^2 + B\theta + C \tag{a}$$

que tiene las derivadas

$$y' = 2A\theta + B \tag{b}$$

$$y'' = 2A \tag{c}$$

$$y''' = 0 \tag{d}$$

Para igualar de manera apropiada la posición y la pendiente con las de la detención anterior, en $\theta = 0$ se tiene que $y(0) = y'(0) = 0$. Por consiguiente, las ecuaciones (a) y (b) muestran que $B = C = 0$. A continuación, examinando el punto de inflexión, en $\theta = \beta/2$ se desea que $y = L/2$; la (a) da

$$A = \frac{2L}{\beta^2}$$

Así pues, para la primera mitad del movimiento parabólico, las ecuaciones son

$$y = 2L\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 \tag{6-5}$$

$$y' = \frac{4L}{\beta}\frac{\theta}{\beta} \tag{6-6}$$

$$y'' = \frac{4L}{\beta^2} \tag{6-7}$$

$$y''' = 0 \tag{6-8}$$

La pendiente máxima ocurre en el punto de inflexión, en donde $\theta = \beta/2$. Su valor es

$$y'_{\text{máx}} = \frac{2L}{\beta} \tag{6-9}$$

Por lo que respecta a la segunda mitad del movimiento, se regresa a las ecuaciones generales (a) a (d) para una parábola. Si se sustituyen las condiciones de que en $\theta = \beta$, $y = L$ y $y' = 0$, se tiene

$$L = A\beta^2 + B\beta + C \tag{e}$$

$$0 = 2A\beta + B \tag{f}$$

Puesto que la pendiente debe igualarse con la de la primera parábola en $\theta = \beta/2$, se tiene, partiendo de las ecuaciones (6-9) y (b),

$$\frac{2L}{\beta} = 2A\frac{\beta}{2} + B \tag{g}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (e) o (g) da

$$A = -\frac{2L}{\beta^2} \qquad B = \frac{4L}{\beta} \qquad C = -L$$

Cuando estas constantes se sustituyen en las formas generales, se obtienen las ecuaciones para la segunda mitad del movimiento parabólico

$$y = L\left[1 - 2\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right)^2\right] \tag{6-10}$$

$$y' = \frac{4L}{\beta}\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right) \tag{6-11}$$

$$y'' = -\frac{4L}{\beta^2} \tag{6-12}$$

$$y''' = 0 \tag{6-13}$$

En la figura 6-12 se muestra el diagrama de desplazamientos para este ejemplo, con sus tres derivadas.

La exposición anterior se relaciona con las *derivadas cinemáticas* del movimiento del seguidor. Estas son derivadas con respecto a θ y se relacionan con la geometría del sistema de leva. Ahora consideremos las derivadas de los movimientos de seguidor con respecto al tiempo. En primer lugar se supondrá que se conoce la historia respecto al tiempo del movimiento de entrada $\theta(t)$. También se supone que se conoce su velocidad $\omega = d\theta/dt$, su aceleración $\alpha = d^2\theta/dt^2$, y su siguiente derivada, llamada con frecuencia *tirón* o *segunda aceleración*, $\dot{\alpha} = d^3\theta/dt^3$. Por lo común, la leva de placa es impulsada por un eje a velocidad constante. En este caso, ω es una constante conocida, $\theta = \omega t$, y $\alpha = \dot{\alpha} = 0$. Sin embargo, durante el arranque del sistema de leva éste no es el caso, y primero se considerará la situación más general.

Partiendo de la ecuación general del diagrama de desplazamientos,

$$y = y(\theta) \qquad \theta = \theta(t)$$

Por lo tanto, se puede derivar para encontrar las derivadas respecto al tiempo del movimiento del seguidor. Por ejemplo, la velocidad del seguidor está dada por

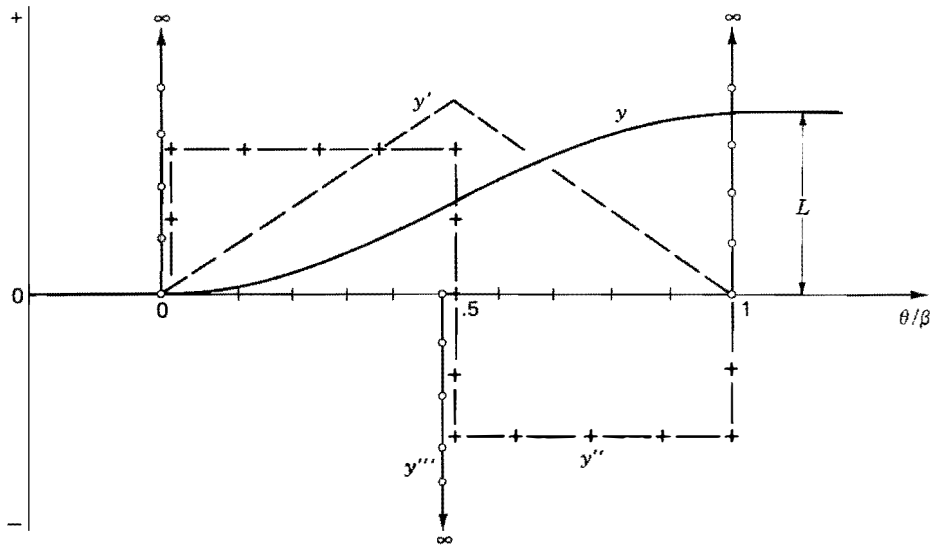


Figura 6-12 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento parabólico.

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{y} = y'\omega \tag{6-14}$$

Del mismo modo, la aceleración y el tirón del seguidor están dados por

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = y''\omega^2 + y'\alpha \tag{6-15}$$

y

$$\dddot{y} = \frac{d^3y}{dt^3} = y'''\omega^3 + 3y''\omega\alpha + y'\dot{\alpha} \tag{6-16}$$

Cuando la velocidad del eje de la leva es constante, estas expresiones se reducen a

$$\dot{y} = y' \qquad \ddot{y} = y''\omega^2 \qquad \dddot{y} = y'''\omega^3 \tag{6-17}$$

Por esta razón se ha hecho costumbre común referirse a las gráficas de las derivadas cinemáticas y',
curvas de "velocidad", "aceleración" y "tirón" para un movimiento dado. Estos nombres serían apropiados sólo para una leva de velocidad constante, y sólo en el caso de que su escala fuera determinada por ω, ω^2 y ω^3, respectivamente.† Sin embargo, resulta útil usar estos nombres para las derivadas cuando se están tomando en cuenta las implicaciones físicas de una cierta elección del diagrama de desplazamientos. Para el movimiento parabólico de la figura 6-12, por ejemplo, la "velocidad" del seguidor sube linealmente hasta un máximo y luego decrece hasta cero. La "aceleración" del seguidor es cero durante la detención inicial y luego cambia bruscamente hasta un valor positivo constante al principiar la subida. Se registran otros dos cambios bruscos más en la "aceleración" del seguidor, uno en el punto medio y otro al concluir la subida. En cada uno de los cambios súbitos de la "aceleración", el "tirón" del seguidor se hace infinito.

6-5 LEVAS DE GRAN VELOCIDAD

Siguiendo con este estudio del movimiento parabólico, consideremos brevemente las implicaciones de la curva de "aceleración" de la figura 6-12 sobre el comportamiento dinámico del sistema de leva. Por supuesto, cualquier seguidor real debe tener cierta masa y, cuando se multiplica por la aceleración, ejercerá una fuerza de inercia (véase el capítulo 13). Por lo tanto, la curva de "aceleración" de la figura 6-12 también se puede imaginar como indicadora de la fuerza de inercia del seguidor que, a su vez, se debe sentir en los cojinetes del seguidor y en el punto de

† Aceptar la palabra "velocidad" en una forma literal, por ejemplo, conduce a confusiones al descubrir que para una leva de placa con seguidor de movimiento alternativo, las unidades de y' son longitud por radián. No obstante, si estas unidades se multiplican por radianes por segundo, las unidades de ω, se obtendrán unidades de longitud por segundo.

contacto con la superficie de la leva. Una curva de "aceleración" con cambios abruptos, como por ejemplo el movimiento parabólico, ejercerá esfuerzos de contacto que cambian bruscamente en los cojinetes y sobre la superficie de la leva, y dará por resultado ruido, desgaste de las superficies y la falla final. Por consiguiente, al elegir un diagrama de desplazamientos es muy importante asegurarse que la primera y segunda derivadas, es decir, las curvas de "velocidad" y "aceleración", sean continuas, esto es, que no contengan cambios en escalón.

A veces, en aplicaciones de baja velocidad, se llega a un arreglo entre las relaciones de velocidad y aceleración. A veces es más sencillo emplear un procedimiento inverso y diseñar primero el perfil de la leva, obteniendo el diagrama de desplazamientos como segundo paso. Este tipo de levas se compone a menudo de alguna combinación de curvas como rectas y arcos circulares que son producidos con facilidad por las máquinas herramienta. Dos ejemplos son la *leva de arco circular* y la *leva tangente* de la figura 6-13. El procedimiento de diseño es por iteración. Se diseña una leva de prueba y se calculan sus características cinemáticas. Entonces se repite el proceso hasta que se obtiene una leva con las características deseadas. Los puntos A, B, C y D de las levas de arco circular y tangente son puntos de tangencia o de combinación. Conviene hacer notar, como se hizo antes en el ejemplo del movimiento parabólico, que la aceleración cambia bruscamente en cada uno de los puntos de combinación debido al cambio instantáneo en el radio de curvatura.

Aunque las levas con características de aceleración discontinuas se encuentran a veces en aplicaciones de baja velocidad, con toda certeza tales levas presentan mayores problemas conforme se aumenta la velocidad. Para cualquier aplicación de leva de alta velocidad es extremadamente importante que no sólo se hagan continuas las curvas de desplazamiento y "velocidad", sino también la de "acele-

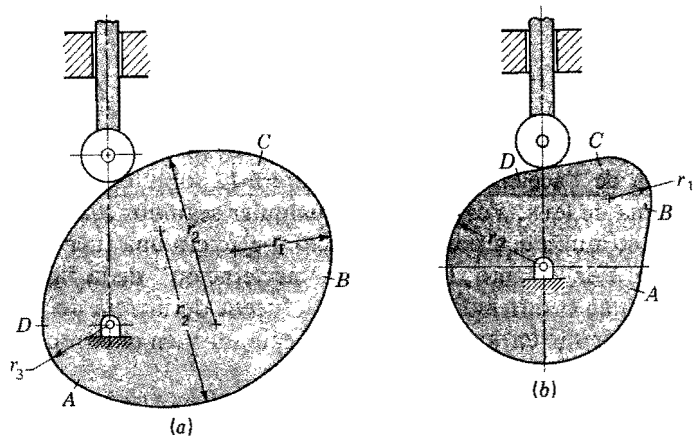


Figura 6-13 *a*) Leva de arco circular. *b*) Leva tangente.

ración'' para el ciclo completo del movimiento. No se deben permitir discontinuidades en las fronteras de las diferentes secciones de la leva.

Como lo muestra la ecuación (6-17), la importancia de las derivadas continuas se hace más seria conforme se eleva la velocidad del eje de la leva. Mientras más alta sea la velocidad, mayor será la necesidad de curvas suaves. A muy grandes velocidades también se podría requerir que el tirón, el cual está relacionado con la rapidez de cambio de la fuerza, y quizá incluso derivadas más altas, sea también continua. Sin embargo, en la mayor parte de las aplicaciones esto no es necesario.

No se puede dar una respuesta sencilla a qué tan alta puede tenerse una velocidad antes de que la aplicación requiera técnicas de diseño de alta velocidad. Esto depende no sólo de la masa del seguidor, sino también de la rigidez del resorte de recuperación, los materiales usados, la flexibilidad del seguidor y muchos otros factores.† En el capítulo 16 se presentan otras técnicas de análisis sobre la dinámica de las levas. Con todo, con los métodos que se incluyen a continuación, no resulta difícil lograr diagramas de desplazamientos con derivadas continuas. Por consiguiente, se recomienda que se realice esto como práctica estándar. Las levas de movimiento parabólico no son más fáciles de fabricar que, por ejemplo, las de movimiento cicloidal, y no hay razones de peso para utilizarlas. Las levas de arco circular y tangente son más sencillas de producir; pero con los métodos de maquinado modernos no resulta costoso el corte de levas de forma más compleja.

6-6 MOVIMIENTOS ESTÁNDAR DE LAS LEVAS

En el ejemplo 6-1 se dio una deducción detallada de las ecuaciones para el movimiento parabólico y sus derivadas. Luego, en la sección 6-5 se expusieron razones para evitar el uso del movimiento parabólico en los sistemas de levas de alta velocidad. El propósito de esta sección es presentar las ecuaciones para un cierto número de tipos estándar de curvas de desplazamientos que es factible emplear para resolver requisitos de movimientos de levas de gran velocidad. No obstante, no se incluyen las derivaciones paralelas a las que se dieron en el ejemplo 6-1.

En la figura 6-14 se ilustran el diagrama de desplazamientos y sus derivadas para una subida con movimiento armónico simple. Las ecuaciones son

$$y = \frac{L}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-18a}$$

$$y' = \frac{\pi L}{2\beta}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-18b}$$

$$y'' = \frac{\pi^2 L}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-18c}$$

† Se encontrará un buen análisis sobre este tema en D. Tesar y G.K. Matthew, *The Dynamic Synthesis, Analysis, and Design of Modeled Cam Systems*, Heath, Lexington, Mass., 1976.

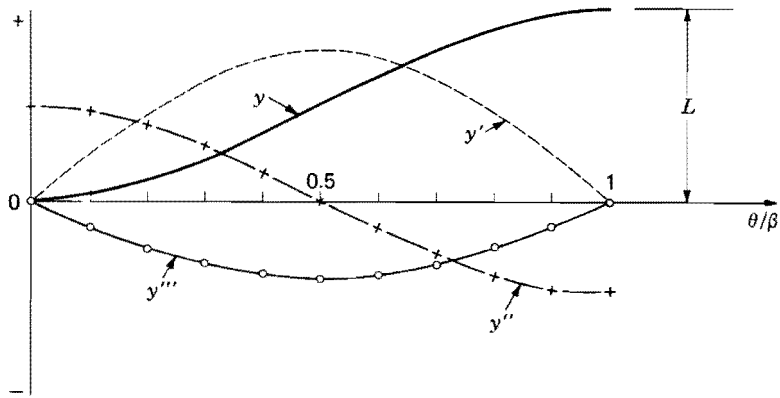


Figura 6-14 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento armónico simple de subida completa, ecuación (6-18).

$$y''' = -\frac{\pi^3 L}{2\beta^3}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-18d}$$

Contrariamente a lo que sucede con el movimiento parabólico, el armónico simple no presenta discontinuidad en el punto de inflexión.

Las ecuaciones para una subida con movimiento cicloidal y sus derivadas son

$$y = L\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-19a}$$

$$y' = \frac{L}{\beta}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-19b}$$

$$y'' = \frac{2\pi L}{\beta^2}\operatorname{sen}\frac{2\pi\theta}{\beta} \tag{6-19c}$$

$$y''' = \frac{4\pi^2 L}{\beta^3}\cos\frac{2\pi\theta}{\beta} \tag{6-19d}$$

En la figura 6-15 se muestran las gráficas.

En la figura 6-16 se ilustra el diagrama de desplazamientos y las derivadas para un movimiento de subida denominado *movimiento armónico modificado*. Las ecuaciones son

$$y = \frac{L}{2}\left[\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)\right] \tag{6-20a}$$

$$y' = \frac{\pi L}{2\beta}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-20b}$$

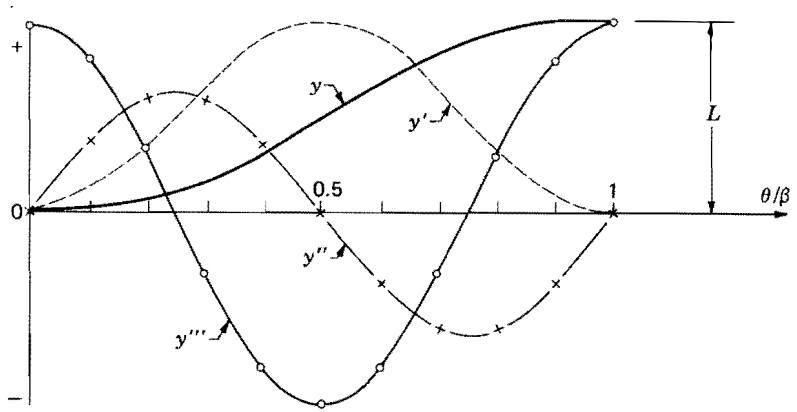


Figura 6-15 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento cicloidal de subida completa, ecuación (6-19).

$$y'' = \frac{\pi^2 L}{2\beta^2}\left(\cos\frac{\pi\theta}{\beta} - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-20c}$$

$$y''' = -\frac{\pi^3 L}{2\beta^3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} - 2\operatorname{sen}\frac{2\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-20d}$$

Los diagramas de desplazamientos de los movimientos armónico simple, cicloidal y armónico modificado se antojan muy similares a primera vista. Todos ellos llegan hasta cierta elevación L en un ángulo total de la leva β. Todos principian y terminan con una pendiente horizontal y, por esta razón, todos se conocen como movimientos de *subida completa.* No obstante, sus curvas de "aceleración" son

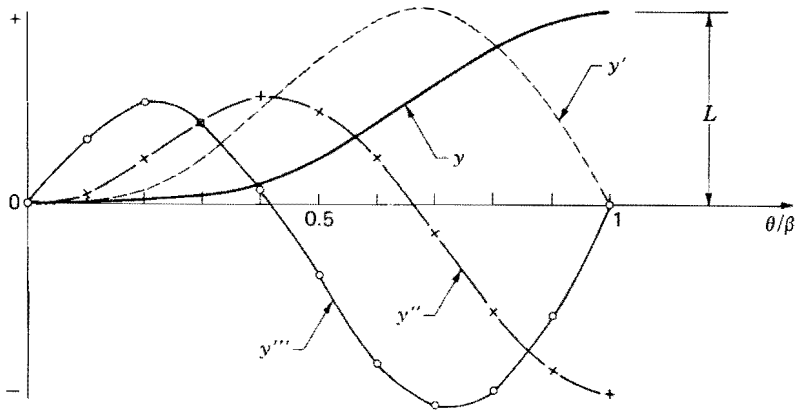


Figura 6-16 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento armónico modificado de subida completa, ecuación (6-20).

muy diferentes. El movimiento armónico simple tiene "aceleración" diferente de cero en ambos extremos del recorrido; el movimiento cicloidal tiene una "aceleración" cero en ambas fronteras; y el armónico modificado tiene una "aceleración" cero y otra diferente de cero en sus extremos. Esto suministra la selección necesaria cuando se igualan estas curvas con las vecinas de tipos diferentes.

En las figuras 6-17 a 6-19 se ilustran los movimientos de *retorno completo* de los tres mismos tipos. Las ecuaciones para el movimiento armónico simple son

$$y = \frac{L}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-21a}$$

$$y' = -\frac{\pi L}{2\beta}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-21b}$$

$$y'' = -\frac{\pi^2 L}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-21c}$$

$$y''' = \frac{\pi^3 L}{2\beta^3}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-21d}$$

Las ecuaciones para el movimiento cicloidal de retorno completo son

$$y = L\left(1 - \frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-22a}$$

$$y' = -\frac{L}{\beta}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-22b}$$

$$y'' = -\frac{2\pi L}{\beta^2}\operatorname{sen}\frac{2\pi\theta}{\beta} \tag{6-22c}$$

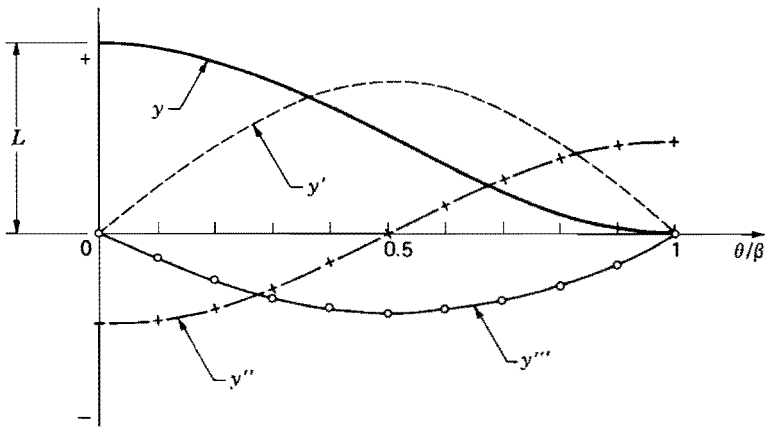


Figura 6-17 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento armónico simple de retorno completo, ecuación (6-21).

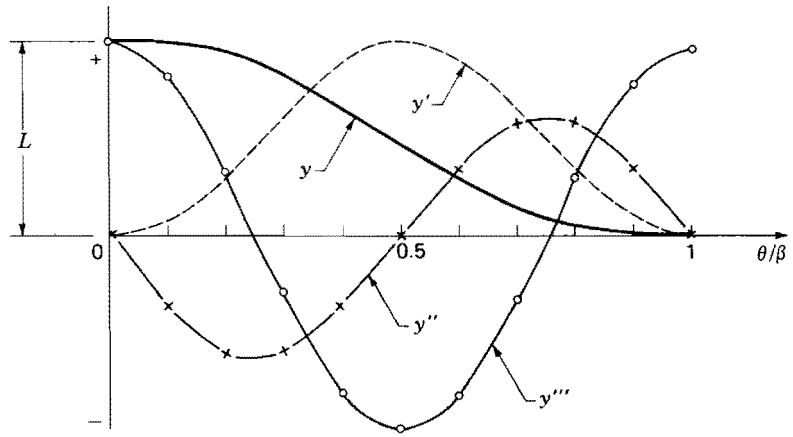


Figura 6-18 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento cicloidal de retorno completo, ecuación (6-22).

$$y''' = -\frac{4\pi^2 L}{\beta^3}\cos\frac{2\pi\theta}{\beta} \qquad (6\text{-}22d)$$

Las ecuaciones para el movimiento armónico modificado de retorno completo son las siguientes:

$$y = \frac{L}{2}\left[\left(1+\cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right) - \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)\right] \qquad (6\text{-}23a)$$

$$y' = -\frac{\pi L}{2\beta}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi\theta}{\beta}\right) \qquad (6\text{-}23b)$$

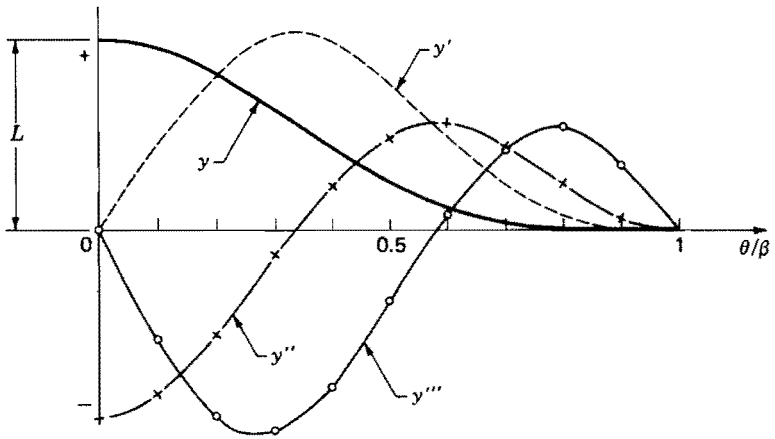


Figura 6-19 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento armónico modificado de retorno completo, ecuación (6-23).

$$y'' = -\frac{\pi^2 L}{2\beta^2}\left(\cos\frac{\pi\theta}{\beta} + \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-23c}$$

$$y''' = \frac{\pi^3 L}{2\beta^3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} + 2\operatorname{sen}\frac{2\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-23d}$$

Además de los movimientos de subida completa y retorno completo antes mencionados, con frecuencia resulta útil contar con una selección de movimientos estándar de *media subida* o *medio retorno*. Se trata de curvas para las que una de las fronteras posee una pendiente diferente de cero y se puede usar para combinarse con el movimiento uniforme. En la figura 6-20 se presentan los diagramas de desplazamientos y las derivadas para los movimientos armónicos simples de media subida, que a veces reciben el nombre de *semiarmónicos*. Las ecuaciones correspondientes a la figura 6-20 son

$$y = L\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{2\beta}\right) \tag{6-24a}$$

$$y' = \frac{\pi L}{2\beta}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-24b}$$

$$y'' = \frac{\pi^2 L}{4\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-24c}$$

$$y''' = -\frac{\pi^3 L}{8\beta^3}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-24d}$$

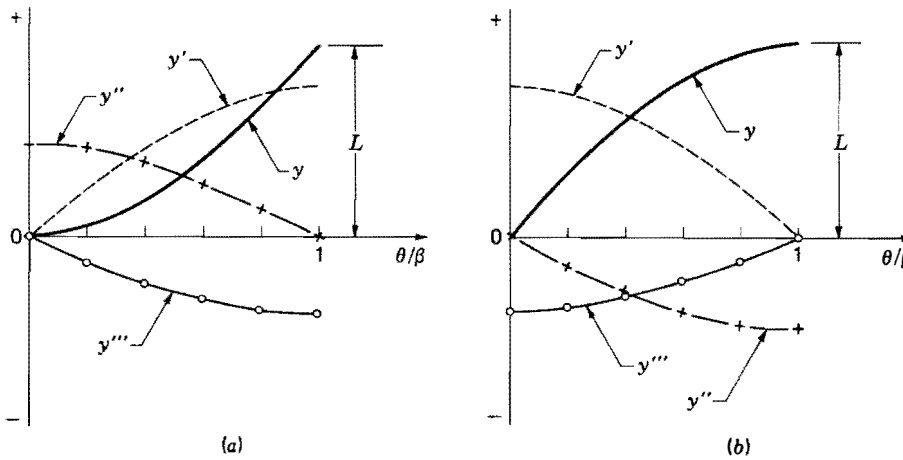


Figura 6-20 Diagrama de desplazamientos y derivadas para movimientos semiarmónicos de subida: *a*) ecuación (6-24), *b*) ecuación (6-25).

En el caso de la figura 6-20*b* las ecuaciones son

$$y = L \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-25a}$$

$$y' = \frac{\pi L}{2\beta} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-25b}$$

$$y'' = -\frac{\pi^2 L}{4\beta^2} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-25c}$$

$$y''' = -\frac{\pi^3 L}{8\beta^3} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-25d}$$

Las curvas semiarmónicas para movimientos de medio retorno aparecen ilustradas en la figura 6-21. Las ecuaciones correspondientes a la figura 6-21 son

$$y = L \cos \frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-26a}$$

$$y' = -\frac{\pi L}{2\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-26b}$$

$$y'' = -\frac{\pi^2 L}{4\beta^2} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-26c}$$

$$y''' = \frac{\pi^3 L}{8\beta^3} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-26d}$$

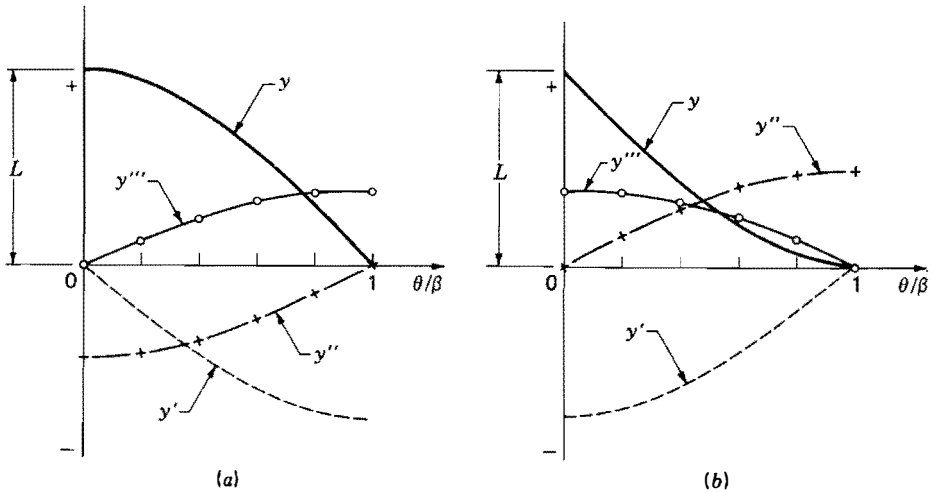


Figura 6-21 Diagrama de desplazamientos y derivadas para movimientos semiarmónicos de retorno: *a*)ecuación (6-26), *b*) ecuación (6-27).

En el caso de la figura 6-21*b*, las ecuaciones son

$$y = L\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{2\beta}\right) \tag{6-27a}$$

$$y' = -\frac{\pi L}{2\beta}\cos\frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-27b}$$

$$y'' = \frac{\pi^2 L}{4\beta^2}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-27c}$$

$$y''' = \frac{\pi^3 L}{8\beta^3}\cos\frac{\pi\theta}{2\beta} \tag{6-27d}$$

Además de los semiarmónicos, los movimientos *semicicloidales* también son útiles en virtud de que sus "aceleraciones" son cero en ambas fronteras. Los diagramas de desplazamientos y derivadas para los movimientos de media subida semicicloidales se ilustran en la figura 6-22. Las ecuaciones correspondientes a la figura 6-22*a* son

$$y = L\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-28a}$$

$$y' = \frac{L}{\beta}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-28b}$$

$$y'' = \frac{\pi L}{\beta^2}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-28c}$$

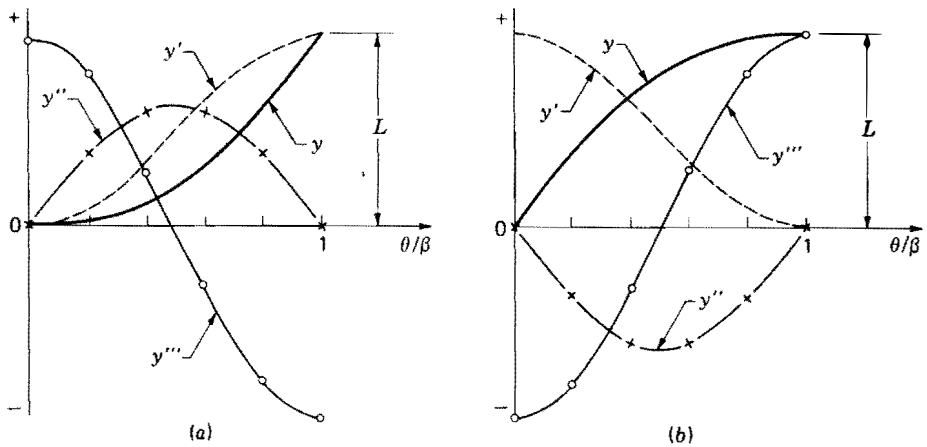


Figura 6-22 Diagramas de desplazamientos y derivadas para movimientos semicicloidales de subida: *a*) ecuación (6-28), *b*) ecuación (6-29).

$$y''' = \frac{\pi^2 L}{\beta^3} \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-28d}$$

Las ecuaciones para la figura 6-22*b* son

$$y = L\left(\frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-29a}$$

$$y' = \frac{L}{\beta}\left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-29b}$$

$$y'' = -\frac{\pi L}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-29c}$$

$$y''' = -\frac{\pi^2 L}{\beta^2} \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-29d}$$

Las curvas semicicloidales para los movimientos de medio retorno se muestran en la figura 6-23. Las ecuaciones correspondientes a la figura 6-23*a* son

$$y = L\left(1 - \frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-30a}$$

$$y' = -\frac{L}{\beta}\left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-30b}$$

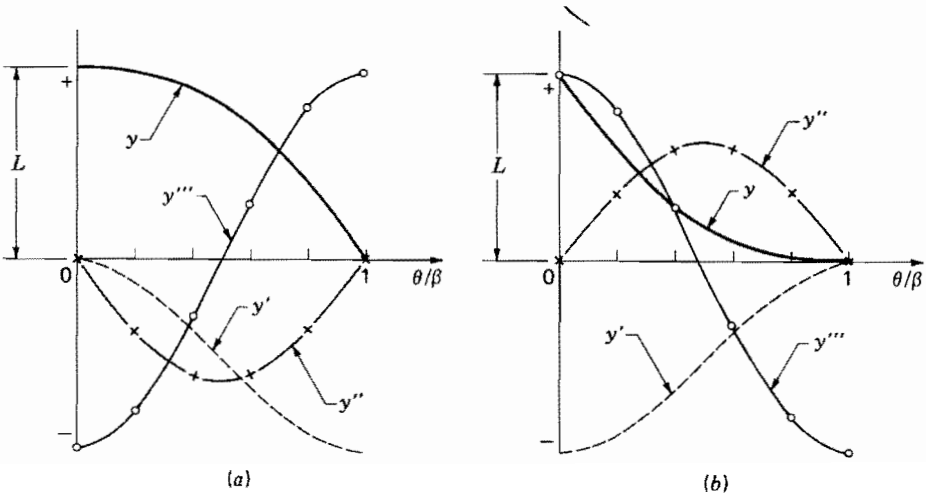


Figura 6-23 Diagramas de desplazamientos y derivadas para movimientos semicicloidales de retorno: *a*) ecuación (6-30), *b*) ecuación (6-31).

$$y'' = -\frac{\pi L}{\beta^2}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-30c}$$

$$y''' = -\frac{\pi^2 L}{\beta^3}\cos\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-30d}$$

Las ecuaciones para la figura 6-23*b* son

$$y = L\left(1 - \frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-31a}$$

$$y' = -\frac{L}{\beta}\left(1 + \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \tag{6-31b}$$

$$y'' = \frac{\pi L}{\beta^2}\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-31c}$$

$$y''' = \frac{\pi^2 L}{\beta^3}\cos\frac{\pi\theta}{\beta} \tag{6-31d}$$

En breve se mostrará cómo las gráficas y las ecuaciones presentadas en esta sección pueden reducir enormemente el esfuerzo analítico comprendido en el diseño del diagrama completo de desplazamientos para una leva de alta velocidad. Pero primero conviene destacar unas cuentas características de las gráficas de las figuras 6-14 a 6-23.

Cada gráfica incluye sólo una sección de un diagrama de desplazamientos completo; la elevación total *para esa sección* se identifica como L en todos los casos y el recorrido total de leva se denota con β.
normalizada de tal manera que la razón θ/β varía desde 0 en el extremo izquierdo hasta la unidad en el extremo derecho ($\theta = \beta$).

No se muestran las escalas que se usaron para trazar las gráficas, pero son coherentes para todas las curvas de subida y retorno completos, y para todas las curvas de media subida y medio retorno. Por consiguiente, al examinar lo apropiado que pueda ser una curva en comparación con otra, se pueden comparar, por ejemplo, las magnitudes de las "aceleraciones". Por esta razón, cuando otros factores son equivalentes, se debe usar el movimiento armónico simple siempre que sea posible, con el fin de minimizar las "aceleraciones".

Por último, se debe hacer notar que los movimientos estándar para levas presentados en esta sección no forman un conjunto exhaustivo; que también es factible formar levas con buenas características dinámicas partiendo de una amplia variedad de otras curvas de movimiento posibles.† Sin embargo, el conjunto aquí presentado es lo suficientemente completo para la mayor parte de las aplicaciones.

† H.A. Rothbart, *Cams*, Wiley, Nueva York, 1956, se trata de una obra realmente clásica sobre levas que contiene una comparación de 11 movimientos diferentes en la p. 184.

6-7 IGUALACIÓN DE LAS DERIVADAS DE LOS DIAGRAMAS DE DESPLAZAMIENTOS

En la sección anterior se presentaron una gran cantidad de ecuaciones que podrían usarse para representar los diferentes segmentos del diagrama de desplazamientos de una leva. En esta sección se estudiará cómo se pueden unir con el fin de formar la especificación de movimiento para una leva completa. El procedimiento consiste en determinar los valores apropiados de L y β para cada segmento, de tal manera que se cumplan las siguientes:

1. Se satisfagan las necesidades de movimiento de la aplicación en particular.
2. Los diagramas de desplazamiento, "velocidad" y "aceleración" sean continuos a través de las fronteras de los segmentos. El diagrama del "tirón" puede admitir discontinuidades si es necesario, pero no debe hacerse infinito; es decir, la curva de "aceleración" puede contener vértices pero no discontinuidades.
3. Las magnitudes máximas de los picos de "velocidad" y "aceleración" se mantengan tan bajos como sea posible, coherente con las dos condiciones previas.

El procedimiento se comprende mejor si se aplica a un ejemplo.

Ejemplo 6-2 Una leva de placa con seguidor de movimiento alternativo se impulsará con un motor de velocidad constante a 150 rpm. El seguidor debe partir de una detención, acelerar hasta una velocidad uniforme de 25 pulg/s, mantener esta velocidad a lo largo de 1.25 pulg de subida, desacelerar hasta la parte superior de la elevación, retornar y luego quedar en detención por 0.1 s. La elevación total será de 3.0 pulg. Determínense las especificaciones completas del diagrama de desplazamiento.

SOLUCIÓN La velocidad del eje de entrada es

$$\omega = 150 \text{ rpm} = 15.708 \text{ rad/s} \tag{1}$$

Aplicando la (6-14) se puede hallar la pendiente del segmento de velocidad uniforme,

$$y' = \frac{\dot{y}}{\omega} = \frac{25 \text{ pulg/s}}{15.708 \text{ rad/s}} = 1.592 \text{ pulg/rad} \tag{2}$$

y, puesto que ésta se mantiene constante en el curso de 1.25 pulg de subida, la rotación de leva en este segmento es

$$\beta_2 = \frac{L_2}{y'} = \frac{1.25 \text{ pulg}}{1.592 \text{ pulg/rad}} = 0.785 \text{ rad} = 45.000° \tag{3}$$

Del mismo modo, basándose en la (1), se puede hallar la rotación de leva durante la detención final,

$$\beta_5 = \frac{0.1 \text{ s}}{15.708 \text{ rad/s}} = 1.047 \text{ rad} = 60.000° \tag{4}$$

Partiendo de esto y la información dada, se puede hacer un esquema de los puntos de arranque del diagrama de desplazamiento, no necesariamente a escala, sino sólo para concebir las

necesidades de movimiento. Esto da los perfiles generales ilustrados por los trazos gruesos de la figura 6-24*a*. Las secciones con línea más delgada del diagrama de desplazamientos no se conocen aún con exactitud; pero también se pueden dibujar produciendo una curva suave para formarse una imagen clara. Partiendo de esta curva, también se puede hacer un esquema de la naturaleza general de las curvas de las derivadas. Con base en la pendiente del diagrama de desplazamientos, se dibuja la curva de "velocidad", figura 6-24*b*, y a partir de *su* pendiente se encuentra la curva de "aceleración", figura 6-24*c*. Por ahora no se realiza intento alguno por lograr curvas exactas trazadas a escala, sino sólo tener cierta idea de la forma de las mismas.

Ahora, usando los esquemas de la figura 6-24, se comparan las curvas del movimiento deseado con las diversas curvas estándar de las figuras 6-14 a 6-23, con el fin de seleccionar un conjunto apropiado de ecuaciones para cada segmento de la leva. Por ejemplo, en el segmento *AB*, se encuentra que la figura 6-22*a* es la única curva de movimiento disponible con las características de media subida, una curva de pendiente apropiada y la "aceleración" cero necesaria en ambos extremos del segmento. Por lo tanto, se escoge el movimiento semicicloidal de la ecuación (6-28) para esa porción de la leva. Existen dos conjuntos de elecciones posibles para los segmentos *CD* y *DE*. Uno podría ser la opción de la figura 6-22*b*, igualándola con la figura 6-18; sin embargo, para mantener la curva del "tirón" tan suave como sea posible, se escogerá la figura 6-20*b* igualada con la figura 6-19. Así pues, en el caso del segmento *CD* se emplean las curvas de subida semiarmónica de la ecuación (6-25), y para el segmento *DE* se eligen las curvas de retorno armónico modificado de la (6-23).

No obstante, la selección de los tipos de curvas de movimiento no es suficiente para especificar plenamente las características de éste. También se deben hallar valores para los parámetros desconocidos de las ecuaciones del movimiento; estos son, L_1, L_3, β_1, β_3, y β_4. Esto se hace igualando los valores en cada frontera diferente a cero de las curvas de las derivadas. Por ejemplo, para igualar las "velocidades" en *B*, es preciso igualar el valor de y' de la (6-28*b*) en $\theta/\beta = 1$ (su extremo derecho) con el valor de y' en el segmento *BC*,

$$y'_B = \frac{2L_1}{\beta_1} = \frac{L_2}{\beta_2} = \frac{1.25 \text{ pulg}}{0.785 \text{ rad}} = 1.592 \text{ pulg/rad}$$

o bien,
$$L_1 = 0.796\beta_1 \tag{5}$$

Análogamente, para igualar las "velocidades" en el punto *C*, se iguala el valor de y' del segmento *BC* con el de la ecuación (6-25*b*) en $\theta/\beta = 0$ (su extremo izquierdo)

$$y'_C = \frac{L_2}{\beta_2} = \frac{\pi L_3}{2\beta_3} = 1.592 \text{ pulg/rad}$$

o bien,
$$L_3 = 1.013\beta_3 \tag{6}$$

Para igualar las "aceleraciones" (curvaturas) en el punto *D*, se iguala el valor de y'' de la ecuación (6-25*c*) en $\theta/\beta = 1$ (su extremo derecho) con y'' de la (6-23*c*) en $\theta/\beta = 0$ (su extremo izquierdo). Esto da

$$y''_D = -\frac{\pi^2 L_3}{4\beta_3^2} = -\frac{\pi^2 L_4}{\beta_4^2}$$

y después de aplicar la (6) se obtiene

$$\beta_3 = 0.0844\beta_4^2 \tag{7}$$

Por último para la compatibilidad geométrica, se tiene

$$L_1 + L_3 = L_4 - L_2 = 1.75 \text{ pulg} \tag{8}$$

y
$$\beta_1 + \beta_3 + \beta_4 = 2\pi - \beta_2 - \beta_5 = 4.451 \text{ rad} \tag{9}$$

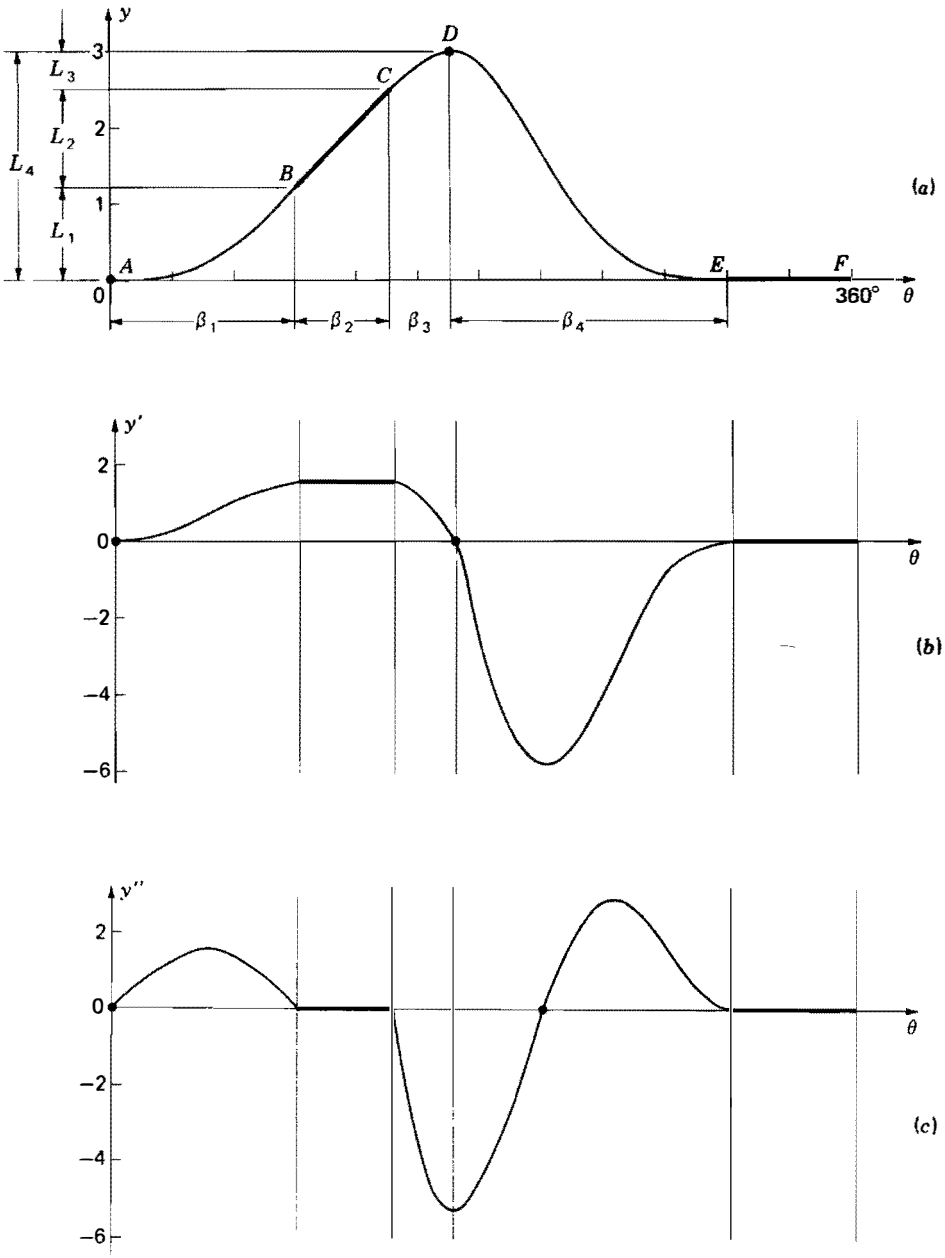


Figura 6-24 Ejemplo 6-2: *a*) diagrama de desplazamientos, pulgadas; *b*) diagrama de "velocidades", pulgadas por radián y *c*) diagrama de "aceleraciones", pulgadas por radián al cuadrado.

Resolviendo simultáneamente las cinco ecuaciones (5 a 9) para las incógnitas L_1, L_3, β_1, β_3, β_4, se determinan los valores apropiados de los parámetros restantes. Por ende, en resumen se tiene que

$$\begin{aligned} L_1 &= 1.264 \text{ pulg} & \beta_1 &= 1.589 \text{ rad} = 91.04° \\ L_2 &= 1.250 \text{ pulg} & \beta_2 &= 0.785 \text{ rad} = 45.00° \\ L_3 &= 0.486 \text{ pulg} & \beta_3 &= 0.479 \text{ rad} = 27.46° \\ L_4 &= 3.000 \text{ pulg} & \beta_4 &= 2.382 \text{ rad} = 136.50° \\ L_5 &= 0 & \beta_5 &= 1.047 \text{ rad} = 60.00° \end{aligned} \tag{10}$$

Ahora sí se puede hacer un trazado exacto del diagrama de desplazamientos y, si así se desea, también de sus derivadas para substituir los dibujos originales. Las curvas de la figura 6-24 se han trazado a escala utilizando estos valores.

6-8 DISEÑO POLINOMIAL DE LEVAS

Aunque la diversidad de curvas básicas estudiadas en secciones anteriores por lo común son adecuadas, evidentemente no representan una lista exhaustiva de los movimientos que podrían usarse en el diseño de levas. Otro método común para diseñarlas consiste en sintetizar las curvas de movimiento adecuadas usando ecuaciones polinomiales. Se principia con la ecuación básica

$$y = C_0 + C_1\frac{\theta}{\beta} + C_2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + C_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + \cdots \tag{6-32}$$

en donde y y θ son, como antes, el movimiento de subida y de entrada de la leva. El valor de β representa el recorrido total de θ tal que para la sección de leva que se está desarrollando, la razón θ/β varía de 0 a 1. Las constantes C_i dependen de las condiciones impuestas en la frontera. Por lo común se logra desarrollar un movimiento apropiado mediante la selección correcta de las condiciones en la frontera y el orden del polinomio.

Como ejemplo del método polinomial, sinteticemos una curva de subida completa con las condiciones en la frontera

$$\theta = 0 \qquad y = 0 \qquad y' = 0 \qquad y'' = 0$$

$$\theta = \beta \qquad y = L \qquad y' = 0 \qquad y'' = 0$$

Puesto que hay seis condiciones, la (6-32) se escribe con seis constantes desconocidas

$$y = C_0 + C_1\frac{\theta}{\beta} + C_2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + C_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + C_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 + C_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 \tag{a}$$

La primera y segunda derivadas con respecto a θ son

$$y' = \frac{1}{\beta}\left[C_1 + 2C_2\frac{\theta}{\beta} + 3C_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 4C_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 5C_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4\right] \tag{b}$$

$$y'' = \frac{1}{\beta^2}\left[2C_2 + 6C_3\frac{\theta}{\beta} + 12C_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 20C_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3\right] \qquad (c)$$

Cuando se sustituyen las condiciones en la frontera, se obtienen las seis ecuaciones que siguen

$$0 = C_0 \qquad (d)$$

$$L = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 \qquad (e)$$

$$0 = C_1 \qquad (f)$$

$$0 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 \qquad (g)$$

$$0 = 2C_2 \qquad (h)$$

$$0 = 2C_2 + 6C_3 + 12C_4 + 20C_5 \qquad (i)$$

Cuando estas ecuaciones se resuelven simultáneamente, se obtiene

$$C_0 = 0 \qquad C_1 = 0 \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = 10L \qquad C_4 = -15L \qquad C_5 = 6L$$

La ecuación de desplazamiento se obtiene sustituyendo estas constantes en la ecuación (*a*),

$$y = L\left[10\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 - 15\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 + 6\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5\right] \qquad (6\text{-}33a)$$

Esto recibe el nombre de movimiento *polinomial* 3-4-5 de subida completa, debido a las potencias de los términos restantes. Sus derivadas son

$$y' = \frac{L}{\beta}\left[30\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 - 60\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 30\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4\right] \qquad (6\text{-}33b)$$

$$y'' = \frac{L}{\beta^2}\left[60\frac{\theta}{\beta} - 180\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 120\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3\right] \qquad (6\text{-}33c)$$

$$y''' = \frac{L}{\beta^3}\left[60 - 360\frac{\theta}{\beta} + 360\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2\right] \qquad (6\text{-}33d)$$

En la figura 6-25, se tiene la gráfica del diagrama de desplazamientos y sus derivadas. Las propiedades son similares a las del movimiento cicloidal, empero claramente diferentes.

Las ecuaciones para el movimiento polinomial 3-4-5 de retorno completo se obtienen aplicando un procedimiento paralelo, y son

$$y = L\left[1 - 10\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 15\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 - 6\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5\right] \qquad (6\text{-}34a)$$

$$y' = -\frac{L}{\beta}\left[30\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 - 60\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 30\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4\right] \qquad (6\text{-}34b)$$

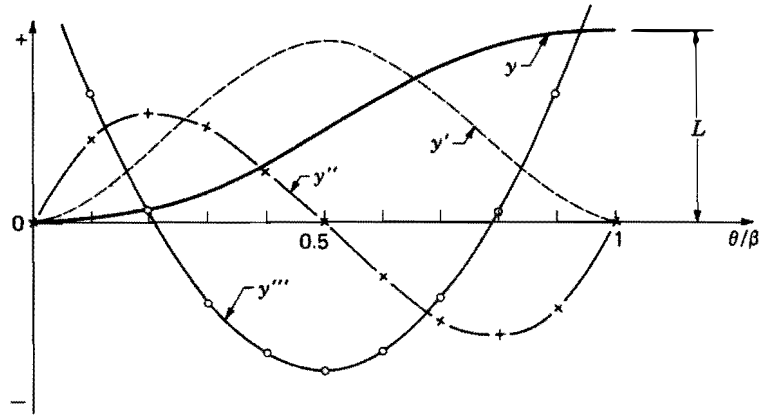


Figura 6-25 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento polinomial 3-4-5 de subida completa, ecuación (6-33).

$$y'' = -\frac{L}{\beta^2}\left[60\frac{\theta}{\beta} - 180\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 120\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3\right] \qquad \textbf{(6-34}c\textbf{)}$$

$$y''' = -\frac{L}{\beta^3}\left[60 - 360\frac{\theta}{\beta} + 360\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2\right] \qquad \textbf{(6-34}d\textbf{)}$$

En la figura 6-26 se muestra el diagrama de desplazamientos correspondientes y sus derivadas.

Otro movimiento muy útil es el que se obtiene a partir de un *polinomio de octavo orden*. Se obtuvo con el propósito de tener características de "aceleración"

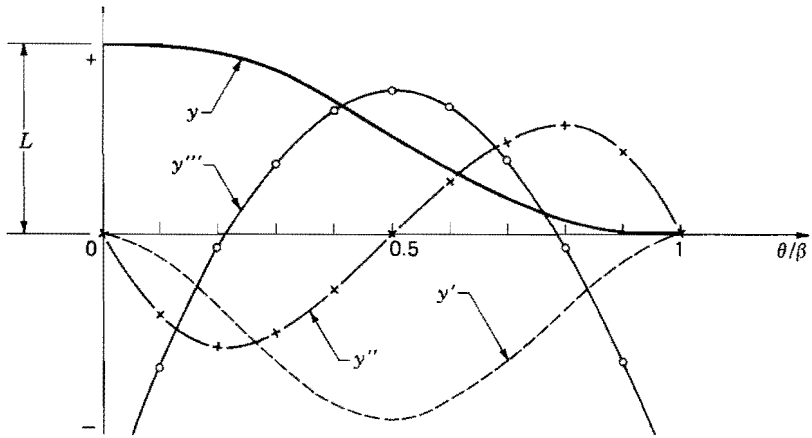


Figura 6-26 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento polinomial 3-4-5 de retorno completo, ecuación (6-34).

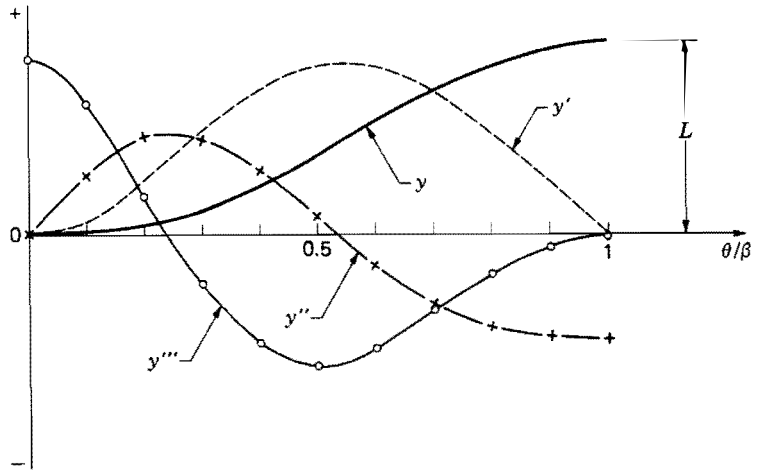


Figura 6-27 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento polinomial de octavo orden, de subida completa, ecuación (6-35).

no asimétricas, semejantes a las del movimiento armónico modificado, pero con valores pico de la "aceleración" más bajos. En las figuras 6-27 y 6-28 se ven los diagramas de desplazamientos y las derivadas. En el caso del movimiento de subida completa de la figura 6-27 las ecuaciones son

$$y = L\left[6.097\,55\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 - 20.780\,40\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 + 26.731\,55\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^6 - 13.609\,65\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^7 + 2.560\,95\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^8\right] \qquad (6\text{-}35a)$$

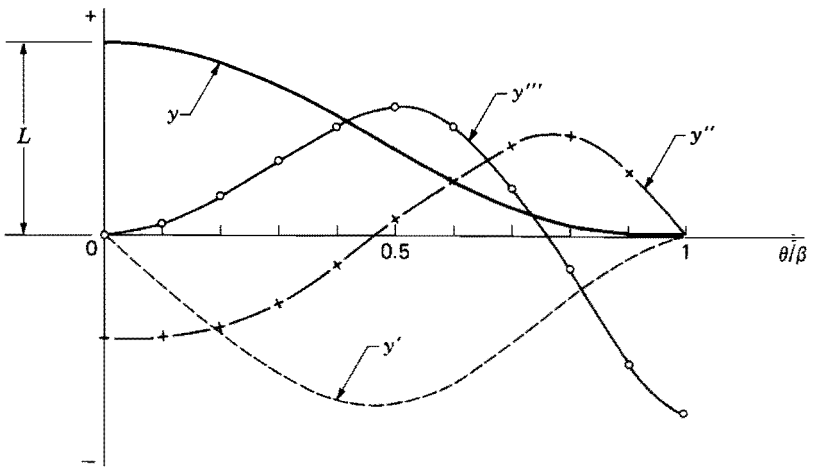


Figura 6-28 Diagrama de desplazamientos y derivadas para el movimiento polinomial de octavo orden, de retorno completo, ecuación (6-36).

$$y' = \frac{L}{\beta}\left[18.292\,65\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{2} - 103.902\,00\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{4} + 160.389\,30\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{5} - 95.267\,55\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{6} + 20.487\,60\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{7}\right] \tag{6-35b}$$

$$y'' = \frac{L}{\beta^{2}}\left[36.585\,30\left(\frac{\theta}{\beta}\right) - 415.608\,00\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{3} + 801.946\,50\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{4} - 571.605\,30\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{5} + 143.413\,20\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{6}\right] \tag{6-35c}$$

$$y''' = \frac{L}{\beta^{3}}\left[36.585\,30 - 1246.824\,00\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{2} + 3207.786\,00\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{3} - 2858.026\,50\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{4} + 860.479\,20\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{5}\right] \tag{6-35d}$$

Para los movimientos polinomiales de octavo orden de retorno completo de la figura 6-28, las ecuaciones son

$$y = L\left[1.000\,00 - 2.634\,15\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{2} + 2.780\,55\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{5} + 3.170\,60\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{6} - 6.877\,95\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{7} + 2.560\,95\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{8}\right] \tag{6-36a}$$

$$y' = -\frac{L}{\beta}\left[5.268\,30\frac{\theta}{\beta} - 13.902\,75\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{4} - 19.023\,60\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{5} + 48.145\,65\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{6} - 20.487\,60\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{7}\right] \tag{6-36b}$$

$$y'' = -\frac{L}{\beta^{2}}\left[5.268\,30 - 55.611\,00\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{3} - 95.118\,00\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{4} + 288.873\,90\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{5} - 143.413\,20\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{6}\right] \tag{6-36c}$$

$$y = \frac{L}{\beta^{3}}\left[166.833\,00\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{2} + 380.472\,00\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{3} - 1444.369\,50\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{4} + 860.479\,20\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{5}\right] \tag{6-36d}$$

También son de uso común ecuaciones polinomiales de desplazamiento de un orden mucho más elevado y que satisfacen muchas más condiciones que las aquí presentadas. Stoddart† desarrolló procedimientos automatizados para determinar

† D.A. Stoddart, "Polydyne Cam Design", *Mach. Des.*, vol. 25, no. 1, pp. 121-135; vol. 25, no. 2, pp. 146-154; vol. 25, no. 3, pp. 149-164, 1953.

los coeficientes y, al mismo tiempo, demostró cómo se pueden elegir los coeficientes para compensar la deformación elástica del sistema del seguidor, bajo condiciones dinámicas. Este tipo de leva recibe el nombre de *leva polidina*.

6-9 LEVA DE PLACA CON SEGUIDOR OSCILANTE DE CARA PLANA

Una vez que se ha determinado por completo el diagrama de desplazamientos de un sistema de leva, como se describió en la sección 6-7, se puede realizar el trazado de la forma real de la leva, como se señala en la sección 6-3. Sin embargo, se recordará que al trazar la leva es necesario conocer unos cuantos parámetros más, dependiendo del tipo de leva y seguidor, verbigracia, el radio del círculo primario, cualquier distancia de excentricidad, el radio del rodillo, y así sucesivamente. Asimismo, como se verá, cada tipo diferente de leva se puede sujetar a ciertos problemas más, a menos que se elijan correctamente estos parámetros restantes.

En esta sección se estudian los problemas que es factible encontrar en el diseño de una leva de placa con seguidor de movimiento alternativo y cara plana. Los parámetros geométricos de este tipo de sistema que todavía pueden seleccionarse son el radio del círculo primario R_0, la excentricidad ϵ del vástago del seguidor y la anchura mínima de la cara del seguidor.

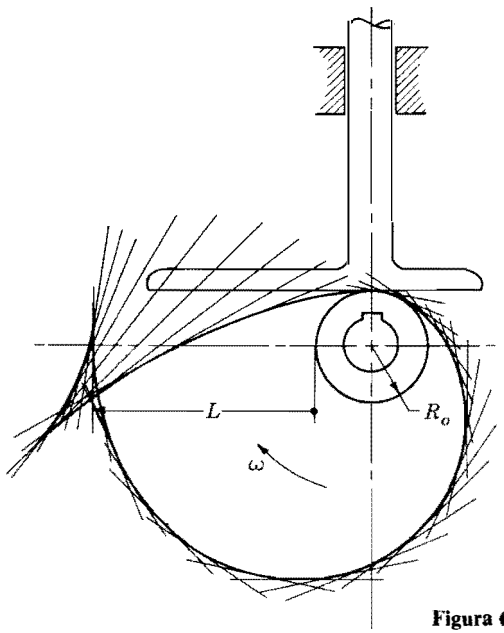


Figura 6-29 Trazado de socavación de una leva de placa.

En la figura 6-29 se muestra el trazado de una leva de placa con un seguidor radial de movimiento alternativo y cara plana. En este caso, el desplazamiento elegido fue una subida cicloidal de L = 100 mm en $\beta_1 = 90°$ de rotación de la leva, seguido por un retorno cicloidal en el restante $\beta_2 = 270°$ de rotación de la leva. Se siguió el procedimiento de trazado de la figura 6-10 para desarrollar la forma de la leva, y se usó un radio del círculo primario de $R_0 = 25$ mm. Evidentemente, existe un problema en vista de que el perfil de la leva se cruza a sí mismo. Al maquinar, parte de la forma de la leva se perdería y de allí en adelante no se lograría el movimiento cicloidal que se pretende. Se dice que una leva de esta naturaleza está *socavada*.

¿Por qué ocurrió la socavación en este ejemplo y cómo se puede evitar? Se debió a que se trató de alcanzar una elevación demasiado grande dentro de una rotación de leva en extremo reducida, con una leva muy pequeña. Una posibilidad es reducir la elevación deseada L o aumentar la rotación de la leva β_1, con el fin de evitar el problema. Sin embargo, es probable que no se pueda hacer esto y lograr al mismo tiempo los objetivos del diseño. Otra solución es utilizar las mismas características de desplazamiento pero incrementando el radio del círculo primario R_0. Esto producirá una leva de mayor tamaño, pero con el suficiente aumento se vencerá el problema de socavado.

No obstante, si es posible predecir el radio mínimo del círculo primario R_0 para evitar el socavado, se ahorrará el esfuerzo de un procedimiento de trazado por tanteos. Esto se logra desarrollando una ecuación para el radio de curvatura del perfil de la leva; procedimiento que se inicia escribiendo la ecuación de cierre

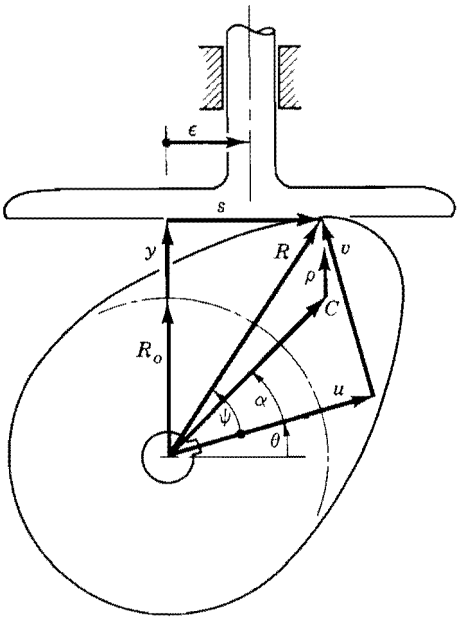


Figura 6-30

del circuito usando los vectores que se muestran en la figura 6-30. Si se utiliza la notación compleja polar, ésta es

$$re^{j(\theta+\alpha)} + j\rho = j(R_0 + y) + s \qquad (a)$$

Aquí se han elegido cuidadosamente los vectores de tal modo, que el punto C es el centro instantáneo de curvatura y ρ el radio de curvatura correspondiente al punto de contacto actual. La recta a lo largo del vector **u**, que separa a los ángulos θ y α está fija sobre la leva y es horizontal para la posición de la leva $\theta = 0$.

Al separar las partes real e imaginaria de la (a), se tiene

$$r\cos(\theta + \alpha) = s \qquad (b)$$

$$r\,\text{sen}(\theta + \alpha) + \rho = R_0 + y \qquad (c)$$

Puesto que el centro de curvatura C es estacionario sobre la superficie de la leva, las magnitudes de r, α y ρ no cambian para variaciones pequeñas en la rotación de leva;† dicho de otra manera, $dr/d\theta = d\alpha/d\theta = d\rho/d\theta = 0$. De donde al derivar la ecuación (a) con respecto a θ, se obtiene

$$jre^{j(\theta+\alpha)} = jy' + \frac{ds}{d\theta} \qquad (d)$$

y esto también se puede separar en sus partes real e imaginaria,

$$-r\,\text{sen}(\theta + \alpha) = \frac{ds}{d\theta} \qquad (e)$$

$$r\cos(\theta + \alpha) = y' \qquad (f)$$

Entre las ecuaciones (b) y (f) se puede eliminar $\theta + \alpha$ y se encuentra

$$s = y' \qquad (6\text{-}37)$$

Asimismo, después de derivar esto con respecto a θ

$$\frac{ds}{d\theta} = y'' \qquad (g)$$

se puede eliminar $\theta + \alpha$ entre las ecuaciones (c) y (e), y luego sustituir la ecuación (g) con el fin de obtener una solución para ρ

$$\rho = R_0 + y + y'' \qquad (6\text{-}38)$$

Conviene destacar con gran cuidado la utilidad de la ecuación (6-38); afirma que se puede hallar el radio de curvatura de la leva para cada valor de rotación θ de la leva, partiendo directamente de las ecuaciones del desplazamiento *sin trazar el perfil de la leva*. Lo único que se necesita es el valor para R_0 y los valores del desplazamiento, así como su segunda derivada.

† Los valores de r, α, y ρ no son constantes; pero en el momento presente se encuentran en valores estacionarios; sus derivadas de orden superior son diferentes de cero.

Se puede usar esta ecuación para ayudar a elegir un valor de R_0 que evitará la socavación. Cuando ésta ocurre, el radio de curvatura cambia de signo de positivo a negativo. Si se está al borde de una socavación, la leva tenderá a un punto y ρ será cero para algún valor de θ. Se puede decir que se debe elegir R_0 lo suficientemente grande como para que nunca sea éste el caso. De hecho, para evitar grandes esfuerzos de contacto, es posible que se desee tener la seguridad de que ρ sea en todos los puntos mayor que algún valor especificado $\rho_{\text{mín}}$. Luego, partiendo de la (6-38), se debe exigir que

$$\rho = R_0 + y + y'' > \rho_{\text{mín}}$$

Puesto que R_0 y y son siempre positivos, la situación crítica ocurre en donde y'' tiene su valor negativo más grande. Denotando este mínimo de y'' y $y''_{\text{mín}}$, y recordando que y corresponde al mismo ángulo de la leva θ, se tiene la condición

$$R_0 > \rho_{\text{mín}} - y''_{\text{mín}} - y \tag{6-39}$$

que se debe satisfacer. Esto se corrobora con suma facilidad una vez que se han establecido las ecuaciones del desplazamiento y se puede elegir un valor apropiado de R_0, antes de que se intente el trazado de la leva.

Volviendo ahora a la (6-37), se observa en la figura 6-30 que esto también puede ser de uso práctico. Afirma que la distancia de recorrido del punto de contacto hacia cualquiera de los lados del centro de rotación de la leva corresponde precisamente con la gráfica de y'. Por lo tanto, la anchura mínima de la cara para el seguidor de cara plana se debe extender por lo menos $y'_{\text{máx}}$ hacia la derecha y $-y'_{\text{mín}}$ hacia la izquierda del centro de leva, a fin de mantener el contacto. En otras palabras,

$$\text{Anchura de cara} > y'_{\text{máx}} - y'_{\text{mín}} \tag{6-40}$$

Ejemplo 6-3 Suponiendo que las características de desplazamiento que se encontraron en el ejemplo 6-2 se van a lograr mediante una leva de placa con un seguidor de movimiento alternativo y cara plana, determínese la anchura mínima de la cara y el radio mínimo del círculo primario para asegurar que el radio de curvatura de la leva sea mayor que 0.25 pulg en todo punto.

SOLUCIÓN Con base en la figura 6-24*b*, se ve que la "velocidad" máxima ocurre en la sección *BC* y es

$$y'_{\text{máx}} = \frac{L_2}{\beta_2} = 1.59 \text{ pulg/rad}$$

La "velocidad" mínima se produce en la sección *DE* en $\theta/\beta_4 = \frac{1}{3}$. Según la (6-23*b*), su valor es

$$y'_{\text{mín}} = -\frac{\pi(1.250)}{2(0.785)}\left(\text{sen}\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = -3.25 \text{ pulg/rad}$$

De donde, por la ecuación (6-40), la anchura mínima de la cara es

$$\text{Anchura de cara} > 1.59 + 3.25 = 4.84 \text{ pulg} \quad \textit{Resp.}$$

Esto se lograría con 1.59 pulg hacia la derecha y 3.25 pulg hacia la izquierda del eje de rotación de la leva, y se agregaría alguna holgura apropiada a cada lado.

La "aceleración" negativa máxima ocurre en el punto D. Se puede hallar su valor con la ecuación (6-25c) en $\theta/\beta = 1$

$$y''_{\text{mín}} = -\frac{\pi^2(0.486)}{4(0.479)^2} = -5.23 \text{ pulg/rad}^2$$

Si se usan estos datos en la (6-39), se encuentra el radio mínimo del círculo primario,

$$R_0 > 0.25 + 5.23 - 3.0 = 2.48 \text{ pulg} \quad \textit{Resp.}$$

Para este cálculo entonces se elegiría el radio real del círculo primario como, por ejemplo, $R_0 = 2.50$ pulg.

Se ve que la excentricidad del vástago del seguidor de cara plana no afecta la geometría de la leva. Esta excentricidad se escoge casi siempre de tal modo que se alivien los grandes esfuerzos de flexión en el seguidor.

Si se examina una vez más la figura 6-30, se puede escribir otra ecuación de cierre del circuito,

$$ue^{j\theta} + ve^{j(\theta+\pi/2)} = j(R_0 + y) + s$$

en donde u y v denotan las coordenadas del punto de contacto, en un sistema de coordenadas agregado a la leva. Al dividir esta ecuación entre $e^{j\theta}$, se obtiene

$$u + jv = j(R_0 + y)e^{-j\theta} + se^{-j\theta}$$

que tiene como partes real e imaginaria a

$$u = (R_0 + y)\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \qquad (6\text{-}41a)$$

$$v = (R_0 + y)\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \qquad (6\text{-}41b)$$

Estas dos ecuaciones dan las coordenadas del perfil de la leva y proporcionan una alternativa para el procedimiento de trazado que se da en la figura 6-10. Se pueden usar para generar una tabla de datos de coordenadas rectangulares numéricas a partir de las cuales se puede maquinar la leva. Las ecuaciones en coordenadas polares para estos mismos datos son

$$R = \sqrt{(R_0 + y)^2 + (y')^2} \qquad (6\text{-}42a)$$

y

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta - \tan^{-1}\frac{y'}{R_0 + y} \qquad (6\text{-}42b)$$

6-10 LEVA DE PLACA CON SEGUIDOR OSCILANTE DE RODILLO

En la figura 6-31 se muestra una leva de placa con un seguidor de movimiento alternativo y de rodillo. Se observa que faltan por elegir tres parámetros geométricos, después de completar el diagrama de desplazamientos, antes de que se pueda realizar el trazado de la leva. Estos son el radio del círculo primario R_0, la excentricidad ϵ, y el radio del rodillo R_r. También hay dos problemas potenciales

que es necesario considerar al elegir estos parámetros: uno de ellos es la socavación y el otro un ángulo de presión inadecuado.

El *ángulo de presión* es el comprendido entre el eje del vástago del seguidor y la linea de acción de la fuerza ejercida por la leva sobre el seguidor de rodillo, la normal a la curva de paso que pasa por el punto de trazo. El ángulo de presión se denota por ϕ en la figura. Sólo la componente de la fuerza a lo largo de la línea de movimiento del seguidor resulta útil para contrarrestar la carga de salida; la componente perpendicular debe mantenerse en un valor bajo para reducir la fricción de deslizamiento entre el seguidor y su guía. Si el ángulo de presión es demasiado grande, aumentará el efecto de fricción y puede hacer que el seguidor sufra una traslación que produzca un traqueteo o incluso un atascamiento. Los ángulos de presión en la leva de hasta aproximadamente 30 a 35° se consideran como los más grandes que es factible usar sin provocar problemas.

En la figura 6-31 se ve que la normal a la curva de paso se interseca con el eje horizontal en el punto P_{24}, el centro instantáneo de velocidad entre la leva 2 y el seguidor 4. Puesto que el seguidor se está trasladando, todos sus puntos tienen velocidades iguales a la de P_{24}. Pero ésta también debe ser igual a la velocidad del punto coincidente del eslabón 2,

$$V_{P_{24}} = \dot{y} = \omega R_{P_{24}O_2}$$

Dividiendo entre ω y aplicando la (6-14), esto se puede reducir a una relación estrictamente geométrica,

$$\frac{\dot{y}}{\omega} = y' = R_{P_{24}O_2}$$

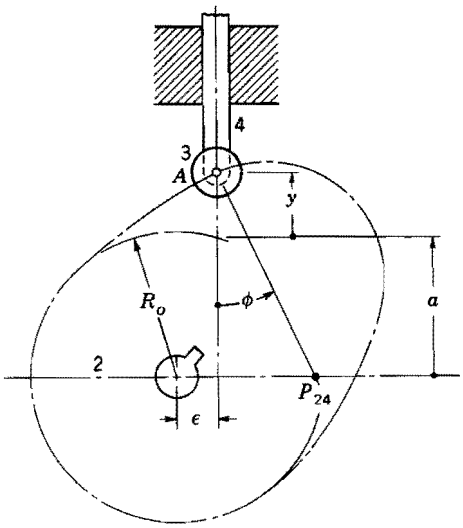


Figura 6-31

Ésta se puede escribir en términos de la excentricidad y el ángulo de presión,

$$y' = \epsilon + (a + y) \tan \phi \qquad (a)$$

en donde, como se muestra en la figura 6-31, a es la distancia vertical del eje de la leva hasta el círculo primario,

$$a = \sqrt{R_0^2 - \epsilon^2} \qquad (b)$$

Al hacer la substitución de esto en la (a) y resolviendo para ϕ, se obtiene una expresión para el ángulo de presión,

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y' - \epsilon}{\sqrt{R_0^2 - \epsilon^2} + y} \qquad (6\text{-}43)$$

A partir de esta ecuación se ve que una vez que se han determinado las ecuaciones del desplazamiento y, se pueden ajustar dos parámetros R_0 y ϵ para obtener un ángulo de presión apropiado. Se observa también que ϕ está cambiando continuamente conforme gira la leva y, por ende, se tiene interés en estudiar los valores extremos de ϕ.

En primer lugar consideremos el efecto de la excentricidad. En vista de la forma de la ecuación (6-43), se ve que al aumentar ϵ se incrementa o disminuye la magnitud del numerador, dependiendo del signo de y'. Por lo tanto, se puede usar una pequeña excentricidad ϵ para reducir el ángulo de presión ϕ durante el movimiento de subida, cuando y' es positiva; pero sólo a costa de un ángulo de presión incrementado durante el movimiento de retorno, cuando y' es negativa. Aún más, puesto que las magnitudes de las fuerzas son casi siempre mayores durante la subida, es práctica común descentrar el seguidor para aprovechar esta reducción en el ángulo de presión.

Se puede producir un efecto mucho más significativo en la reducción del ángulo de presión incrementando el radio R_0 del círculo primario. Para estudiar este efecto, tomemos el enfoque conservador y supongamos que no existe excentricidad, $\epsilon = 0$. Entonces la ecuación (6-43) se reduce a

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y'}{R_0 + y} \qquad (6\text{-}44)$$

Para encontrar los valores extremos de y' es posible derivar esta ecuación con respecto a la rotación de la leva e igualarla a cero, encontrando así los valores de θ que proporcionan el ángulo de presión máximo y mínimo. No obstante, éste es un proceso matemático tedioso y se puede evitar utilizando el nomograma de la figura 6-32. Este nomograma se produjo al investigar en una computadora digital el valor máximo de ϕ con base en la ecuación (6-44), para cada una de las curvas estándar de movimiento de subida completa de la sección 6-6. Con el nomograma se está en posición de emplear los valores conocidos de L y β para cada segmento del diagrama de desplazamientos, y tomar una lectura directa del ángulo máximo de presión que ocurre en ese segmento, para una elección particular de R_0. De otro

modo, se puede escoger un ángulo de presión máximo deseado y determinar un valor adecuado de R_0. El proceso se ilustrará con mayor claridad mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6-4 Suponiendo que se van a lograr las características de desplazamiento del ejemplo 6-2 por medio de una leva de placa con seguidor radial de movimiento alternativo y rodillo, determínese el radio mínimo del círculo primario tal que el ángulo de presión no sea mayor que 30°.

SOLUCIÓN Cada sección del diagrama de desplazamientos se comprueba sucesivamente usando el nomograma de la figura 6-32.

Para la sección AB de la figura 6-24, se tiene un movimiento semicicloidal con $\beta_1 = 91°$ y $L_1 = 1.264$ pulg. Puesto que se trata de una curva de media subida, en tanto que la figura 6-32 es para curvas de subida completa, es necesario duplicar tanto β_1 como L_1, pretendiendo con ello que la curva sea de subida completa; esto da $\beta = 182°$ y $L = 2.53$ pulg. A continuación, conectando una recta desde $\beta = 182°$ hasta $\phi_{máx} = 30°$, en la escala inferior del eje central del nomograma se lee un valor de $R_0/L = 0.65$, a partir de lo cual se obtiene

$$R_0 = 0.65(2.53) = 1.64 \text{ pulg}$$

El segmento BC no requiere comprobación alguna puesto que su ángulo máximo de presión ocurre en la frontera B y no puede ser mayor que el del segmento AB.

El segmento CD tiene movimiento semiarmónico con $\beta_3 = 27.5°$ y $L_3 = 0.486$ pulg. Una vez más, puesto que se trata de una curva de media subida, estos valores se duplican y se deben usar $\beta = 55°$, $L = 0.972$ pulg. Luego, en el nomograma se encuentra $R_0/L = 2.4$, de lo cual

$$R_0 = 2.4(0.972) = 2.33 \text{ pulg}$$

Sin embargo, aquí se debe tener cuidado extremo. Este valor es el radio de un círculo primario para el que el eje horizontal de la curva duplicada, la armónica completa tiene $y = 0$; éste no es el R_0 que se busca ya que el eje horizontal de la armónica completa tiene un valor y diferente de cero igual a

$$y = 3.00 - 0.972 = 2.03 \text{ pulg}$$

'El valor apropiado de R_0 para esta situación es

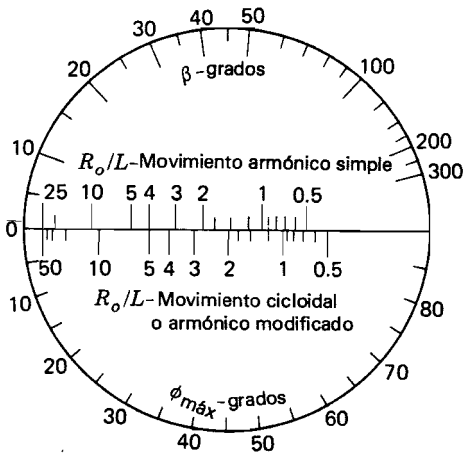


Figura 6-32 Nomograma que relaciona el ángulo máximo de presión $\phi_{máx}$ con el radio del círculo primario R_0, la elevación L y el ángulo activo de la leva β para levas de seguidor radial y rodillo con movimiento armónico simple, cicloidal o armónico modificado de subida completa o retorno completo.

$$R_0 = 2.33 - 2.03 = 0.30 \text{ pulg}$$

A continuación se comprueba el segmento DE, que tiene movimiento armónico modificado con $\beta_4 = 136.5°$ y $L_4 = 3.00$ pulg. En vista de que se trata de una curva de movimiento de retorno completo, no es necesario realizar ajuste alguno. En el nomograma se encuentra $R_0/L = 1.00$ y

$$R_0 = 1.00(3.00) = 3.00 \text{ pulg}$$

Para asegurarse de que el ángulo de presión no sobrepase a 30° a lo largo de todos los segmentos de la leva, es necesario elegir el radio del círculo primario por lo menos tan grande como el máximo de estos valores predichos. Tomando en cuenta la imposibilidad de obtener lecturas de gran precisión en el nomograma, se podría elegir un valor mayor, como por ejemplo,

$$R_0 = 3.25 \text{ pulg} \quad \textit{Resp.}$$

Ahora que se ha seleccionado un valor final, se puede usar una vez más la figura 6-32 para encontrar el ángulo máximo real de presión en cada segmento.

AB: $\dfrac{R_0}{L} = \dfrac{3.25}{2.53} = 1.28 \qquad \phi_{máx} = 21°$

CD: $\dfrac{R_0}{L} = \dfrac{5.28}{0.97} = 5.45 \qquad \phi_{máx} = 16°$

DE: $\dfrac{R_0}{L} = \dfrac{3.25}{3.00} = 1.08 \qquad \phi_{máx} = 29°$

Aunque se ha proporcionado el círculo primario para dar un ángulo de presión satisfactorio, sigue existiendo la posibilidad de que el seguidor no complete el movimiento deseado; si la curvatura de la curva de paso es demasiado brusca, el perfil de la leva puede resultar socavado. En la figura 6-33*a* se presenta una porción de la curva de paso de una leva y dos perfiles de leva generados por dos rodillos de diferente tamaño. El perfil de leva generado por el rodillo más grande

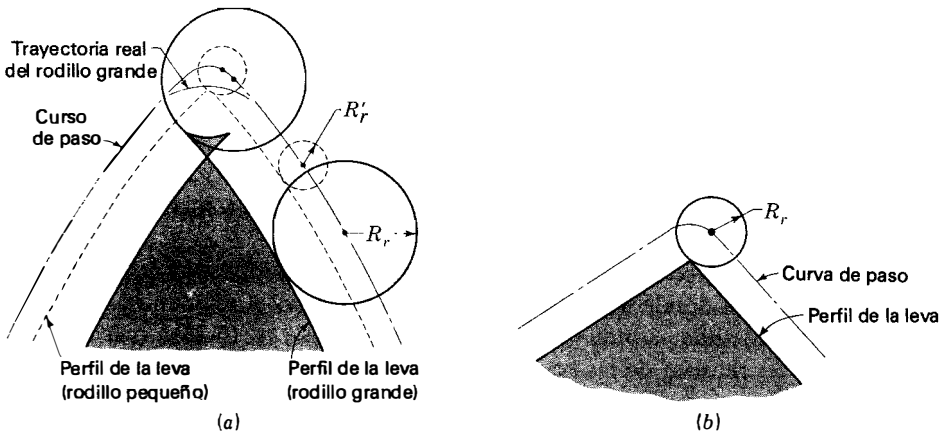


Figura 6-33

tiene una socavación y se dobla sobre sí mismo. El resultado, después de maquinar, es una leva puntiaguda que no produce el movimiento deseado. En esta misma figura es evidente también que el rodillo más pequeño, moviéndose sobre la misma curva de paso genera un perfil de leva satisfactorio. Del mismo modo, si el círculo primario y, por ende, el tamaño de la leva se aumenta lo suficiente, el rodillo más grande funcionará satisfactoriamente.

En la figura 6-33*b* se ve que el perfil de la leva será puntiagudo cuando el radio del rodillo R_r es igual al radio de curvatura de la curva de paso. Por consiguiente, para lograr algún valor mínimo elegido ρ_{min} para el radio mínimo de curvatura del perfil de la leva, el radio de curvatura de la curva de paso siempre debe ser mayor que este valor en un cantidad igual al radio del rodillo.

$$\rho_{paso} = \rho + R_r \qquad (c)$$

Ahora, en el caso de un seguidor radial de rodillo, las coordenadas polares de la curva de paso son θ y

$$R = R_0 + y \qquad (d)$$

Tomando como base cualquier texto estándar de cálculo diferencial, se puede escribir la expresión general para el radio de curvatura de una curva en coordenadas polares; éste es

$$\rho_{paso} = \rho + R_r = \frac{[(R_0 + y)^2 + (y')^2]^{3/2}}{(R_0 + y)^2 + 2(y')^2 - (R_0 + y)y''} \qquad (6\text{-}45)$$

Al igual que antes, es posible derivar esta expresión con respecto a la rotación de la leva θ y, por tanto, buscar el valor mínimo de ρ para una elección particular de la ecuación de desplazamiento y, y un radio particular del círculo primario R_0. No obstante, puesto que esto sería un cálculo sumamente tedioso de repetir para cada nuevo diseño de leva, se ha encontrado el radio mínimo de curvatura gracias a un programa de computadora digital para cada uno de los movimientos estándar de leva de la sección 6-6; los resultados se presentan gráficamente en las figuras 6-34 a 6-38. Cada una de estas figuras muestran las gráficas de $(\rho_{min} + R_r)/R_0$ contra β para un tipo de curva de movimiento estándar, con varias razones de R_0/L. Puesto que se ha resuelto para el diagrama de desplazamientos y se ha elegido un valor de R_0, se puede comprobar cada segmento de la leva para encontrar su radio mínimo de curvatura.

Para ahorrar incluso más esfuerzo, no es necesario comprobar aquellos segmentos de la leva en donde y se mantiene positiva en todo el segmento, como los movimientos de medida subida de las ecuaciones (6-24) y (6-28), o los movimientos de medio retorno de las ecuaciones (6-27) y (6-31). Suponiendo que se ha hecho continua la curva de "aceleración", no puede presentarse el radio mínimo de curvatura de la leva en estos segmentos; la ecuación (6-45) da $\rho_{min} = R_0 - R_r$ para cada uno de ellos.

Ejemplo 6-5 Suponiendo que se van a lograr las características de desplazamiento del ejemplo 6-2 por medio de una leva de placa con seguidor de movimiento alternativo y rodillo, determínese el radio mínimo de curvatura del perfil de la leva, para lo cual se puede usar un radio del círculo primario de $R_0 = 3.25$ pulg y un radio del rodillo de $R_r = 0.5$ pulg.

SOLUCIÓN Para el segmento AB de la figura 6-24, no hay necesidad de comprobar puesto que y'' es positiva en todo el segmento.

Para el segmento CD se tiene $\beta_3 = 27.46°$ y $L_3 = 0.486$ pulg, de lo cual se obtiene

$$\frac{R_0}{L} = \frac{3.25 + (L_1 + L_2)}{L_3} = \frac{5.76}{0.486} = 11.8$$

en donde R_0 se ajustó mediante $L_1 + L_2$, en vista de que las gráficas de la figura 6-37 se trazaron para $y = 0$ en la base del segmento. Utilizando la figura 6-37b, se encuentra $(\rho_{min} + R_r)/R_0 = 0.57$ y, por ende,

$$\rho_{min} = 0.57R_0 - R_r = 0.57(5.76) - 0.50 = 2.78 \text{ pulg}$$

en donde, una vez más, se empleó el valor ajustado de R_0.

Para el segmento DE se tiene $\beta_4 = 136.5°$ y $L_4 = 3.00$ pulg, de lo cual $R_0/L = 0.92$. Recurriendo a la figura 6-36a, se encuentra $(\rho_{min} + R_r)/R_0 = 1.00$ y

$$\rho_{min} = 1.00R_0 - R_r = 3.25 - 0.50 = 2.75 \text{ pulg}$$

Después de elegir el valor más pequeño, se encuentra que el radio mínimo de curvatura de todo el perfil de la leva es

$$\rho_{min} = 2.75 \text{ pulg} \quad \textit{Resp.}$$

Las coordenadas rectangulares del perfil de una leva de placa con seguidor de movimiento alternativo con rodillo, están dadas por

$$u = (\sqrt{R_0^2 - \epsilon^2} + y) \operatorname{sen}\theta + \epsilon \cos\theta + R_r \operatorname{sen}(\phi - \theta) \tag{6-46a}$$

$$v = (\sqrt{R_0^2 - \epsilon^2} + y) \cos\theta - \epsilon \operatorname{sen}\theta - R_r \cos(\phi - \theta) \tag{6-46b}$$

en donde ϕ es el ángulo de presión dado por la (6-43). Las coordenadas polares son

$$R = \sqrt{(\sqrt{R_0^2 - \epsilon^2} + y - R_r \cos\phi)^2 + (\epsilon + R_r \operatorname{sen}\phi)^2} \tag{6-47a}$$

$$\psi = -\theta + \tan^{-1} \frac{\sqrt{R_0^2 - \epsilon^2} - R_r \cos\phi}{\epsilon + R_r \operatorname{sen}\phi} \tag{6-47b}$$

En esta sección y en la anterior se examinaron los problemas que resultan de la elección inadecuada del radio del círculo primario, para una leva de placa con seguidor de movimiento alternativo. Aunque las ecuaciones son diferentes para seguidores oscilantes y otros tipos de levas, se puede seguir un método similar para

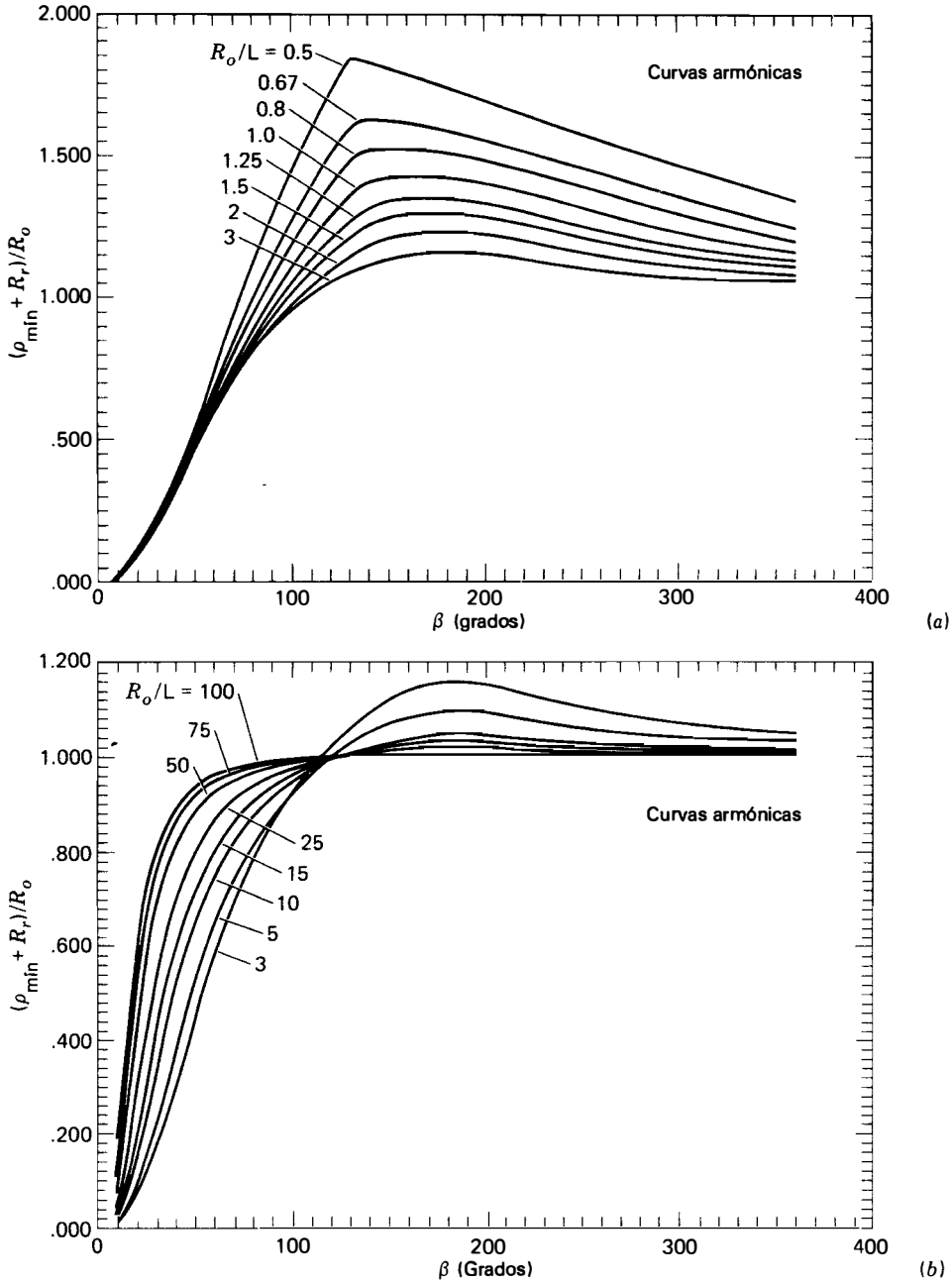


Figura 6-34 Radio mínimo de curvatura para las levas de seguidor radial y rodillo con movimiento armónico simple de subida completa o retorno completo, ecuaciones (6-18) y (6-21). (*Tomado de M.A. Ganter y J. J. Uicker, Jr., J. Mech. Des., ASME Trans., ser. B, vol. 101, no. 3, pp. 465-470, 1979, con autorización.*)

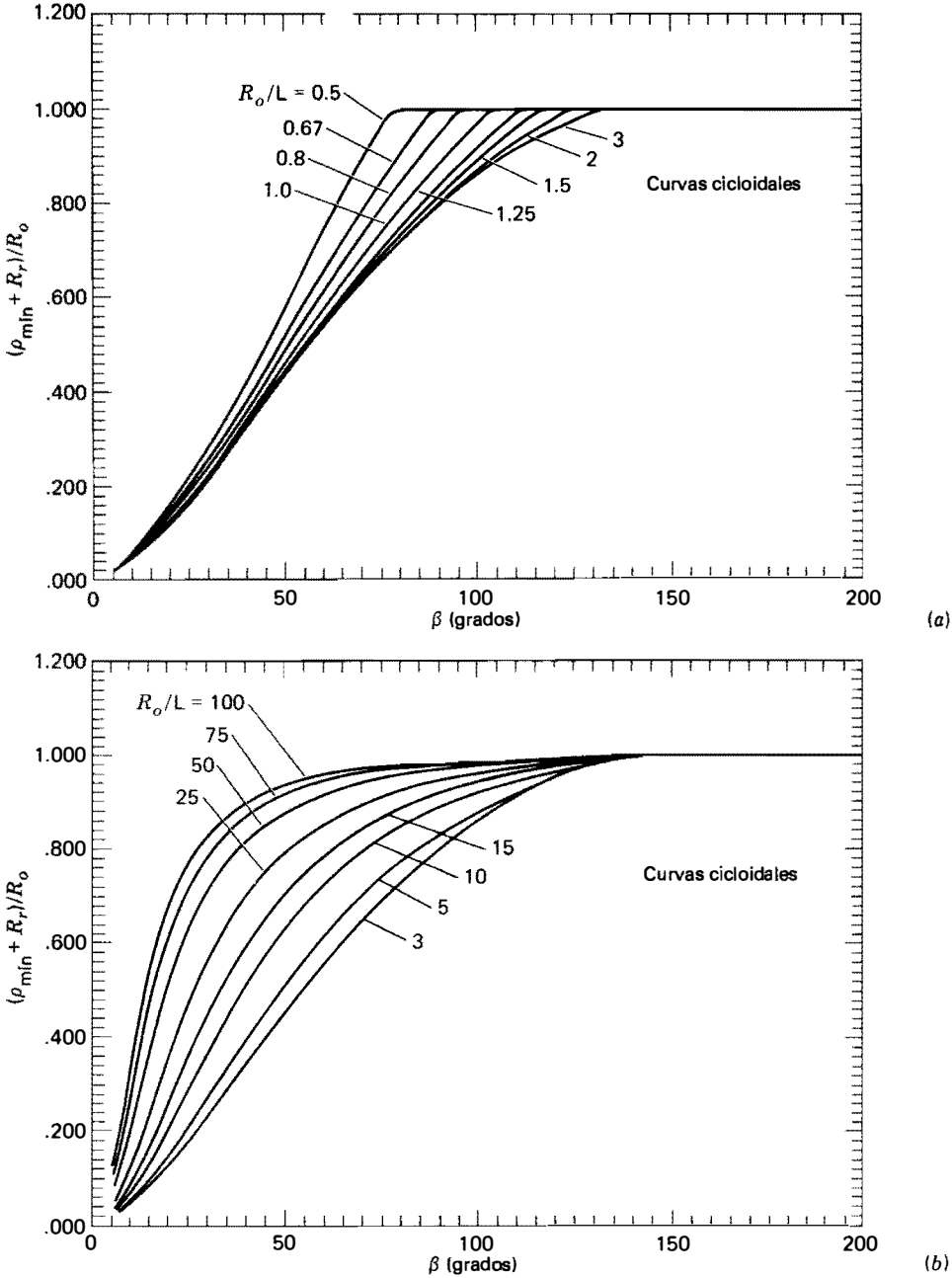
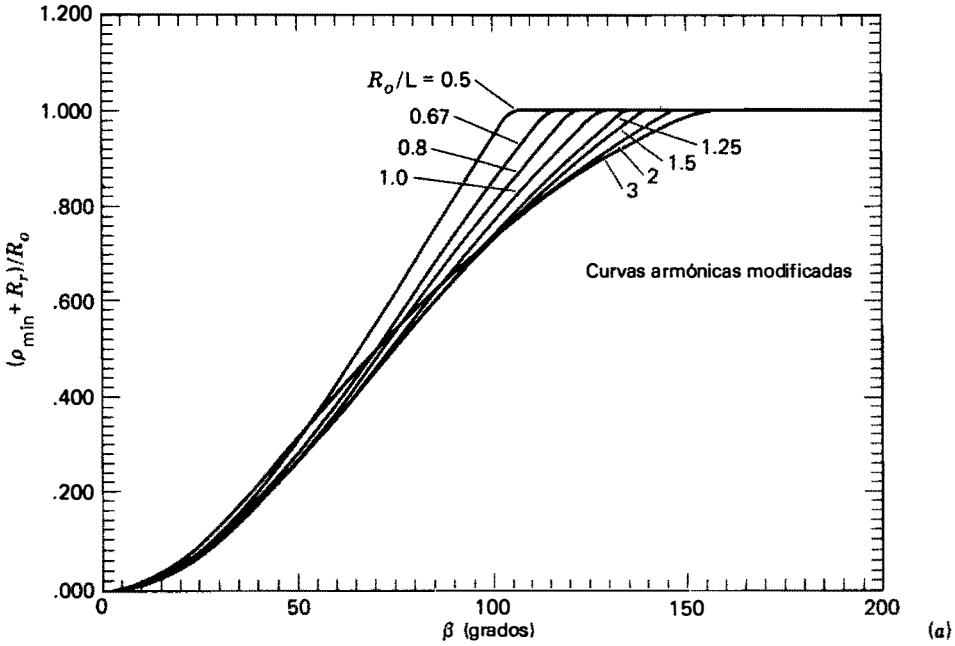


Figura 6-35 Radio mínimo de curvatura para levas de seguidor radial y rodillo, con movimiento cicloidal de subida completa o retorno completo, ecuaciones (6-19) y (6-22). (*Tomado de M.A. Ganter y J.J. Uicker, Jr., J. Mech. Des., ASME Trans., ser. B, vol. 101, no. 3, pp. 465-470, 1979, con autorización.*)



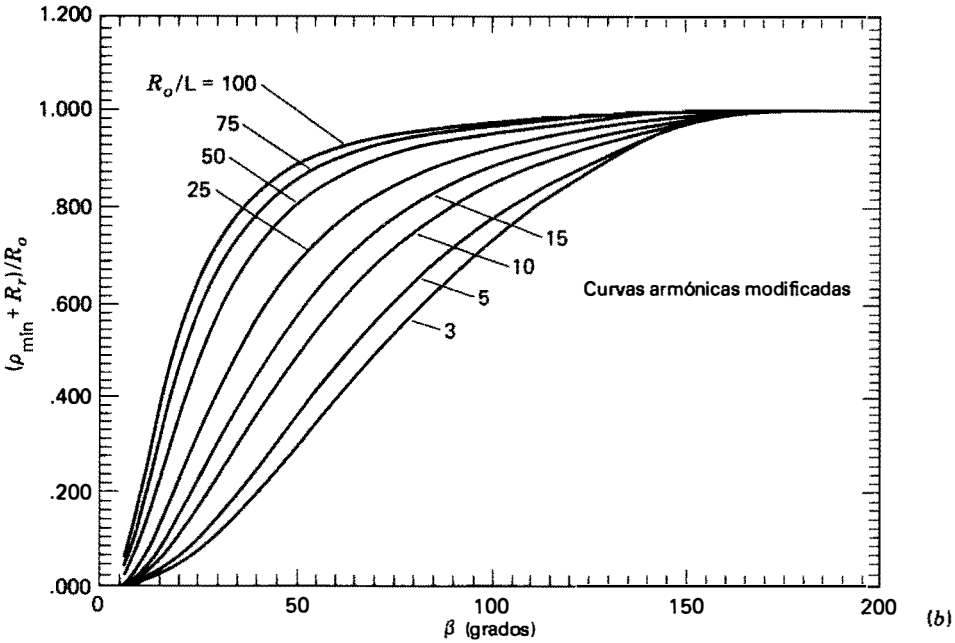


Figura 6-36 Radio mínimo de curvatura para levas con seguidor radial y rodillo, con movimiento armónico modificado de subida completa o retorno completo, ecuaciones (6-20) y (6-23). (*Tomado de M.A. Ganter y J. J. Uicker, Jr., J. Mech. Des., ASME Trans., ser. B, vol. 101, no. 3, pp. 465-470, 1979, con autorización.*)

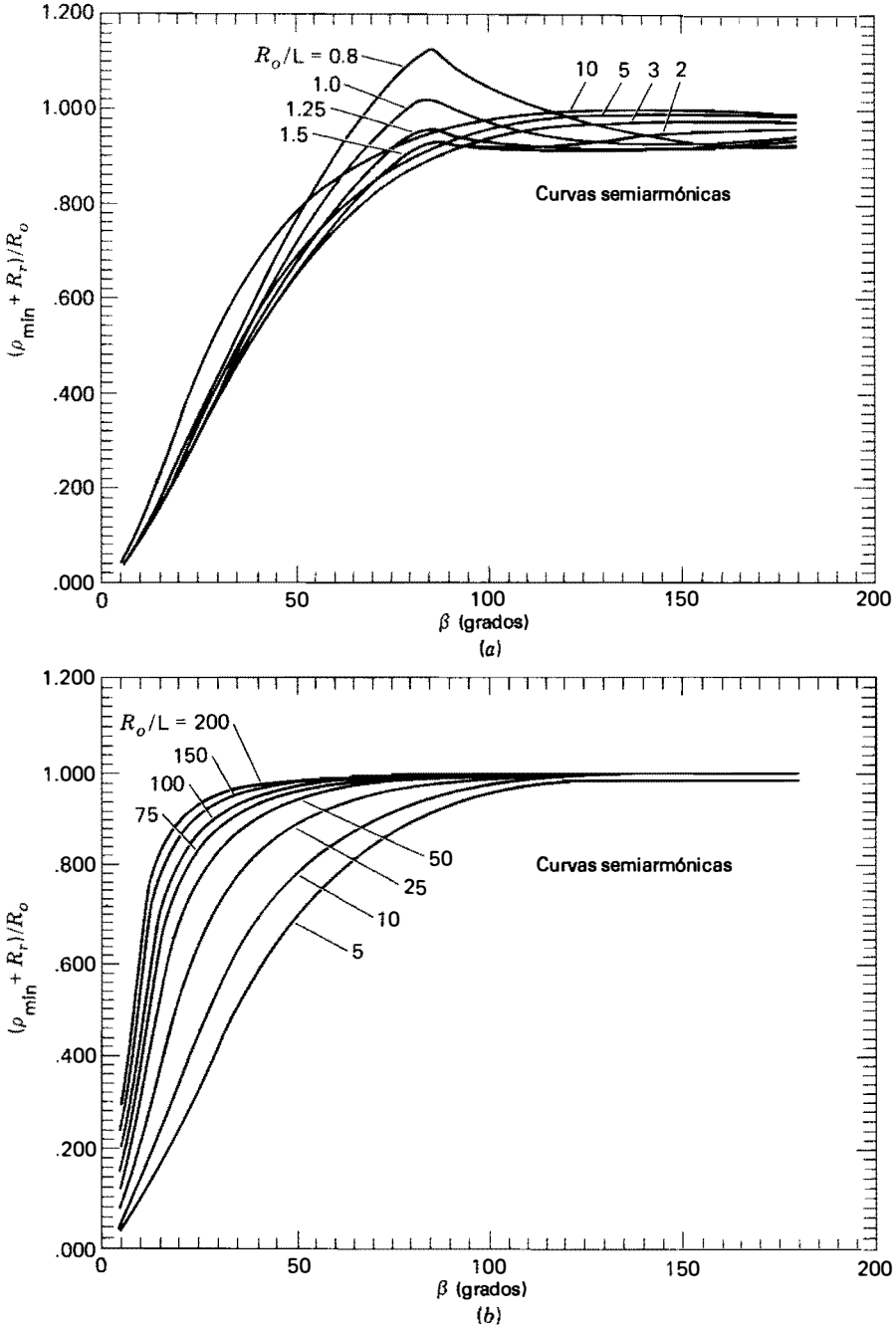
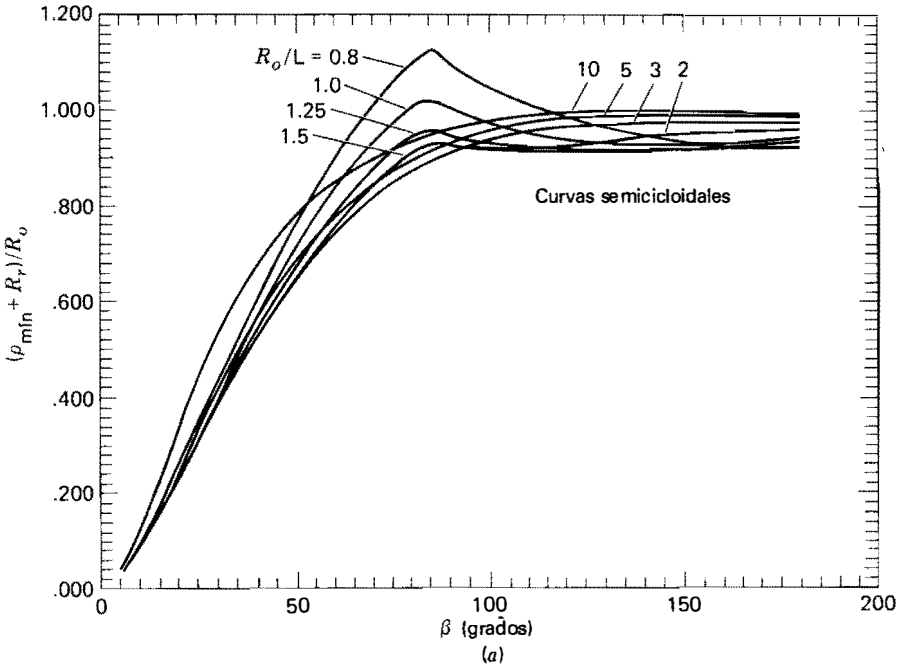


Figura 6-37 Radio mínimo de curvatura para levas con seguidor radial y rodillo con movimiento semiarmónico, ecuaciones (6-25) y (6-26). (*Tomado de M.A. Ganter y J.J. Uicker, Jr., J. Mech. Des., ASME Trans., ser. B, vol. 101, no. 3, pp. 465-470, 1979, con autorización.*)



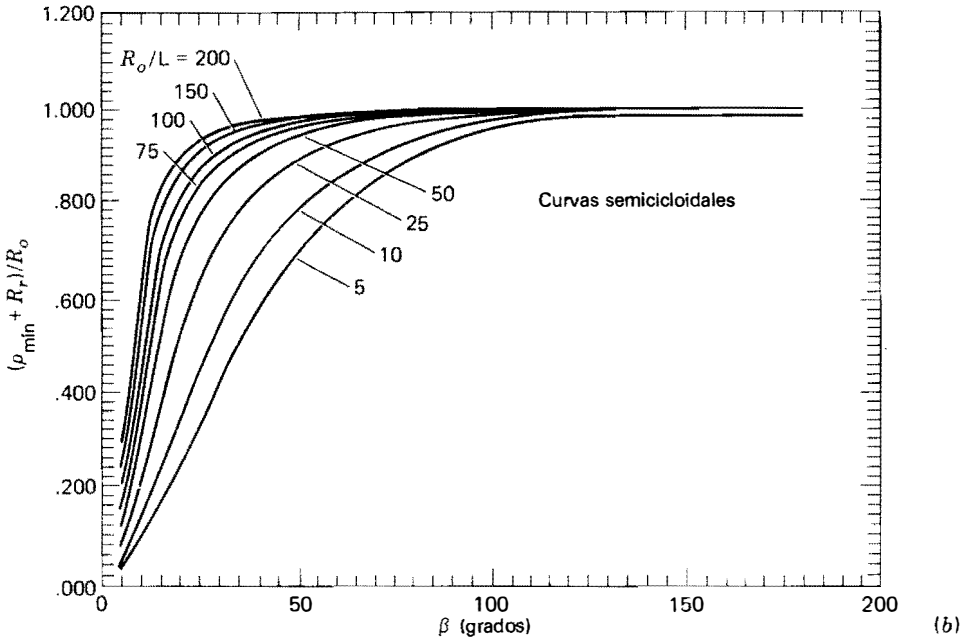


Figura 6-38 Radio mínimo de curvatura para levas con seguidor radial y rodillo en movimiento semicicloidal, ecuaciones (6-29) y (6-30). (*Tomado de M.A. Ganter y J. J. Uicker, Jr., J. Mech. Des., ASME Trans., ser. B, vol. 101, no. 3, pp. 465-470, 1979, con autorización.*)

evitar la socavación† y ángulos de presión severos.‡ También se pueden desarrollar ecuaciones semejantes para datos de perfiles de leva.§ Chen realizó una compilación excelente de investigaciones sobre publicaciones actuales que se ocupan del diseño de levas.¶

PROBLEMAS

6-1 El seguidor de movimiento alternativo, radial y de rodillo, de una leva de placa debe subir 2 pulg con movimiento armónico simple en 180° de rotación de la leva, y retornar con movimiento armónico simple en los 180° restantes. Si el radio del rodillo es de 0.375 pulg y el del círculo primario es de 2 pulg constrúyase el diagrama de desplazamientos, la curva de paso y el perfil de la leva para una rotación de ésta en el mismo sentido que el movimiento de las manecillas del reloj.

6-2 Una leva de placa con seguidor de movimiento alternativo y cara plana debe tener el mismo movimiento que el mencionado en el problema 6-1. El radio del círculo primario será de 1.5 pulg y la leva girará en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Constrúyase el diagrama de desplazamientos y el perfil de la leva, dándole al vástago del seguidor una excentricidad de 0.75 pulg, en la dirección que reduce el esfuerzo de flexión en el seguidor durante la subida.

6-3 Constrúyase el diagrama de desplazamientos y el perfil de la leva para una leva de placa con seguidor radial oscilante de cara plana, que sube 30° con movimiento cicloidal en 150° de rotación de la leva en el mismo sentido que el movimiento de las manecillas del reloj, luego tiene una detención durante 30°, retorna con movimiento cicloidal en 120° y tiene otra detención en el curso de 60°. Determínese gráficamente la longitud necesaria de la cara del seguidor, permitiendo una holgura de 5 mm en cada extremo. El radio del círculo primario es de 30 mm; el pivote del seguidor está 120 mm hacia la derecha; y la rotación de la leva es en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj.

6-4 Una leva de placa con seguidor oscilante de rodillo debe producir el mismo movimiento que se indica en el problema 6-3. El radio del círculo primario es de 60 mm, la longitud del seguidor es de 100 mm y su pivote se encuentra a 125 mm en relación con el eje de rotación de la leva; el radio del rodillo es de 10 mm. Constrúyase la curva de paso y el perfil de la leva. Determínese el ángulo de presión máximo. La rotación de la leva es en el mismo sentido que el movimiento de las manecillas del reloj.

6-5 Para un movimiento armónico simple de subida completa, escríbanse las ecuaciones para la velocidad y el tirón en el punto medio del movimiento. Determínese también la aceleración cuando principia y concluye el movimiento.

6-6 Para el movimiento cicloidal de subida completa, determínense los valores de θ para los que la aceleración es máxima y mínima. ¿Cuál es la fórmula para la aceleración en estos puntos? Encuéntrense las ecuaciones para la velocidad y el tirón en el punto medio del movimiento.

6-7 Una leva de placa con seguidor de movimiento alternativo debe girar en el mismo sentido que el movimiento de las manecillas del reloj, a 400 rpm. El seguidor debe tener una detención durante 60° de

† M. Kloomok y R.V. Muffley, "Plate Cam Design: Radius of Curvature", *Prod. Eng.*, vol. 26, no. 9, pp. 186-201, 1955.

‡ M. Kloomok y R.V. Muffley, "Plate Cam Design: Pressure Angle Analysis", *Prod. Eng.*, vol. 26, no. 5, pp. 155-171, 1955.

§ Véase, por ejemplo, la obra excelente de S. Molian, *The Design of Cam Mechanisms and Linkages*, Constable, London, 1968.

¶ F. Y. Chen, "A Survey of the State of the Art of Cam System Dynamics", *Mech. Mach. Theory*, vol. 12. no. 3, pp. 201-224, 1977.

rotación de la leva, después de lo cual sube hasta una elevación de 2.5 pulg. Durante 1 pulg de su carrera de retorno debe tener una velocidad constante de 40 pulg/s. Recomiéndense los movimientos estándar de las levas, de la sección 6-6, que sea factible usar para un funcionamiento a alta velocidad y determínense las elevaciones correspondientes y los ángulos de rotación de la leva para cada segmento de la misma.

6-8 Repítase el problema 6-7, sólo que en este caso la detención deberá ser por 120° de rotación de la leva.

6-9 Si la leva del problema 6-7 se impulsa a velocidad constante, determínese el tiempo de la detención, la velocidad y aceleración máxima y mínima del seguidor para el ciclo de la leva.

6-10 Una leva de placa con seguidor oscilante debe subir 20° en 60° de rotación de la leva, tener una detención durante 45°, luego subir 20° más, retornar y tener otra detención durante 60° de rotación de la leva. Suponiendo operación a gran velocidad, recomiéndense los movimientos estándar de las levas de la sección 6-6 que deban usarse, y determínense las elevaciones y los ángulos de rotación de la leva para cada segmento de la misma.

6-11 Determínese la velocidad y aceleración máximas del seguidor para el problema 6-10, suponiendo que la leva es impulsada a una velocidad constante de 600 rpm.

6-12 Las condiciones en la frontera para un movimiento polinomial de leva son como sigue: para un $\theta = 0$, $y = 0$ y $y' = 0$; para $\theta = \beta$, $y = L$ y $y' = 0$. Determínese la ecuación apropiada del desplazamiento y sus tres primeras derivadas con respecto a θ. Trácense los diagramas correspondientes.

6-13 Determínese la anchura mínima de la cara utilizando 0.1 pulg de holguras en cada extremo, y el radio mínimo de curvatura para la leva descrita en el problema 6-2

6-14 Determínese el ángulo máximo de presión y el radio mínimo de curvatura para la leva del problema 6-1.

6-15 Un seguidor radial de movimiento alternativo y cara plana debe tener el movimiento descrito en el problema 6-7. Determínese el radio mínimo del círculo primario si el radio de curvatura de la leva no debe ser menor que 0.5 pulg. Con este radio del círculo primario, ¿cuál es la longitud mínima de la cara del seguidor dejando una holgura de 0.25 pulg a cada lado?

6-16 Hágase la construcción gráfica del perfil de la leva del problema 6-15, para una rotación de la leva en el mismo sentido que el movimiento de las manecillas del reloj.

6-17 Un seguidor radial de movimiento alternativo y de rodillo debe tener el movimiento descrito en el problema 6-7. Con un radio del círculo primario de 20 pulg, determínese el ángulo máximo de presión y el radio mínimo del rodillo que se pueda usar sin provocar socavación.

6-18 Constrúyase gráficamente el perfil de la leva del problema 6-17, utilizando un radio del rodillo de 0.75 pulg. La rotación de la leva será en el mismo sentido que el movimiento de las manecillas del reloj.

6-19 Una leva de placa gira a 300 rpm e impulsa a un seguidor radial de movimiento alternativo y de rodillo, a lo largo de una subida completa de 75 mm en 180° de rotación de la leva. Hállese el radio mínimo del círculo primario si se usa movimiento armónico simple y el ángulo de presión no debe exceder a 25°. Encuéntrese la aceleración máxima del seguidor.

6-20 Repítase el problema 6-19, excepto que en este caso el movimiento es cicloidal.

6-21 Repítase el problema 6-19, excepto que en este caso el movimiento es armónico modificado.

6-22 Determínese si la leva del problema 6-19 tendrá una socavación cuando se use un diámetro de rodillo de 20 mm.

6-23 Las ecuaciones (6-41) y (6-42) describen el perfil de una leva de placa con un seguidor de movimiento alternativo y cara plana. Si una leva de esta índole se corta en una fresadora con un radio de cortador R_C, determínense las ecuaciones similares para el centro del cortador.

6-24 Escríbanse programas para calculadora para cada una de las ecuaciones del desplazamiento de la sección 6-6.

6-25 Escríbase un programa para computadora para representar gráficamente el perfil de la leva para el problema 6-2.

CAPÍTULO

SIETE

ENGRANES RECTOS O CILÍNDRICOS

Los engranes se estudian porque la transmisión del movimiento rotatorio de un eje a otro se presenta prácticamente en todas las máquinas imaginables. Los engranes constituyen uno de los mejores de los diversos medios disponibles para transmitir este movimiento.

En Estados Unidos, la tarea de convertir de las unidades inglesas a las del SI para el diseño y fabricación de engranes, es tan abrumadora, tan compleja y tan costosa que es probable que jamás se logre la conversión completa. Es por esto que la mayor parte del material de este capítulo y el siguiente se presenta en unidades inglesas usuales en E.U. Los lectores de este libro que vivan en los países en que se emplea por completo el SI, deberán complementar el material con copias de sus propias normas.

7-1 TERMINOLOGÍA Y DEFINICIONES

Los *engranes rectos* sirven para transmitir movimiento rotatorio entre ejes paralelos; por lo común son cilíndricos y los dientes son rectos y paralelos al eje de rotación.

En la figura 7-1 se ilustra la terminología de los dientes de los engranes, en donde se muestran la mayor parte de las siguientes definiciones:

El *círculo de paso* es un círculo teórico sobre el que generalmente se basan todos los cálculos. Los círculos de paso de un par de engranes acoplados son tangentes entre sí.

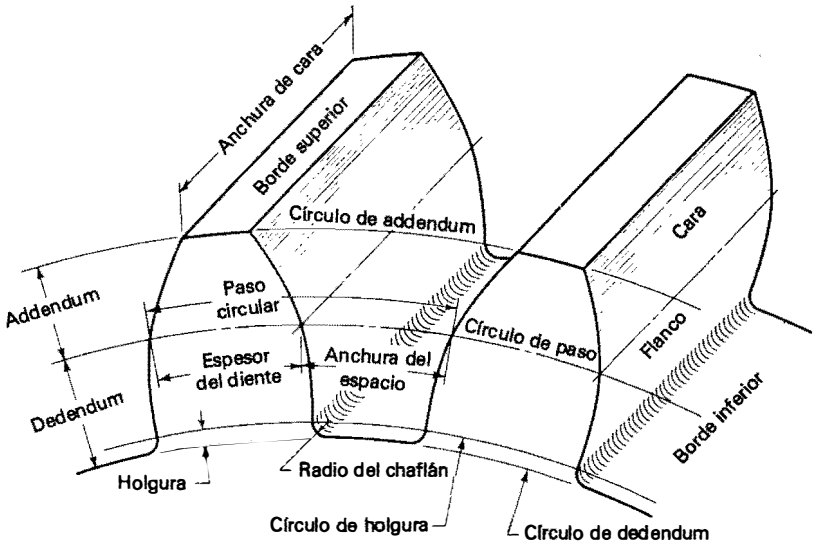


Figura 7-1 Terminología.

El *piñón* es el más pequeño de los dos engranes acoplados; el más grande se llama casi siempre el engrane.

El *paso circular* p_c es la distancia, en pulgadas, medida sobre el círculo de paso, que va desde un punto sobre uno de los dientes hasta un punto correspondiente sobre un diente adyacente.

El *paso diametral* P es el número de dientes en el engrane por pulgada de diámetro de paso. Las unidades del paso diametral son el recíproco de pulgadas. Nótese que en realidad no se puede medir el paso diametral sobre el engrane propiamente dicho.

El *módulo* m es la razón del diámetro de paso al número de dientes. La unidad de longitud acostumbrada es el milímetro. El módulo es el índice del tamaño del diente en el SI, en tanto que el paso diametral sólo se emplea con las unidades comúnmente empleadas en Estados Unidos.

La *cabeza* o *addendum* a es la distancia radial entre el borde superior y el círculo de paso.

La *raíz o dedendum* b es la distancia radial que va del borde inferior hasta el círculo de paso.

La *altura total* h_t es la suma del addendum y el dedendum.

El círculo de *holgura* es un círculo tangente al de addendum del engrane acoplado. El dedendum en un engrane dado excede al addendum del engrane con el que se acopla.

El *juego entre dientes* es la cantidad en la que la anchura de un espacio entre dientes excede al espesor del diente acoplado sobre los círculos de paso.

Conviene que el lector se demuestre a sí mismo a plena satisfacción la validez de las siguientes relaciones, que son de gran utilidad:

$$P = \frac{N}{d} \qquad m = \frac{d}{N} \tag{7-1}$$

en donde
P = paso diametral, dientes por pulgada
N = número de dientes
d = diámetro de paso, pulg o mm
m = módulo, mm

$$P_c = \frac{\pi d}{N} = \pi m \tag{7-2}$$

en donde p_c es el paso circular en pulgadas o milímetros

$$p_c P = \pi \tag{7-3}$$

7-2 LEY FUNDAMENTAL DEL ENGRANAJE

La acción de los dientes acoplados de los engranes, uno sobre otros, para producir un movimiento rotatorio, puede compararse con una leva y su seguidor. Cuando a los perfiles del diente (o los de la leva y el seguidor) se les da una forma tal como para que produzcan una razón constante entre las velocidades angulares durante el endentamiento, se dice que las superficies son *conjugadas*. Es posible especificar cualquier perfil para un diente y luego encontrar un perfil para el diente que se va a acoplar o entrelazar con él, de tal modo que las superficies sean conjugadas. Unas de estas soluciones es el *perfil de involuta* que, con unas cuantas excepciones, se utiliza universalmente en los dientes de engranes.

La acción de un solo par de dientes acoplados conforme recorren toda una fase de tal acción debe ser tal que la razón de la velocidad angular del engrane impulsor a la del engrane impulsado se mantenga constante. Este es el criterio fundamental que rige la selección de los perfiles del diente. Si esto no se cumpliera para el engranaje, se tendrían vibraciones muy serias y problemas de impacto, incluso a velocidades bajas.

En la sección 3-14 se explicó que el teorema de la razón de las velocidades angulares afirma que la razón de las velocidades angulares de cualquier mecanismo es inversamente proporcional a los segmentos en los que el polo común corta la línea de los centros. En la figura 7-2 se observan dos perfiles que están en contacto en A; sea el perfil 2 el impulsor y el 3 el impulsado. Una normal a los perfiles en el punto de contacto A se interseca con la línea de los centros O_2O_3 en el centro instantáneo P.

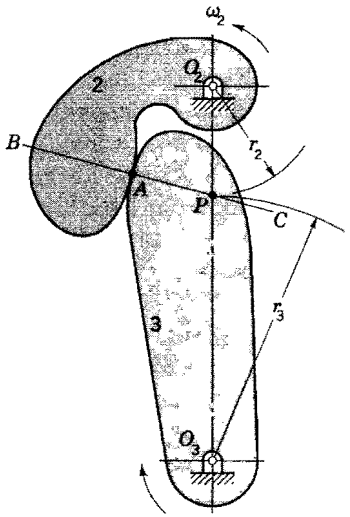


Figura 7-2

En el engranaje, P recibe el nombre de *punto de paso* y BC es la *línea de acción*. Si los radios del punto de paso de los dos perfiles se designan como r_2 y r_3, por la ecuación (3-25),

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2} \tag{7-4}$$

Esta ecuación se usa con mucha frecuencia para definir la *ley del engranaje*, la cual afirma que *el punto de paso se debe mantener fijo sobre la línea de los centros.* Esto significa que todas las líneas de acción de todo punto de contacto instantáneo debe pasar por el punto de paso. El problema consiste ahora en determinar la forma de las superficies acopladas para satisfacer la ley del engranaje.

No se debe presuponer que cualquier forma o perfil para el que se pueda encontrar un conjugado resultará satisfactorio. Aunque se encuentren curvas conjugadas, todavía existen los problemas prácticos de reproducir estas curvas en grandes cantidades sobre discos en blanco de acero, al igual que en otras clases de materiales, y con la maquinaria existente. Además, es necesario tomar en cuenta los cambios en los centros de los ejes debidos a alineaciones deficientes y a las grandes fuerzas ejercidas. Por último, el perfil de diente seleccionado debe ser de tal naturaleza que se pueda reproducir económicamente. Una gran parte de este capítulo se dedica a ilustrar la manera en que el perfil de involuta satisface estas necesidades.

7-3 PROPIEDADES DE LA INVOLUTA

Si los perfiles de dientes acoplados tienen la forma de curvas involutas, se satisface la condición de que la normal común en todos los puntos de contacto debe pasar

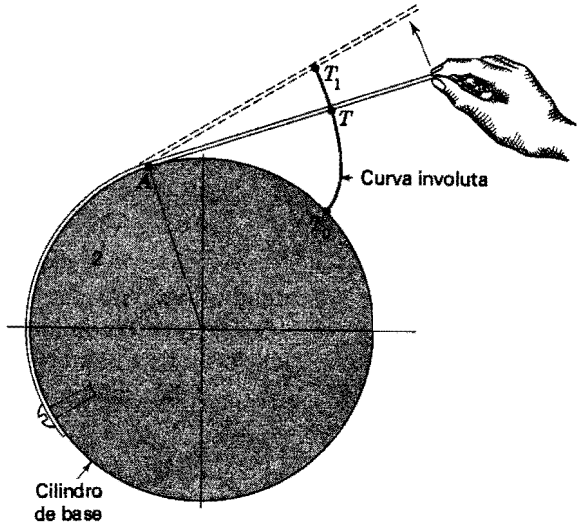


Figura 7-3

por el punto de paso. Una curva involuta es la trayectoria generada por un punto trazador sobre una cuerda, conforme ésta se desenrolla de un cilindro denominado *cilindro base*. Lo anterior aparece ilustrado en la figura 7-3, en donde T es el punto trazador. Nótese que la cuerda AT es normal a la involuta en T y que la distancia AT es el valor instantáneo del radio de curvatura. Conforme la involuta se genera desde el origen T_0 hasta T_1, el radio de curvatura varía continuamente; es cero en

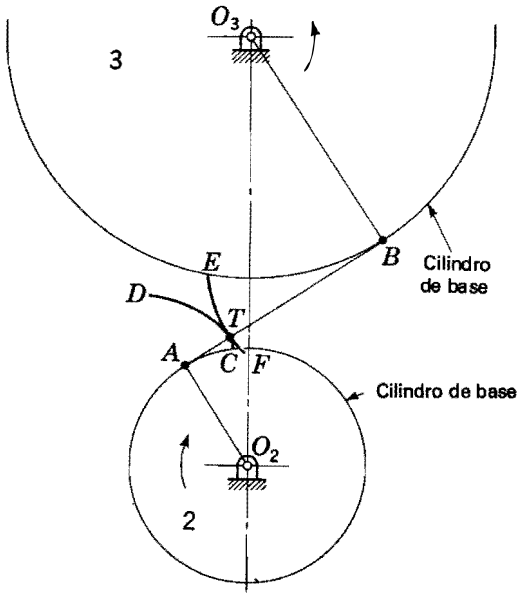


Figura 7-4 Acción de involuta.

T_0 y tiene su mayor valor en T_1. Por ende, la cuerda es la recta generadora y siempre es normal a la involuta.

Examinemos ahora el perfil de involuta para ver cómo satisface la necesidad de transmisión de movimiento uniforme. En la figura 7-4
en blanco, con centros fijos O_2 y O_3, que tienen cilindros base cuyos radios respectivos son O_2A y O_3B. Imaginemos ahora que se arrolla una cuerda en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj, alrededor del cilindro base del engrane 2, se tira firmemente de ella entre los puntos A y B y se arrolla en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj, alrededor del cilindro base del engrane 3. Si se hacen girar los cilindros base en direcciones diferentes, de tal modo que la cuerda se mantenga tensa, un punto T trazará los involutas CD sobre el engrane 2 y EF sobre el engrane 3. Las involutas generadas simultáneamente de esta manera por un solo punto trazador se consideran perfiles conjugados.

A continuación, imaginemos que las involutas de la figura 7-4 se trazan sobre placas y que éstas se cortan a lo largo de las curvas trazadas, fijándose sobre los cilindros respectivos en las mismas posiciones. El resultado es el que se ilustra en la figura 7-5. Ahora, se puede eliminar la cuerda y si el engrane 2 se mueve en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj, el engrane 3 se verá obligado a moverse en el sentido contrario debido a la acción tipo leva de las dos placas curvas. La trayectoria de contacto será la recta AB que antes ocupara la cuerda. Dado que la recta AB es la línea generadora de cada involuta, es normal a los dos perfiles en todos los puntos de contacto. Asimismo, siempre ocupa la misma posición en virtud de que es tangente a los dos cilindros base. Por consiguiente, el punto P es el de paso; no se mueve; y, por tanto, la curva involuta satisface la ley del engranaje.

Antes de concluir esta sección, el lector debe observar que un cambio en la distancia entre los centros, que se podría causar debido a un montaje incorrecto,

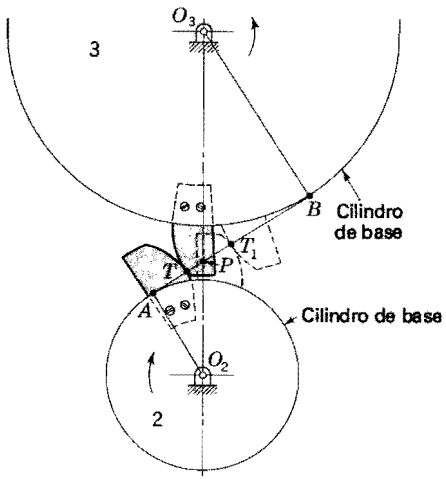


Figura 7-5

no tendrá efecto sobre la forma de la involuta. Además, el punto de paso sigue siendo fijo y la ley del engranaje se satisface.

7-4 ENGRANES INTERCAMBIABLES; NORMAS AGMA

Un *sistema de dientes* es una *norma*† que especifica las relaciones entre el addendum, dedendum, altura de trabajo, espesor del diente y ángulo de presión para lograr la intercambiabilidad de los engranes de todos los números de dientes, pero del mismo ángulo de presión y paso. El lector debe tener conocimiento de las ventajas y desventajas de los diversos sistemas, para poder elegir el diente óptimo para un diseño
estándar de diente.

En la tabla 7-1 se listan las proporciones del diente para engranes completamente intercambiables, en el sistema de unidades usual en Estados Unidos, y para que operen a distancias estándar entre centros. No se han establecido normas en este país para sistemas de dientes basados por completo en la aplicación de las unidades SI. A decir verdad, es probable que varios años antes de que se llegue a un acuerdo los problemas que se deben resolver son tan complejos como costosos. Incluso en Inglaterra, en donde llevan cierto adelanto en comparación con Estados Unidos en lo concerniente a la conversión al sistema métrico, el sistema en pulgadas sigue predominando aun en el caso de los engranajes. Merritt afirma que una de las razones es que se acababan de aprobar y adoptar las nuevas normas cuando se inició la instauración del sistema métrico†.

Los addenda incluidos en la tabla 7-1 son para engranes con números de dientes iguales a, o mayores que, los números mínimos enumerados y, para estos números no habrá socavación. Para unos cuantos números de dientes debe usarse una modificación denominada *sistema de addendum largo y corto*. En este sistema, el addendum del engrane se reduce apenas lo suficiente como para asegurar que el contacto no principie antes del punto de interferencia (véase la sección 7-7). Entonces se incrementa el addendum del piñón en una cantidad correspondiente. En esta modificación no hay cambio en el ángulo de presión o en los círculos de paso, de modo que la distancia entre los centros sigue siendo la misma. Lo que se pretende es incrementar la acción de retroceso o alojamiento y reducir la acción de acercamiento.

† Normalizados por la American Gear Manufacturers Association (AGMA) y el American National Standards Institute (ANSI). Las normas AGMA se pueden citar o tomar en su totalidad, a condición de que se dé el crédito apropiado, por ejemplo, "Tomado de *AGMA Information. Sheet—Stenth of Spur, Herringbone, and Bevel Gear Teeth* (AGMA, 225.01), con autorización del editor, la American Gear Manufacturers Association, 1338 Massachusetts Avenue, N.W., Washington, D.C., 2005". Estas normas se han utilizado con amplitud en este capítulo y en el que sigue. En cada caso se cita el número del boletín informativo. La tabla 7-1 se tomó de la publicación 201.02 y 201.02A de la AGMA; pero véase también la 207.04. Es conveniente escribir a la AGMA para obtener una lista completa de normas, debido a los cambios y adiciones que se hacen de tiempo en tiempo.

† H.E. Merritt, Gear Engineering, Wiley, New York, 1971.

Tabla 7-1 Sistemas de dientes norma AGMA y ANSI, para engranes rectosxi

Cantidad	Paso grueso‡ (hasta 20P) altura completa		Paso fino (20P y más) altura completa
Ángulo de presión ϕ	20°	25°	20°
Addendum a	$\frac{1.000}{P}$	$\frac{1.000}{P}$	$\frac{1.000}{P}$
Dedendum b	$\frac{1.250}{P}$	$\frac{1.250}{P}$	$\frac{1.200}{P}$ + 0.002 pulg
Altura de trabajo h_k	$\frac{2.000}{P}$	$\frac{2.000}{P}$	$\frac{2.000}{P}$
Altura completa h_t (mínimo)	$\frac{2.25}{P}$	$\frac{2.25}{P}$	$\frac{2.200}{P}$ + 0.002 pulg
Espesor circular del diente t	$\frac{\pi}{2P}$	$\frac{\pi}{2P}$	$\frac{1.5708}{P}$
Radio del chaflán de la cremallera básica r_f	$\frac{0.300}{P}$	$\frac{0.300}{P}$	No estandarizado
Holgura básica c (mínima)	$\frac{0.250}{P}$	$\frac{0.250}{P}$	$\frac{0.200}{P}$ + 0.002 pulg
Holgura c (dientes cepillados o rectificados)	$\frac{0.350}{P}$	$\frac{0.350}{P}$	$\frac{0.3500}{P}$ + 0.002 pulg
Número mínimo de dientes en el piñón	18	12	18
Número mínimo de dientes por par	36	24	
Anchura mínima del borde superior t_0	$\frac{0.25}{P}$	$\frac{0.25}{P}$	No estandarizado

† Véanse las normas AGMA 201.02, 201.02A

‡ Pero sin incluir a 20P

El dedendum adicional de 0.002 pulg que se da en la tabla 7-1 para los engranes de paso fino, proporciona el espacio suficiente para la acumulación de polvo en las raíces de los dientes.

Las alturas de trabajo indicadas en la tabla 7-1 son para dientes de altura completa y definen a estos; en el caso de dientes truncados, úsese $1.60/P$.

Conviene hacer notar en forma especial que las normas que se dan en la tabla 7-1 *no* tienen por objeto restringir la libertad del diseñador. Las proporciones estándar de los dientes conducen a la intercambiabilidad y a cortadores estándar que resultan económicos; pero la necesidad de engranes de alto rendimiento pueden dictar desviaciones considerables respecto a estos sistemas.

Algunos de los sistemas de dientes que ahora resultan obsoletos son los dos sistemas AGMA de $14\frac{1}{2}°$, de dientes truncados Fellows de 20° y el Brown & Sarpe.

Los sistemas obsoletos no se deben aplicar a diseños nuevos, pero quizá se necesiten como referencia al rediseñar o remodelar maquinarias existentes en las que se usan estos sistemas más anticuados.

Tabla 7-2 Pasos diametrales de uso general

Paso grueso	2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 16
Paso fino	20, 24, 32, 40, 48, 64, 80, 96, 120, 150, 200

Se deben emplear los pasos diametrales listados en la tabla 7-2 siempre que sea posible, con el fin de mantener en un mínimo el inventario de herramientas de corte de engranes.

7-5 FUNDAMENTOS DE LA ACCIÓN DE LOS DIENTES DE ENGRANES

Para ilustrar los fundamentales de los engranes rectos, se procederá, paso a paso, por todo el trazado real de un par de engranes rectos. Las dimensiones usadas se tomarán de la sección 7-4, en donde se incluye la lista de las formas estándar de dientes. Se introducirán y se explicarán nuevos términos conforme se avance en el trazado.

El propósito de un trazado de dientes de engranes *no* es utilizarlo en el taller, sino sólo para el análisis. Para producir grandes cantidades de engranes, lo único que el taller requiere son los dibujos de los discos en blanco, junto con una especificación (no un dibujo) de la forma y tamaño del diente. Por otro lado, si se deben fabricar herramientas para cortar dientes de engranes, es preciso hacer dibujos tanto de la forma como del contorno del diente. En ocasiones, estos dibujos se hacen a una escala muchas veces mayor que el propio diente, para asegurarse de que se pueden obtener dimensiones exactas.

Para la información dada, se seleccionará un piñón de 2 pulg de diámetro y un paso diametral de 10, para impulsar un engrane de 50 dientes. La forma del diente seleccionada es la de 20° de altura completa. En las figuras 7-6 y 7-7 se ilustran los diversos pasos siguiendo el orden correcto, y se describen a continuación.

Paso 1 Calcúlense los diámetros de paso y trácense los círculos de paso tangentes uno al otro (Fig. 7-6). Se usarán los números 2 y 3 como subíndices para designar, respectivamente, al piñón y al engrane. Basándose en la ecuación (7-1), el diámetro de paso del engrane es

$$d_3 = \frac{N_3}{P} = \frac{50}{10} = 5 \text{ pulg}$$

Paso 2 Trácese una recta perpendicular a la línea de los centros que pase el punto de paso (Fig. 7-6). El punto de paso es el de tangencia de los círculos de paso. Trácese la línea de presión a un ángulo igual al de presión, en relación con la per-

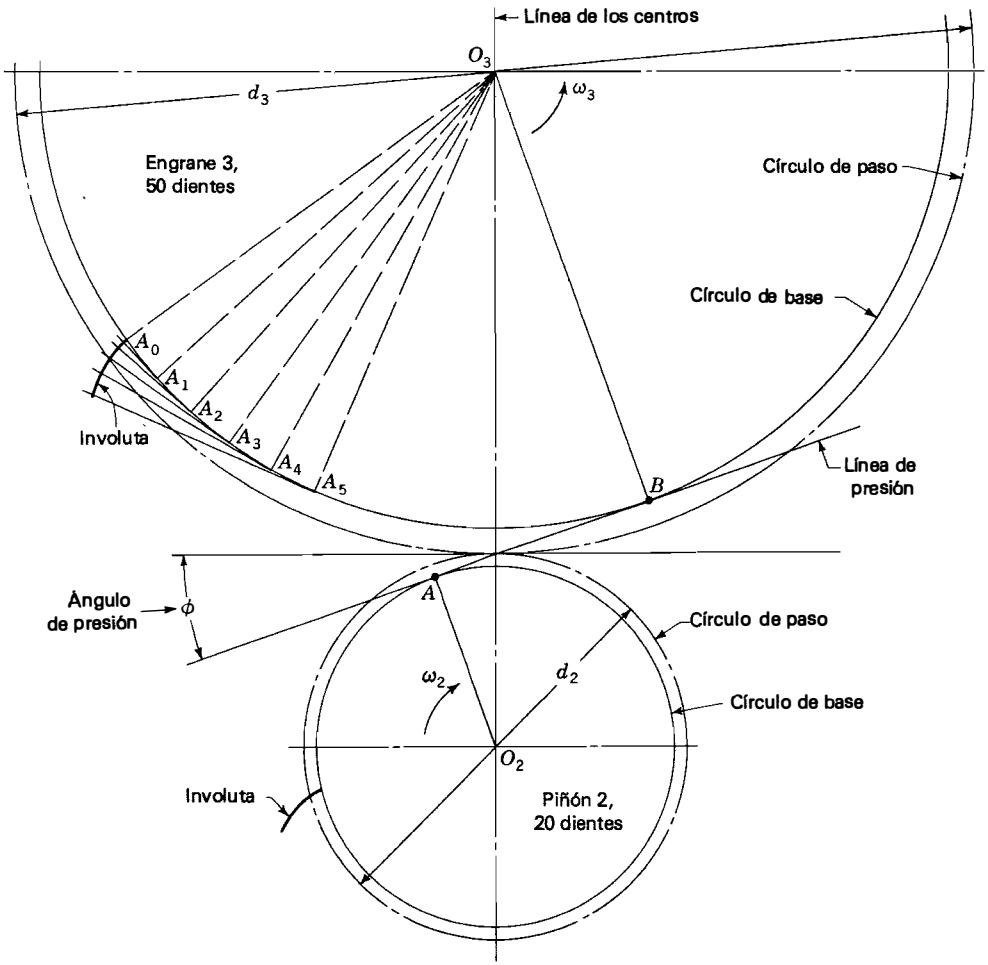


Figura 7-6 Trazado de un par de engranes rectos.

pendicular. La *línea de presión* corresponde a la línea generadora, o sea, la línea de acción definida en las secciones anteriores. Como se muestra, siempre es normal a las involutas en el punto de contacto y pasa por el punto de paso. Se le conoce como línea de presión porque la fuerza resultante del diente durante la acción se ejerce a lo largo de ella. El *ángulo de presión* es aquel que forma la línea de presión con una perpendicular a la línea de los centros que pasa por el punto de paso. En este ejemplo, el ángulo de presión es de 20°.

Paso 3 Por los centros de cada engrane, constrúyanse las perpendiculares O_2A y O_3B a la línea de presión (Fig. 7-6). Estas distancias radicales, de los centros a la línea de presión, son los radios de los dos *círculos de base*. Los círculos de base corres-

ponden a los cilindros de base de la sección 7-3. La curva involuta se origina en estos círculos de base. Trácese cada círculo de base.

Paso 4 Genérese una curva involuta en cada círculo de base (Fig. 7-6). Esto se ilustra en el engrane 3. En primer lugar, divídase el círculo de base en las partes iguales A_0, A_1, A_2, etc. Luego, constrúyanse las rectas radiales O_3A_0, O_3A_1, O_3A_2, etc. A continuación, constrúyanse las perpendiculares a estas rectas radiales. La involuta principia en A_0. El segundo punto se obtiene tomando la distancia A_0A_1 sobre la perpendicular que pasa por A_1. El siguiente punto se encuentra tomando dos veces A_0A_1 sobre la perpendicular que pasa por A_2, y así sucesivamente. La curva construida pasando por estos puntos es la involuta. La involuta para el piñón se traza de la misma manera en el círculo de base del piñón.

Paso 5 Córtese una plantilla para cada involuta usando una cartulina o, de preferencia, una hoja de plástico transparente, y márquese en ella el centro correspondiente de cada engrane. Entonces se usan estas plantillas para dibujar la porción de involuta de cada diente; se pueden voltear para dibujar el lado opuesto del mismo. En algunos casos puede resultar conveniente hacer una plantilla para el diente completo.

Paso 6 Calcúlese el paso circular. La anchura del diente y la del espacio se construyen iguales a la mitad del paso circular. Señálense estas distancias sobre los círculos de paso. Con base en la ecuación (7-3),

$$p_c = \frac{\pi}{P} = \frac{\pi}{10} = 0.314\ 16 \text{ pulg}$$

de tal manera que la anchura del diente y del espacio es (0.314 16)/2, = 0.157 08 pulg. Estos puntos están señalados sobre los círculos de paso de la figura 7-7.

Paso 7 Trácense los círculos de addendum y dedendum para el piñón y el engrane (Fig. 7-7). De la tabla 7-1, el addendum es

$$a = \frac{1}{P} = \frac{1}{10} = 0.10 \text{ pulg}$$

El dedendum es

$$b = \frac{1.25}{P} = \frac{1.25}{10} = 0.125 \text{ pulg}$$

Paso 8 Ahora trácese la porción de involuta de los perfiles de los dientes en el piñón y el engrane (Fig. 7-
entre los círculos de holgura y de dedendum para un chaflán. Nótese que el círculo de base del engrane es menor que el de dedendum y, en vista de ello, el perfil del diente es todo involuta a excepción del chaflán. Por otro lado, el radio del círculo

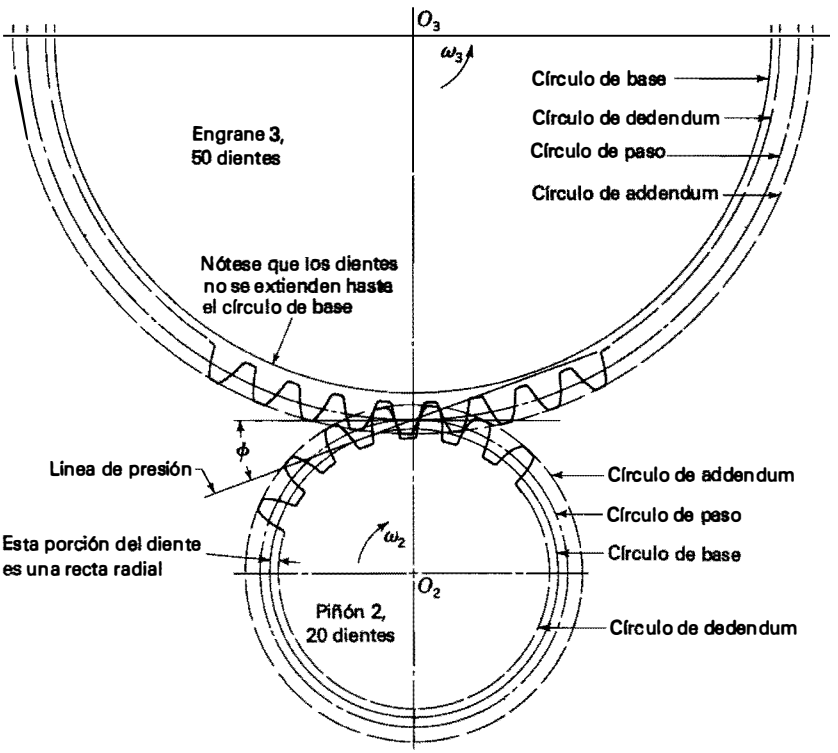


Figura 7-7 Trazado de un par de engranes rectos (*continúa*).

de base del piñón es mayor que el radio del círculo de dedendum. Esto significa que la porción del diente que queda debajo del circulo de base no es involuta. Por ahora, esta porción se trazará como una recta radial, excepto por el chaflán. Con esto se completa la construcción.

Cremallera de involuta Se puede imaginar una *cremallera* como un engrane de dientes rectos que posee un diámetro de paso infinitamente grande. Por lo tanto, la cremallera tiene un número infinito de dientes y, también, el círculo de base se localiza a una distancia infinita del punto de paso. En el caso de los dientes de involuta, los lados se convierten en rectas que forman un ángulo con la línea de los centros igual al ángulo de presión. En la figura 7-8 se ilustra una cremallera de involuta engranada con el piñón del ejemplo anterior.

Paso de base Los lados correspondientes de los dientes de involuta son curvas paralelas; el *paso de base* es la distancia constante y fundamental entre ellos, a lo largo de una normal común (Fig. 7-8). El paso de base y el paso circular se rela-

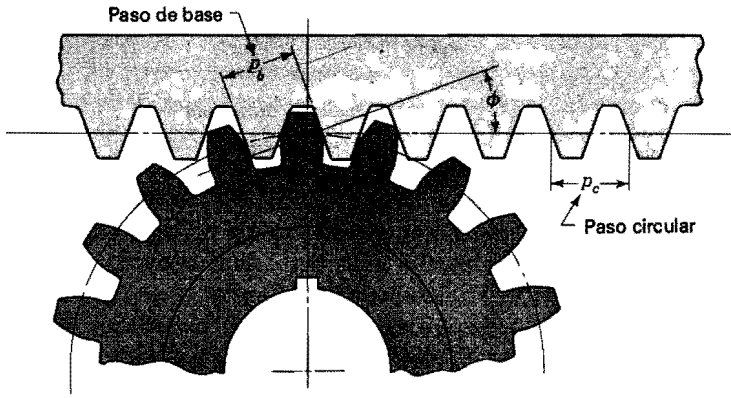


Figura 7-8 Piñón y cremallera de involuta.

cionan como se indica a continuación,

$$\frac{p_b}{p_c} = \cos \phi \tag{7-5}$$

en donde p_b es el paso de base y p_c es el paso circular. Ya se explicó que el paso circular es la distancia entre los dientes medida a lo largo del círculo de paso. El paso de base es una medida mucho más básica puesto que se trata de la distancia entre dientes medida a lo largo de la normal común, al igual que la distancia entre dientes medida a lo largo del círculo de base.

Engrane interno En la figura 7-9 se presenta el piñón del ejemplo anterior acoplado con un engrane *interno* o *anular*. Cuando se trata de un contacto interno, los

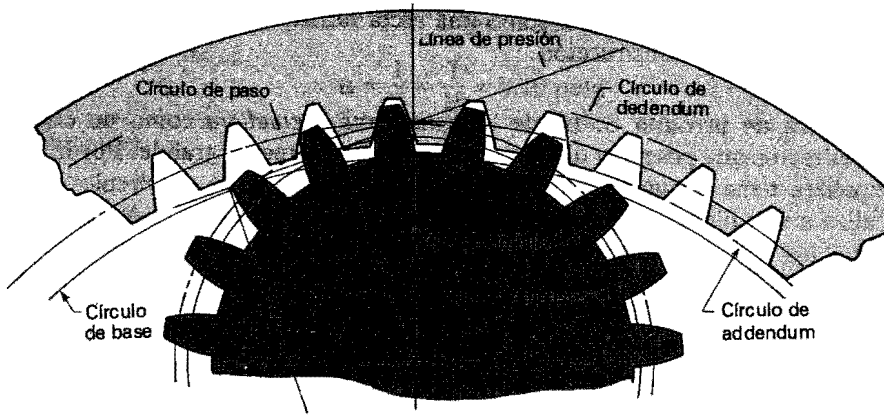


Figura 7-9 Engrane y piñón interiores.

dos centros se encuentran del mismo lado del punto de paso; de donde, se invierten las posiciones de los círculos de addendum y dedendum con respecto al círculo de paso. Como se muestra en la figura 7-9, el círculo de addendum del engrane interno queda *dentro* del círculo de paso; de la misma manera, el círculo de dedendum queda afuera del círculo de paso.

En la figura 7-9 se observa también que el círculo de base está dentro del círculo de paso, cerca del de addendum.

7-6 FORMACIÓN DE LOS DIENTES DE ENGRANES

Existen muchas maneras de darle forma a los dientes de los engranes, por ejemplo *fundición en moldes de arena, vaciado en cascarón, fundición revestida, fundición en molde permanente, fundición a troquel o fundición centrifugada.* Se pueden formar, aplicando el *proceso de metalurgia de polvos*, o bien, por *extrusión*, en donde a una sola barra de aluminio se le puede dar la forma y luego se rebana para obtener los engranes. Los engranes que soportan grandes cargas en comparación con su tamaño se fabrican casi siempre de acero y se cortan ya sea con *cortadores de forma* o con *cortadores generadores*. En el corte de forma, el espacio entre dientes toma la forma exacta del cortador. En el generador, una herramienta que tiene una forma diferente a la del perfil del diente se mueve en relación con el disco en blanco para obtener la forma apropiada del diente.

Probablemente el método más antiguo para cortar dientes de engrane es el *fresado*. Se usa una fresa que corresponde a la forma del espacio entre dientes para cortar un espacio a la vez, después de lo cual el engrane se hace girar un paso circular hasta la siguiente posición. Con este método, teóricamente se necesita un cortador diferente para cada engrane que se debe cortar porque, por ejemplo, la forma del espacio en un engrane de 25 dientes es diferente, póngase por caso, del que corresponde a un engrane de 24 dientes. En realidad, el cambio en el espacio no es demasiado grande y se pueden utilizar ocho cortadores para cortar cualquier engrane dentro de la gama de 12 dientes hasta una cremallera, con una exactitud razonable. Por supuesto, se requiere un juego por separado de cortadores para cada paso.

El *limado* es uno de los métodos más favorecidos para generar dientes de engranes. La herramienta cortadora puede ser un cortador de cremallera o un cortador de piñón. La operación se explica mejor con referencia a la figura 7-10. En este caso, el cortador de cremallera de movimiento alternativo se alimenta primero hacia el disco en blanco hasta que los círculos de paso son tangentes. Luego, después de cada carrera de corte, el disco en blanco y el cortador ruedan ligeramente sobre sus círculos de paso. Cuando el disco en blanco y el cortador han girado una distancia igual al paso circular, el cortador se regresa al punto de partida y el proceso se continúa hasta que se han cortado todos los dientes.

El *fresado con fresa maestra* es un método de generar dientes de engranes muy similar al del cortador de cremallera. La fresa maestra es un cortador cilíndrico

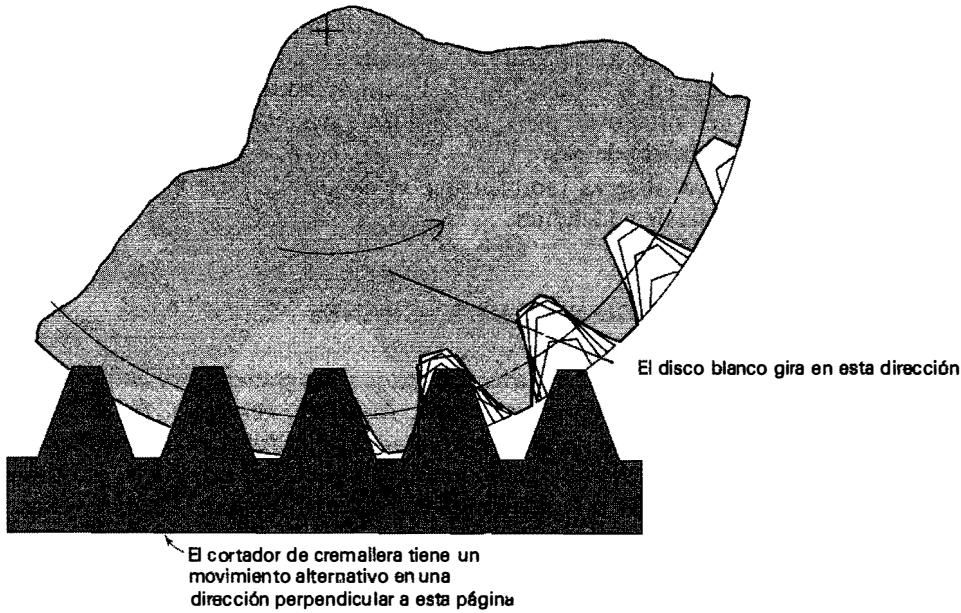


Figura 7-10 Cepillado de los dientes con un cortador de cremallera.

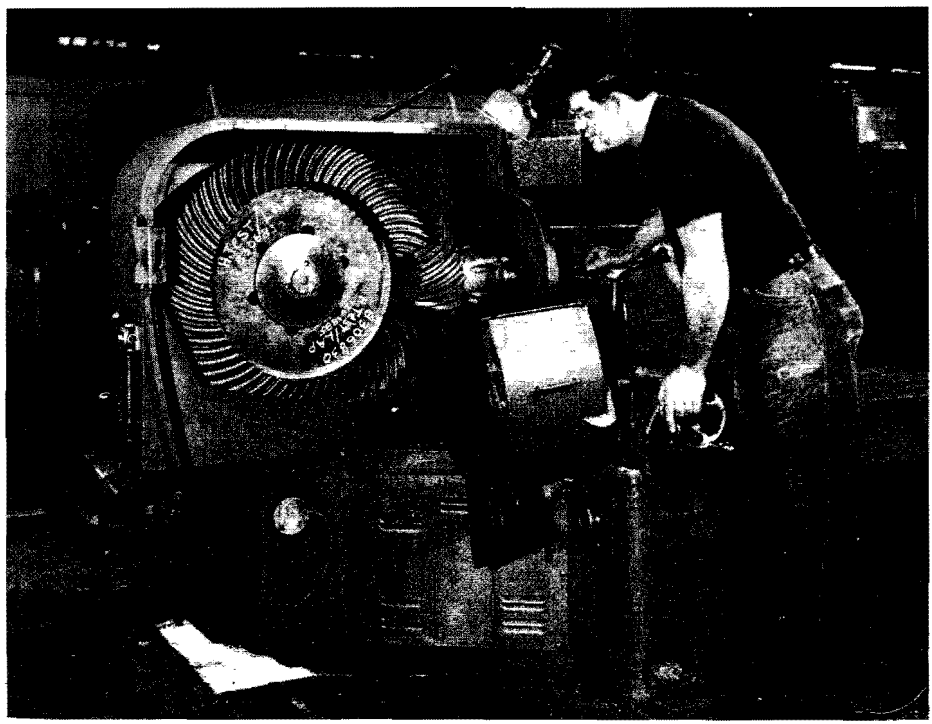


Figura 7-11 Pulido de engranes cónicoespirales. (*The Falk Corporation, Subsidiaria de Sunstrand Corporation, Milwaukee, Wis.*)

con una o más roscas helicoidales muy semejante a un macho de tornillo, y tiene lados rectos como una cremallera. La fresa maestra y el disco en blanco se hacen girar continuamente con una razón apropiada de velocidades angulares, y entonces se alimenta lentamente la fresa maestra a través de la cara del disco en blanco, desde un extremo del diente hasta el otro.

Después del proceso de maquinado, con frecuencia se aplican métodos de acabado tales como el *rectificado, pulido, cepillado* y *bruñido*, cuando es necesario producir perfiles de dientes de gran precisión y con superficies bien acabadas. En la figura 7-11 se ilustra el proceso de pulido.

7-7 INTERFERENCIA Y SOCAVACIÓN

En esta etapa de la exposición resultará muy beneficioso seguir la acción de un par de dientes desde que entran en contacto hasta que se separan. En la figura 7-12 se han reproducido los círculos de paso de los engranes de la sección 7-5. Supóngase que el piñón es el impulsor y que gira en el mismo sentido del movimiento de las

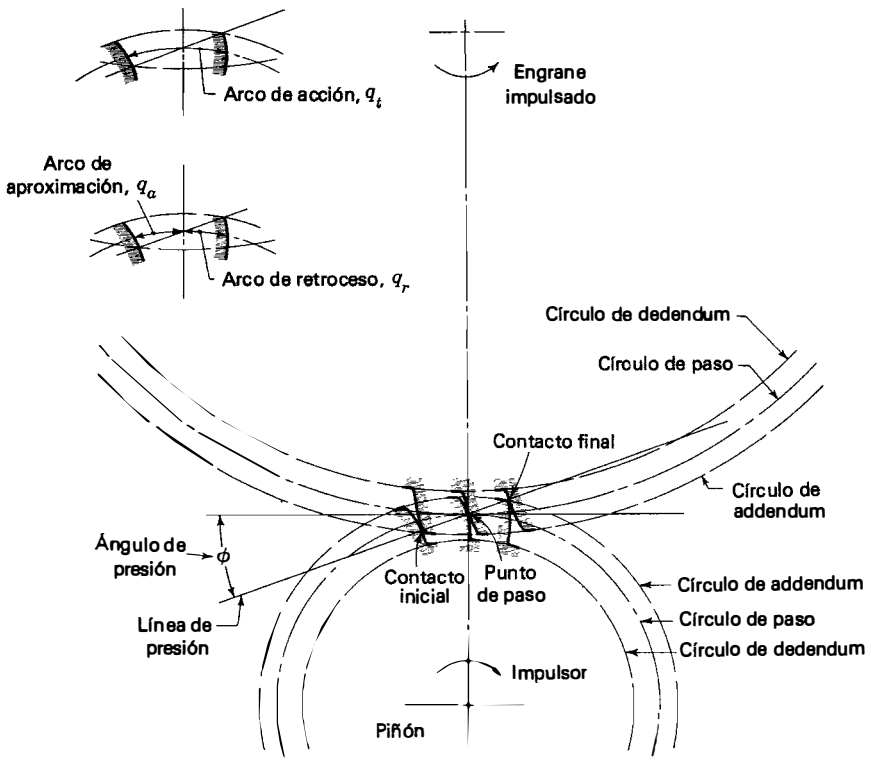


Figura 7-12 Fases de aproximación y retroceso de la acción de los dientes de engrane.

manecillas del reloj. El problema es localizar los puntos inicial y final de contacto conforme un par de dientes acoplados realizan el ciclo de endentamiento.

Para resolver el problema se traza la línea de presión y los círculos de addendum y dedendum de ambos engranes. Para los dientes de involuta, se ha visto que el contacto se debe llevar a cabo a lo largo de la línea de presión. Esto explica por qué a esa línea también se le da el nombre de línea de acción. Como se ilustra en la figura, el contacto principia en donde el círculo de addendum del engrane impulsado cruza la línea de acción. Por consiguiente, el contacto inicial se efectúa en la punta del diente del engrane y sobre el flanco blanco del diente del piñón.

Conforme el diente del piñón impulsa al diente del engrane, ambos se acercan al punto de paso; cerca de éste, el contacto se *desliza hacia arriba* por el flanco del diente del piñón y *hacia abajo* por la cara del diente del engrane. En el punto de paso, el contacto se produce en los círculos de paso. Nótese que el movimiento es un rodamiento puro sólo en el punto de paso.

Conforme el diente se aleja o retrocede del punto de paso, el punto de contacto se desplaza en la misma dirección que antes. El contacto se *desliza hacia arriba* por la cara del diente del piñón y *hacia abajo* por el flanco del diente del engrane. El último punto de contacto se presenta en la punta del diente del piñón y el flanco del diente del engrane. Esto se localiza en la intersección de la línea de acción y el círculo de addendum del piñón.

La fase de *aproximación* o *acercamiento* de la acción es el periodo comprendido entre el contacto inicial y el punto de paso. Durante la fase de acercamiento, el contacto es un deslizamiento hacia abajo por la cara del diente del engrane hacia el círculo de paso. Esta clase de acción puede compararse a *empujar* una vara sobre una superficie.

En el punto de paso no se produce deslizamiento y la acción es rodamiento puro.

La fase de *retroceso* o *alejamiento* de la acción es el periodo comprendido entre el contacto en el punto de paso y el contacto final. Durante la fase de retroceso, el contacto es un deslizamiento hacia abajo por el flanco del diente del engrane, alejándose del círculo de paso. Esta clase de acción se puede comparar a *tirar* de una vara sobre una superficie.

Ahora se construyen los perfiles de los dientes del piñón y del engrane pasando por los puntos de contacto inicial y final de la figura 7-12. La intersección de estos perfiles con los círculos de paso define los arcos de acción, aproximación y retroceso.

El *arco de acción* q_t es el arco del círculo de paso por el que se mueve un perfil de diente, desde el principio hasta el final del contacto con un perfil acoplado.

El *arco de aproximación* o *acercamiento* q_a es el arco del círculo de paso por el que se mueve un perfil de diente, desde que se inicia el contacto hasta que el punto de contacto llega al punto de paso.

El *arco de retroceso* o *alojamiento* q_r es el arco del círculo de paso por el que se mueve un perfil de diente, desde el contacto en el punto de paso hasta que concluye dicho contacto.

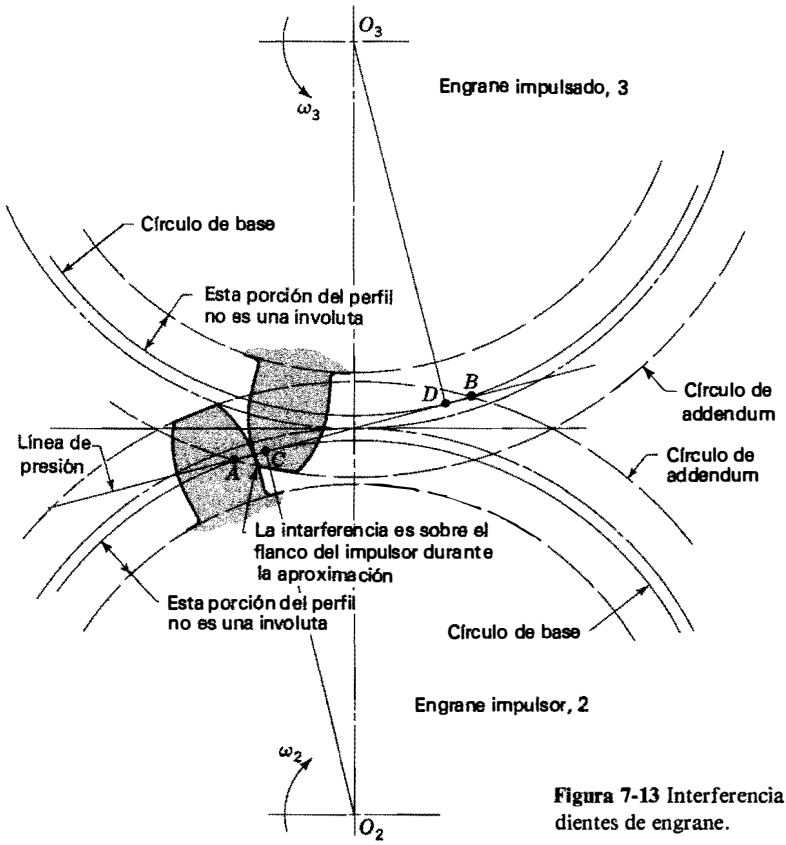


Figura 7-13 Interferencia en la acción de los dientes de engrane.

El contacto de porciones de perfiles de diente que no son conjugados se conoce con el nombre de *interferencia*. Considérese la figura 7-13. En ella se ilustran dos engranes de 16 dientes con un ángulo de presión de $14\frac{1}{2}°$, con dientes de altura completa. El impulsor, de engrane 2, gira en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Los puntos inicial y final de contacto se designan con A y B, respectivamente, y se localizan sobre la línea de presión. Nótese ahora que los puntos de tangencia de la línea de presión con los círculos de base C y D se localizan *dentro* de los puntos A y B. Existe interferencia.

La interferencia se explica como sigue. El contacto principia cuando la punta del diente impulsado hace contacto con el flanco del diente impulsor. En este caso, el flanco del diente impulsor entra primero en contacto con el diente impulsado en el punto A, y esto ocurre *antes* de que la porción de involuta del diente impulsor quede dentro de alcance. En otras palabras, se está produciendo el contacto por debajo del círculo de base del engrane 2, sobre la porción de *no involuta* del flanco. El efecto real es que la punta o cara de involuta del engrane impulsado tiende a socavar el flanco de no involuta del impulsor.

En este ejemplo ocurre el mismo efecto cuando los dientes rompen el contacto. El contacto debe concluir en el punto D o antes. Puesto que no concluye sino hasta el punto B, el efecto es que la punta del diente impulsor socava el flanco del diente impulsado, o interfiere con él.

Cuando los dientes del engrane se producen mediante un proceso de generación, la interferencia se elimina automáticamente debido a que la herramienta de corte elimina la porción del flanco que produce la interferencia. Este efecto recibe el nombre de *socavación*; si la socavación es pronunciada, el diente socavado se debilita considerablemente. Por tanto, el efecto de eliminar la interferencia por un proceso de generación se reduce sencillamente a sustituir un problema por otro.

No se puede exagerar la importancia del problema de los dientes que se han debilitado por socavación. Por supuesto, se puede eliminar la interferencia utilizando más dientes en los engranes; sin embargo, si éstos deben transmitir una cantidad determinada de potencia, sólo se puede usar un mayor número de dientes incrementando el diámetro de paso. Esto hace que los engranes sean más grandes, lo que rara vez se considera conveniente, y también aumenta la velocidad de la línea de paso. Este incremento en la velocidad de la línea de paso hace que los engranes sean más ruidosos y reduce un tanto la transmisión de potencia, aunque no en razón directa. Sin embargo, en general, el uso de más dientes para eliminar la interferencia o la socavación raramente se considera como solución aceptable.

Otro método para reducir la interferencia y el grado resultante de socavación es emplear un mayor ángulo de presión. Esto crea un círculo de base más pequeño, de modo que una mayor porción del perfil del diente tiene forma de involuta. En efecto, esto significa que se pueden usar menos dientes y, como resultado, los engranes con mayor ángulo de presión son más pequeños.

7-8 RAZÓN DE CONTACTO

En la figura 7-14 se muestra la zona de acción de los dientes de engrane endentados, en donde el contacto del diente principia y concluye en las intersecciones de

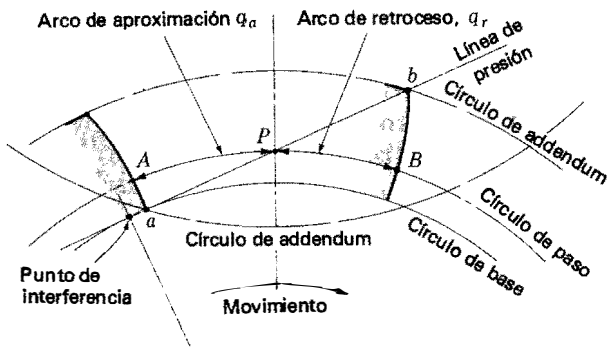


Figura 7-14

los dos círculos de addendum con la línea de presión. En la figura 7-14, el contacto inicial ocurre en a y el contacto final en b. Los perfiles de diente que pasan por estos puntos se intersecan con el círculo de paso en A y B, respectivamente. Como se indica, la distancia AP es el arco de aproximación q_a y la distancia PB, es el arco de retroceso q_r, la suma de éstos da el arco de acción q_t.

Considérese una situación en la que el arco de acción es exactamente igual al paso circular; es decir, $q_t = p_c$. Esto significa que un diente y su espacio ocuparán la totalidad del arco AB. Dicho de otra manera, cuando un diente entra apenas en contacto en a, el diente anterior está finalizando simultáneamente su contacto en b. Por ende, durante la acción del diente, desde a hasta b, habrá exactamente un par de dientes en contacto.

A continuación, considérese una situación en la que el arco de acción es mayor que el paso circular; pero no mucho mayor, por ejemplo $q_t \approx 1.2p_c$. Esto significa que cuando un par de dientes está entrando apenas en contacto en a, el par anterior, ya en contacto, todavía no habrá llegado a b. Por consiguiente, durante un breve lapso se tendrán dos pares de dientes en contacto, uno en la cercanía de A y el otro cero de B. Conforme avanza el endentamiento, el par cercano a B debe cesar el contacto, quedando un solo par tocándose, hasta que el proceso se repite.

Debido a la naturaleza de esta acción de los dientes (uno, dos, o incluso más pares de dientes en contacto), conviene definir el término *razón de contacto* m_c como

$$m_c = \frac{q_t}{p_c} \tag{7-6}$$

un número que indica el número promedio de pares de dientes en contacto.

La ecuación (7-6) resulta un tanto inconveniente, a menos que se trace un dibujo semejante al de la figura 7-14, de tal modo que se puedan medir las distancias q_a y q_r. Estas distancias dependen de los diámetros de los círculos de paso, que pueden variar, ya que a su vez dependen de la distancia de montaje entre los dos centros de los engranes. Asimismo, se puede definir la razón de contacto utilizando el círculo de base, y ésta será en realidad una mejor definición porque el círculo de base tiene un diámetro fijo.

En la figura 7-15, en donde se presenta al engrane 2 como el impulsor, el contacto principia en el punto B, en donde el círculo de addendum del engrane impulsado cruza la línea de acción, y concluye en C, en donde el círculo de addendum del impulsor cruza la línea de acción. La longitud de la trayectoria de contacto es

$$u = u_a + u_r \tag{a}$$

en donde los subíndices a y r designan las fases de aproximación y retroceso, respectivamente. Durante la aproximación el contacto se produce a lo largo de la recta BC y el engrane gira describiendo el ángulo α, conocido como *ángulo de aproximación. Este ángulo subtiende un arco del círculo de base obtenido construyendo los perfiles de diente por B y P, para intersecarse con el círculo de base.*

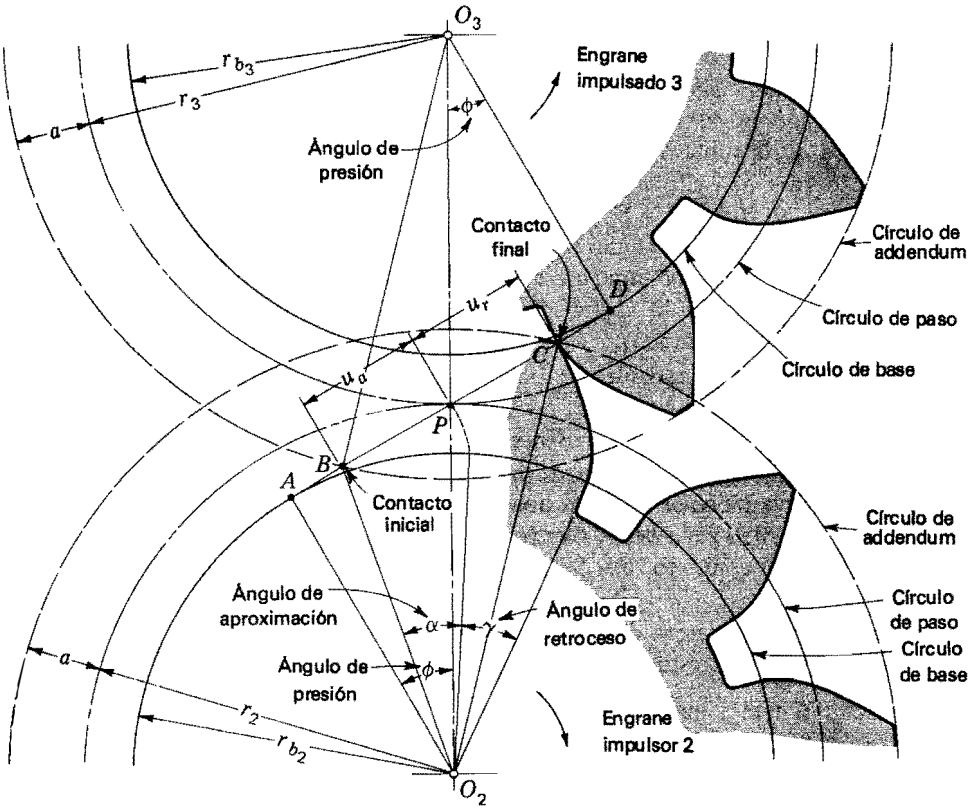


Figura 7-15

Durante el retroceso, el contacto ocurre a lo largo de PC, mientras el engrane gira describiendo el ángulo γ, llamado *ángulo de retroceso*. Nótese que este ángulo subtiende también un arco del círculo de base, obtenido al determinar la intersección de los perfiles de diente que pasan por P y C con el círculo base.

El paso de base es la distancia entre los perfiles de diente correspondientes, medida sobre la línea de acción. Por lo tanto, la razón de contacto es

$$m_c = \frac{u_a + u_r}{p_b} \tag{7-7}$$

Los valores de u_a y u_b se pueden obtener analíticamente, observando los dos triángulos rectángulos O_2AC y O_3DB de la figura 7-15. Partiendo del triángulo O_2AC, se puede escribir

$$u_a = [(r_3 + a)^2 - r_{b_3}^2]^{1/2} - r_3 \sin \theta \tag{7-8}$$

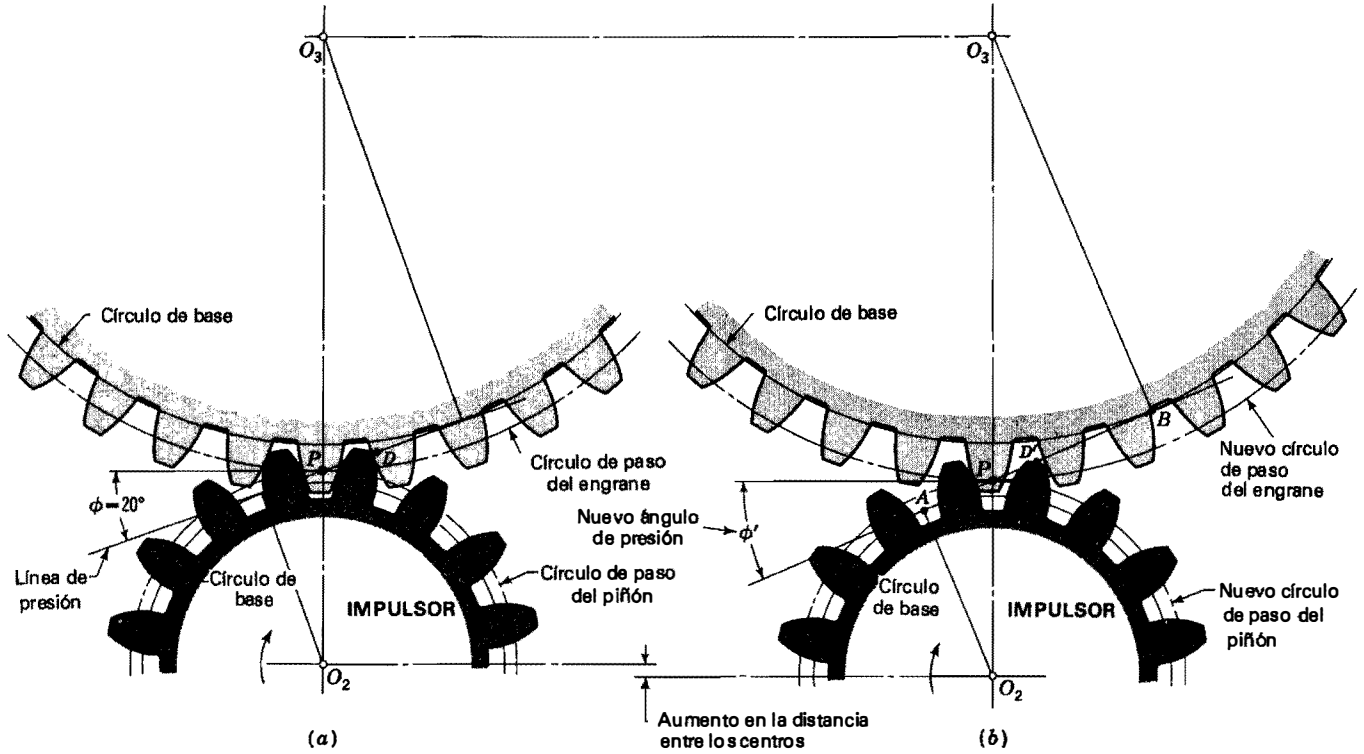


Figura 7-16 Efecto de la distancia aumentada entre los centros sobre la acción del engranaje de involuta: montaje a *a*) una distancia normal entre los centros y *b*) una distancia aumentada entre los centros.

Del mismo modo, basándose en el triángulo O_2AC, se tiene

$$u_r = [(r_2 + a)^2 - r_{b_2}^2]^{1/2} - r_2 \operatorname{sen} \phi \tag{7-9}$$

Entonces la razón de contacto se obtiene al sustituir las ecuaciones (7-8) y (7-9) en la (7-7). Sin embargo, se podría observar que las ecuaciones (7-8) y (7-9) sólo son válidas para las condiciones

$$u_a \leq r_2 \operatorname{sen} \phi \qquad u_r \leq r_3 \operatorname{sen} \phi \tag{7-10}$$

porque el contacto no se puede iniciar antes del punto A (Fig. 7-15) o concluir después del punto D. Por tanto, si el valor de u_a o u_r, como se calculan mediante la (7-8) o la (7-9) no satisface las desigualdades de la (710), será preciso utilizar la (7-10) para calcular u_a o u_r, según sea el caso, usando el signo de igualdad.

La razón de contacto más grande posible se obtiene ajustando los addenda de cada engrane, de tal suerte que se utilice la distancia AD completa (Fig. 7-15). Luego, la acción se define mediante los triángulos O_2AD y O_3AD. Por lo tanto,

$$a_2 = [r_{b_2}^2 + (r_2 + r_3)^2 \operatorname{sen}^2 \phi]^{1/2} - r_2 \tag{7-11}$$

$$a_3 = [r_{b_3}^2 + (r_2 + r_3)^2 \operatorname{sen}^2 \phi]^{1/2} - r_3 \tag{7-12}$$

como los addenda a_2 y a_3, respectivamente, de los engranes 2 y 3. Si se excede cualquiera de estos addenda, o ambos, se producirá socavación durante la generación de los perfiles.

7-9 VARIACIÓN DE LA DISTANCIA ENTRE CENTROS

En la figura 7-16*a* se ilustra un par de engranes acoplados que tienen dientes de involuta, a un ángulo de presión de 20°. Puesto que ambos lados de los dientes están en contacto, no se puede acortar la distancia entre los centros O_2O_3 sin trabarlos o deformarlos.

En la figura 7-16*b*, se han separado el mismo par de engranes incrementando ligeramente la distancia entre los centros. Ahora, como se indica, existe una holgura o *juego* entre los dientes. Cuando se aumenta la distancia entre los centros, se crean nuevos círculos de paso que tienen radios mayores, en virtud de que tales círculos son siempre tangentes el uno al otro. No obstante, los círculos de base son una característica constante y fundamental de los engranes. Esto significa que un aumento en la distancia entre los centros cambia la inclinación de la línea de acción y da por resultado un ángulo de presión más grande. Se observará también que un punto trazador de la nueva línea de presión todavía generará las mismas involutas que se presentaron en la figura 7-16*a*, la normal a los perfiles de los dientes aún pasa por el mismo punto de paso y, por ende, la ley del engranaje se satisface para cualquier distancia entre los centros.

Para corroborar que la razón de velocidades no ha cambiado de magnitud, se observa que los triángulos O_2AP y O_3BP son semejantes. Asimismo, puesto que

O_2A y O_3B son distancias fijas y no varían al alterarse las distancias entre los centros, la razón de los radios de paso, O_2P y O_3P, se mantendrá fija también.

Otro de los efectos que se originan al aumentar la distancia entre los centros, que se puede observar en la figura 7-16, es el acortamiento de la trayectoria de contacto. La trayectoria original de contacto CD se ha acortado hasta $C'D'$. La razón de contacto [Ec. (7-7)]se puede definir como la razón de la longitud de la trayectoria de contacto al paso de base. El valor límite de esta razón es la unidad; de lo contrario, se presentarían periodos en los que no existiría contacto en lo absoluto. Así pues, la distancia entre los centros no puede ser mayor que la que corresponde a una razón de contacto igual a la unidad.

Resulta interesante concluir, en virtud de la exposición anterior, que se pueden montar sobre el mismo eje dos engranes con números de dientes ligeramente diferentes (aunque no fijos entre sí o al eje) y acoplarse con el mismo piñón o la misma cremallera, a condición de que no se excedan las limitaciones analizadas.

7-10 INVOLUTOMETRÍA

El estudio de la geometría de la involuta recibe el nombre de *involutometría*. En la figura 7-17 se utiliza un círculo de base, cuyo centro se localiza en O, para generar la involuta BC. AT es la línea generadora, ρ el radio instantáneo de curvatura de la involuta y r el radio a cualquier punto T de la curva. Si el radio de círculo de base se designa como r_b, la recta generadora AT tiene la misma longitud que el arco AB; de donde,

$$\rho = r_b(\alpha + \varphi) \qquad (a)$$

en donde α es el ángulo comprendido entre los radiovectores que definen el origen de la involuta y cualquier punto, como por ejemplo, T, sobre la involuta, y φ es el ángulo comprendido entre los radiovectores que definen a cualquier punto T de la involuta y el origen A en el círculo de base de la línea generadora correspon-

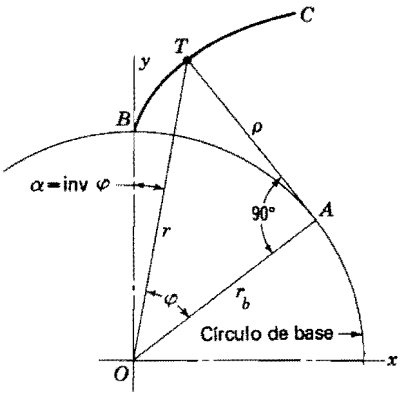


Figura 7-17

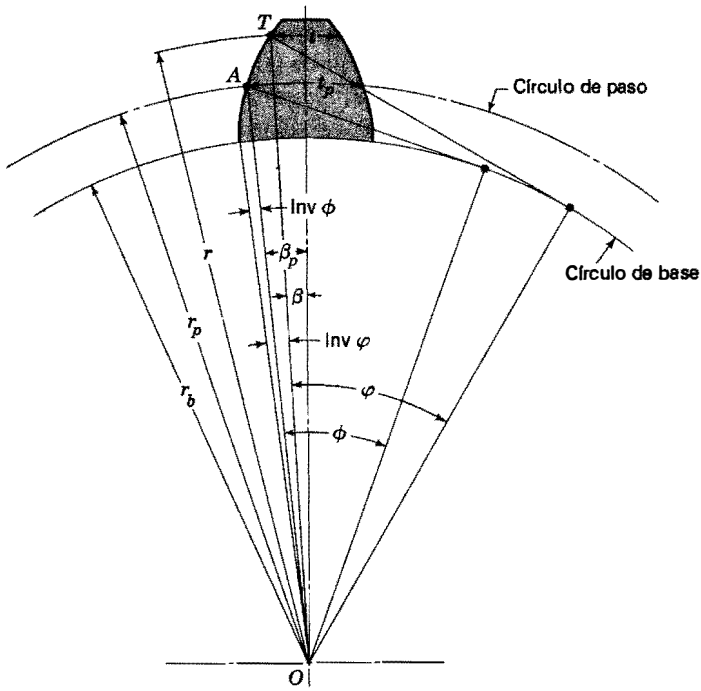


Figura 7-18

diente. Puesto que *OTA* es un triángulo rectángulo,

$$\rho = r_b \tan \varphi \tag{7-13}$$

Al resolver las ecuaciones (*a*) y (7-13) en forma simultánea para eliminar a ρ se obtiene

$$\alpha = \tan \varphi - \varphi$$

que se puede escribir

$$\text{inv } \varphi = \tan \varphi - \varphi \tag{7-14}$$

y define la función involuta. El ángulo φ en esta ecuación es el ángulo de presión variable de la involuta, y se debe expresar en radianes. Si se conoce φ, inv φ se puede determinar fácilmente; pero será necesario usar tablas para encontrar el ángulo de presión cuando se da inv φ y se debe determinar φ (véase la tabla 6 del apéndice).

Haciendo nuevamente referencia a la figura 7-17, es evidente que

$$r = \frac{r_b}{\cos \varphi} \tag{7-15}$$

Para ilustrar el uso de las relaciones antes obtenidas, se determinarán las dimensiones del diente de la figura 7-18. En este caso, se ha trazado la porción del perfil de diente que se extiende por encima del círculo de base, y se da el espesor del diente a lo largo del arco, t_p, en el círculo de paso (punto A). El problema consiste en determinar el espesor del diente en cualquier otro punto, póngase por caso, T. Las diferentes cantidades señaladas en la figura 7-18 se definen como sigue:

r_b = radio del círculo de base
r_p = radio del círculo de paso
r = radio en el que se va a determinar el espesor del diente
t_p = espesor del diente a lo largo del arco, en el círculo de paso
t = espesor a lo largo del arco que se va a determinar
ϕ = ángulo de presión correspondiente al radio de paso r_p
φ = ángulo de presión correspondiente a cualquier punto T
β_p = espesor angular de medio diente en el círculo de paso
β = espesor angular de medio diente en cualquier punto T

Los espesores de medio diente en los puntos A y T son

$$\frac{t_p}{2} = \beta_p r_p \qquad \frac{t}{2} = \beta r \tag{b}$$

de tal manera que

$$\beta_p = \frac{t_p}{2r_p} \qquad \beta = \frac{t}{2r} \tag{c}$$

Ahora se puede escribir

$$\text{inv } \varphi - \text{inv } \phi = \beta_p - \beta = \frac{t_p}{2r_p} - \frac{t}{2r} \tag{d}$$

El espesor del diente correspondiente a cualquier punto T se obtiene resolviendo la (*d*) para t:

$$t = 2r\left(\frac{t_p}{2r_p} + \text{inv } \phi - \text{inv } \varphi\right) \tag{7-16}$$

Ejemplo 7-1 Un engrane tiene dientes de 30° cortados a altura completa, un paso diametral de 2 dientes por pulgada y cuenta con 22 dientes. *a*) Calcúlese el radio del círculo de base. *b*) Determínese el espesor del diente en el círculo de base y también en el de addendum.

SOLUCION Basándose en lo visto en la sección 7-4 y aplicando las ecuaciones de la sección 7-1, se determinan las siguientes cantidades: addendum $a = 0.500$ pulg, dedendum $b = 0.5785$ pulg, radio de paso $r_p = 5.500$ pulg, paso circular $p_c = 1.571$ pulg. El radio del círculo de base se obtiene aplicando la (7-15)

$$r_b = r_p \cos \phi = 5.500 \cos 20° = 5.168 \text{ pulg}$$

El espesor del diente en el círculo de paso es

$$t_p = \frac{p_c}{2} = \frac{1.571}{2} = 0.785\,4 \text{ pulg}$$

Al convertir el ángulo de presión de 20° del diente a radianes da $\phi = 0.349$ rad. Luego,

$$\text{inv } \phi = \tan 0.349 - 0.349 = 0.015 \text{ rad}$$

En el círculo de base, $\varphi_b = 0$, de manera que inv $\varphi_b = 0$. Según la (7-16), el espesor del diente en el círculo de base es

$$t_b = 2r_b\left(\frac{t_p}{2r_p} + \text{inv } \phi - \text{inv } \varphi_b\right) = (2)(5.168)\left[\frac{0.785\,4}{(2)(5.500)} + 0.015 - 0\right] = 0.886 \text{ pulg}$$

El radio del círculo de addendum es $r_a = 6.000$ pulg. Según la (7-15), el ángulo de presión de la involuta correspondiente a este radio es

$$\varphi_a = \cos^{-1}\frac{r_b}{r_a} = \cos^{-1}\frac{5.168}{6.000} = 0.532 \text{ rad}$$

De donde,

$$\text{inv } \varphi_a = \tan 0.532 - 0.532 = 0.058 \text{ rad}$$

y la ecuación (7-16) da el espesor del diente en el círculo de addendum como

$$t_a = 2r_a\left(\frac{t_p}{2r_p} + \text{inv } \phi - \text{inv } \varphi_a\right) = (2)(6.000)\left[\frac{0.785\,4}{(2)(5.500)} + 0.015 - 0.058\right] = 0.341 \text{ pulg}$$

7-11 DIENTES NO ESTÁNDAR DE ENGRANES

En esta sección se investigarán los efectos provocados al modificar aspectos tales como el ángulo de presión, la altura del diente, el addendum o la distancia entre los centros. Algunas de estas modificaciones no anulan la intercambiabilidad; todas ellas se realizan con el propósito de obtener un funcionamiento mejorado o una producción más económica.

Hay tres razones principales para utilizar dientes no estándar. Sucede muy a menudo que el diseñador se encuentra bajo gran presión para producir diseños de engranes pequeños y, al mismo tiempo, que transmitan grandes cantidades de potencia. Por ejemplo, considérese una combinación de engranes que deba tener una razón de velocidades 4:1. Si el piñón más pequeño que llevará la carga tiene un diámetro de paso de 2 pulg, el engrane tendrá un diámetro de paso de 8 pulg, lo que hace que el espacio global necesario para los dos engranes sea ligeramente mayor que 10 pulg. Por otro lado, si el diámetro de paso del piñón se puede reducir en sólo 1/4 pulg, el diámetro de paso del engrane se reduce en una pulgada completa y el tamaño global de la combinación de engranes se reduce en 1 $1\frac{1}{4}$ pulg. Esta reducción adquiere una importancia considerable cuando uno se percata de que las dimensiones de los elementos de máquina asociados, tales como ejes, cojinetes y cubiertas se reducen también. Si necesita un diente de un paso en particular para transmitir la carga, el único método para reducir el diámetro del piñón es emplear menos dientes. Se vio con anterioridad que se presentan problemas

relacionados con interferencia, socavación y la razón de contacto cuando los números de dientes se hacen menores que los mínimos prescritos. Por consiguiente, las principales razones para usar engranes no estándar son eliminar la socavación, evitar la interferencia y mantener una razón de contacto aceptable. También conviene observar que si se fabrica un par de engranes con el mismo material, el piñón es el más débil y está sujeto a un desgaste mayor porque sus dientes están en contacto una mayor porción del tiempo. Por lo tanto, la socavación debilita al diente que ya es de sí el menos fuerte de los dos. De donde, otra ventaja de los engranes no estándar es la tendencia a obtener un mejor equilibrio de la resistencia entre el piñón y el engrane.

Conforme una curva involuta se genera a partir del círculo de base, su radio de curvatura se hace cada vez más grande. Cerca del círculo de base, el radio de curvatura es muy pequeño y es exactamente cero en dicho círculo. De ser posible, conviene evitar cualquier contacto cerca de esta región de curvatura marcada, debido a la dificultad para obtener una exactitud aceptable en el corte, en zonas de pequeña curvatura y, al mismo tiempo, porque los esfuerzos de contacto tienden a ser muy elevados. Los engranes no estándar ofrecen la oportunidad de hacer diseños que eviten estas zonas sensibles.

Modificaciones de la holgura Un chaflán de mayor tamaño en la raíz del diente aumenta la resistencia a la fatiga del mismo y le da mayor altura para el cepillado de su perfil. Puesto que no se pierde la intercambiabilidad, a veces se incrementa la holgura o claro hasta $0.400/P$ para obtener este chaflán mayor.

En algunas aplicaciones se ha usado un ángulo de presión 17 $17\frac{1}{2}^{\circ}$ con una holgura de $0.300/P$ para producir una razón de contacto de 2.

Modificaciones de la distancia entre los centros Cuando se deben acoplar engranes con números bajos de dientes o cuando es preciso hacerlo con engranes de mayor tamaño, se puede obtener cierta reducción en la interferencia y una mejora en la razón de contacto, aumentando la distancia entre los centros. Aunque este sistema cambia las proporciones del diente y el ángulo de presión de los engranes, los dientes resultantes se pueden producir con cortadores de cremallera (o fresas maestras) cuando la línea de paso de la cremallera se ha desplazado o descentrado una distancia e en relación con el círculo de paso del engrane. Lo que se está haciendo en este caso es desplazar el cortador de cremallera, alejándolo más del centro del engrane que se está cortando. Esto producirá dientes más gruesos que antes y es preciso calcular este espesor. En la figura 7-19*a* se ilustra el problema y en la figura 7-19*b* se presenta su solución. El aumento sobre la magnitud estándar es $2e \tan \phi$, de manera que

$$t = 2e \tan \phi + \frac{p_c}{2} \tag{7-17}$$

en donde ϕ es el ángulo de presión del cortador de cremallera y t es el espesor del diente del engrane en su propio círculo de paso.

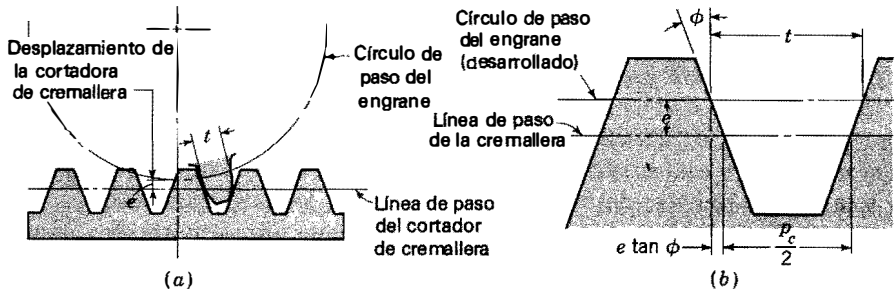


Figura 7-19

Supóngase ahora que se han cortado dos engranes con diferentes números de dientes, con el cortador descentrado respecto a los círculos de paso, como se indicó en el párrafo anterior. Puesto que los dientes se han cortado con un cortador excéntrico, se acoplarán con un nuevo ángulo de presión y tendrán nuevos círculos de paso, y, en consecuencia, también tendrán nuevas distancias entre los centros. Aquí se usa la palabra *nuevo* en el sentido de no ser estándar. El problema consiste, pues, en determinar el radio de estos nuevos círculos de paso y el valor del nuevo ángulo de presión.

En la siguiente notación, la palabra *estándar* se refiere a los valores que se habrían obtenido de haberse empleado los sistemas usuales, o estándar, para obtener las dimensiones:

ϕ = ángulo de presión del cortador generador de cremallera
ϕ' = nuevo ángulo de presión al que se acoplarán los engranes
r_2 = radio de paso estándar del piñón
r_2' = nuevo radio de paso del piñón, cuando se acopla con el engrane dado
r_3 = radio de paso estándar del engrane
r_3' = nuevo radio de paso del engrane, cuando se acopla con el piñón dado
t_2 = espesor real del diente del piñón en el radio de paso estándar
t_3 = espesor real del diente del engrane en el radio de paso estándar
t_2' = espesor del diente del piñón en el nuevo radio de paso r_2'
t_3' = espesor del diente del engrane en el nuevo radio de paso r_3'
N_2 = número de dientes del piñón
N_3 = número de dientes del engrane

Según la ecuación (7-16)

$$t_2' = 2r_2'\left(\frac{t_2}{2r_2} + \text{inv } \phi - \text{inv } \phi'\right) \qquad (a)$$

$$t_3' = 2r_3'\left(\frac{t_3}{2r_3} + \text{inv } \phi - \text{inv } \phi'\right) \qquad (b)$$

La suma de estos dos espesores debe ser igual al paso circular, o bien, partiendo de la (7-2)

$$t'_2 + t'_3 = p_c = \frac{2\pi r'_2}{N_2} \qquad (c)$$

Los diámetros de paso de un par de engranes acoplados son proporcionales a sus números de dientes, de manera que

$$r_3 = \frac{N_3}{N_2} r_2 \qquad \text{y} \qquad r'_3 = \frac{N_3}{N_2} r'_2 \qquad (d)$$

Al substituir las ecuaciones (*a*), (*b*) y (*d*) en la (*c*), y después de reacomodar los términos, se obtiene

$$\text{inv } \phi' = \frac{N_2(t_2 + t_3) - 2\pi r_2}{2r_2(N_2 + N_3)} + \text{inv } \phi \qquad (7\text{-}18)$$

La (7-18) da el ángulo de presión ϕ' al que un par de engranes operarán, cuando se han modificado los espesores de los dientes en sus círculos de paso a t_2 y t_3.

Se ha demostrado que los engranes no tienen círculos de paso hasta que un par de ellos haya entrado en contacto. Al hacer que un par de engranes entren en contacto, se crea un par de círculos de paso que son tangentes entre sí en el punto de paso. En el curso de este estudio se ha aplicado la idea de un par de los llamados círculos de paso estándar, para definir un punto específico en las curvas involutas. Como se vio anteriormente, estos círculos de paso estándar son los que se habrían producido al acoplar los engranes *si éstos no se hubieran modificado respecto a las dimensiones estándar*. Por otro lado, los de base son círculos fijos que no se alteran cuando se hacen modificaciones en los dientes. El círculo de base sigue siendo el mismo, sea que se cambien o no las dimensiones del diente; por tanto, se puede determinar el radio del círculo de base, usando el círculo de paso estándar, o bien, el nuevo círculo de paso. Por consiguiente, la ecuación (7-15) se puede expresar como

$$r_b = r_2 \cos \phi \qquad \text{o} \qquad r_b = r'_2 \cos \phi'$$

De donde,

$$r'_2 \cos \phi' = r_2 \cos \phi$$

o bien,

$$r'_2 = \frac{r_2 \cos \phi}{\cos \phi'} \qquad (7\text{-}19)$$

Del mismo modo, para el engrane,

$$r'_3 = \frac{r_3 \cos \phi}{\cos \phi'} \qquad (7\text{-}20)$$

Estas ecuaciones dan los valores de los radios de paso reales cuando los dos engranes con dientes modificados se *acoplan* sin juego entre dientes. Por supuesto, la nueva distancia entre los centros es la suma de estos radios.

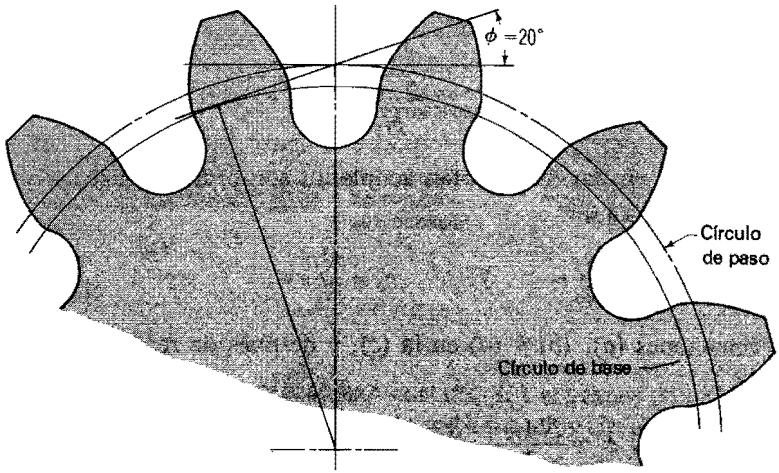


Figura 7-20 Engrane estándar de altura compleja de 20° y 12 dientes, presentando socavación.

Ahora han desarrollado todas las relaciones necesarias para crear engranes no estándar con cambios en la distancia entre los centros. La utilidad de estas relaciones se ilustra mejor por medio de un ejemplo.

En la figura 7-20 se presenta un dibujo de un piñón de 20°, de paso 1 y 12 dientes, generado con un cortador de cremallera que tiene una holgura estándar de $0.250/P$. En el sistema de altura completa de 20°, la interferencia es severa siempre que el número de dientes sea menor que 14. La socavación resultante es evidente en el propio dibujo. Si este piñón se acoplara con un engrane estándar de 40 dientes, la razón de contacto sería 1.41, lo que puede verificarse con facilidad aplicando la ecuación (8-7).

Para tratar de eliminar la socavación, mejorar la acción de los dientes y aumentar la razón de contacto, supóngase que se corta el piñón de 12 dientes partiendo de un disco en blanco más grande. Luego, el piñón resultante se acoplará una vez más con el engrane estándar de 40 dientes, con el fin de determinar el grado de mejora. Si se designa el piñón con el subíndice 2 y el engrane con el 3, se encontrarán los siguientes valores:

$$\phi = 20° \qquad r_2 = 6 \text{ pulg} \quad r_3 = 20 \text{ pulg} \quad P = 1$$

$$p_c = 3.1416 \text{ pulg} \quad t_3 = 1.5708 \text{ pulg} \quad N_2 = 12 \text{ teeth} \qquad N_3 = 40 \text{ teeth}$$

El cortador de cremallera se descentrará de tal modo que su línea de addendum pase por el punto de interferencia del piñón, es decir, el punto de tangencia de la línea de presión de 20° y el círculo de base, como se ilustra en la figura 7-21. Basándose en la ecuación (7-15), se tiene

$$r_b = r_2 \cos \phi \qquad (e)$$

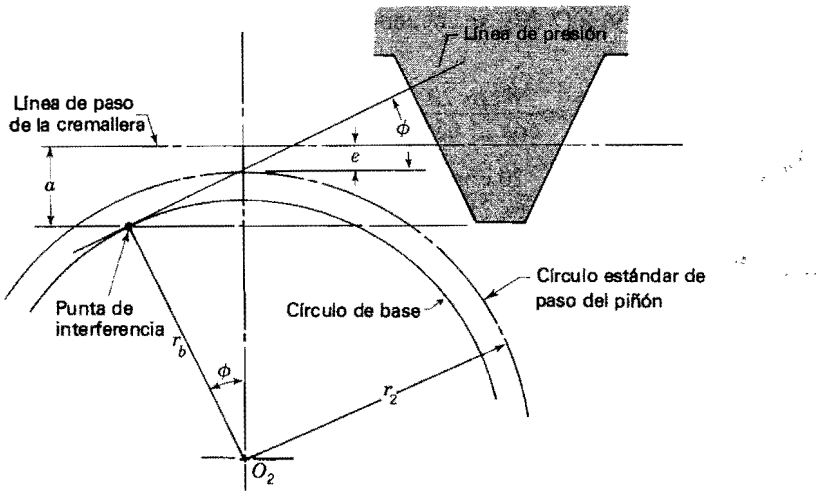


Figura 7-21 Descentrado de una cremallera para hacer que su línea de addendum pase por el punto de interferencia.

Entonces, según la figura 7-21

$$e = a + r_b \cos \phi - r_2 \qquad (f)$$

Después de substituir la (e) en la (f) da

$$e = a + r_2 \cos^2 \phi - r_2 = a - r_2 \operatorname{sen}^2 \phi \qquad (7\text{-}21)$$

Para una cremallera estándar, el addendum es $a = 1/P$; de modo que $a = 1$ pulg para este problema. La excentricidad que se usará es

$$e = 1 - 6 \operatorname{sen}^2 20° = 0.2981 \text{ pulg}$$

Luego, al resolver la (7-17) para el espesor del diente del piñón en su círculo de paso de 6 pulg, se obtiene

$$t_2 = 2e \tan \phi + \frac{p_c}{2} = (2)(0.2981) \tan 20° + \frac{3.1416}{2} = 1.7878 \text{ pulg}$$

El ángulo de presión al que estos engranes (y sólo estos engranes) operarán se encuentra a partir de la ecuación (7-18),

$$\text{inv } \phi' = \frac{N_2(t_2 + t_3) - 2\pi r_2}{2r_2(N_2 + N_3)} + \text{inv } \phi$$

$$= \frac{12(1.7878 + 1.5708) - 2\pi 6}{(2)(6)(12 + 40)} + \text{inv } 20° = 0.019\,077 \text{ rad}$$

De la tabla 6 del apéndice se obtiene

$$\phi' = 21.6511°$$

Si se usan las ecuaciones (7-19) y (7-20), se encuentra que los nuevos radios de paso son

$$r_2' = \frac{r_2 \cos \phi}{\cos \phi'} = \frac{6 \cos 20°}{\cos 21.6511°} = 6.0662 \text{ pulg}$$

$$r_3' = \frac{r_3 \cos \phi}{\cos \phi'} = \frac{20 \cos 20°}{\cos 21.6511°} = 20.220 \text{ pulg}$$

De manera que la nueva distancia entre los centros es

$$r_2' + r_3' = 6.0662 + 20.220 = 26.286 \text{ pulg}$$

Nótese que no se incrementó la distancia entre los centros tanto como la excentricidad del cortador de cremallera.

Al principio se especificó una holgura de $0.25/P$, lo que hizo que los dedenda estándar fueran iguales a $1.25/P$. Así pues, los radios de raíz de los dos engranes son

Radio de raíz del piñón	$6.2981 - 1.25 = 5.0481$ pulg
Radio de raíz del engrane	$20.0000 - 1.25 = \underline{18.7500}$ pulg
Suma de los radios de raíz	$= 23.7981$ pulg

La diferencia entre esta suma y la distancia entre los centros es la altura de trabajo más dos veces la holgura. Puesto que la holgura es 0.25 pulg para cada engrane, la altura de trabajo es

$$26.286 - 23.7981 - (2)(0.25) = 1.9879 \text{ in}$$
pulg

El radio exterior de cada engrane es la suma del radio de raíz, la holgura y la altura de trabajo,

$$\text{Radio exterior del piñón} = 5.0481 + 0.25 + 1.9879 = 7.2860 \text{ pulg}$$

$$\text{Radio exterior del engrane} = 18.75 + 0.25 + 1.9879 = 20.9879 \text{ pulg}$$

El resultado se ilustra en la figura 7-22 y se ve que el piñón tiene una forma de aspecto más fuerte que la del piñón de la figura 7-20. Se ha eliminado por completo la socavación. Se puede obtener la razón de contacto utilizando las ecuaciones (7-7) a (7-9). Se necesitan las siguientes cantidades:

$$\text{Radio exterior del piñón} = r_2' + a = 7.2860 \text{ pulg}$$

$$\text{Radio exterior del engrane} = r_3' + a = 20.9879 \text{ pulg}$$

$$r_{b_2} = r_2 \cos \phi = 6 \cos 20° = 5.6381 \text{ pulg}$$

$$r_{b_3} = r_3 \cos \phi = 20 \cos 20° = 18.7938 \text{ pulg}$$

$$p_b = p_c \cos \phi = 3.1416 \cos 20° = 2.9521 \text{ pulg}$$

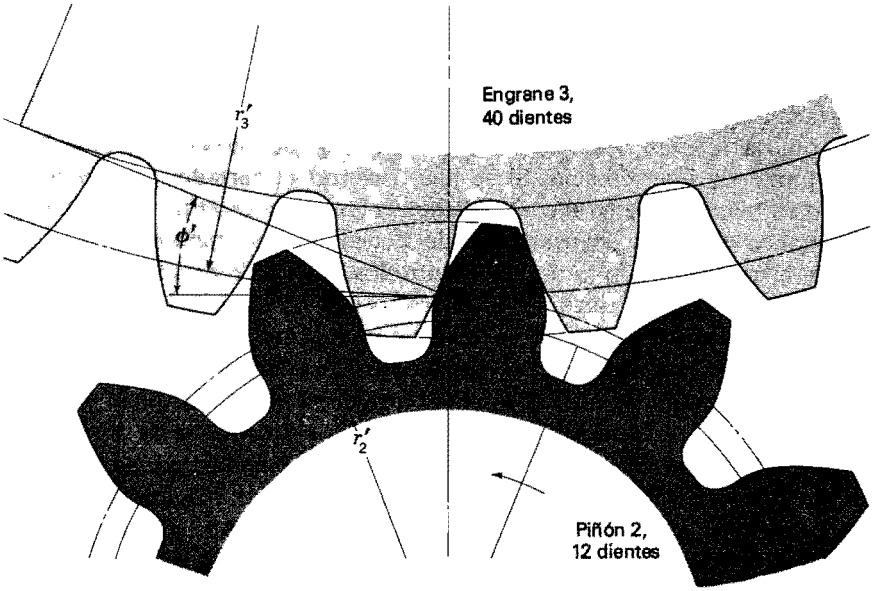


Figura 7-22

Luego, se tiene que

$$u_a = [(r'_3 + a)^2 - r_{b_3}^2]^{1/2} - r'_3 \operatorname{sen}\phi'$$
$$= [(20.9879)^2 - (18.7938)^2]^{1/2} - 20.220 \operatorname{sen} 21.6511°$$
$$= 1.8826 \text{ pulg}$$
$$u_r = [(r'_2 + a)^2 - r_{b_2}^2]^{1/2} - r'_2 \operatorname{sen}\phi'$$
$$= [(7.2860)^2 - (5.6381)^2]^{1/2} - 6.0662 \operatorname{sen} 21.6511°$$
$$= 2.3247 \text{ pulg}$$

Por último, según la (7-7), la razón de contacto es

$$m_c = \frac{u_a + u_r}{p_b} = \frac{1.8826 + 2.3247}{2.9521} = 1.425$$

Por ende, la razón de contacto se ha incrementado sólo ligeramente. No obstante, la modificación se justifica porque se elimina la socavación y se produce una mejora sustancial en la resistencia del diente.

Sistemas de addendum largo y corto En el diseño de maquinaria sucede con frecuencia que la distancia entre los centros, entre un par de engranes, la fija otra característica de la máquina. En tales casos es imposible hacer modificaciones para obtener un mejor funcionamiento, alterando la distancia entre los centros.

En la sección anterior se ha visto que se puede obtener una acción y forma mejoradas del diente, haciendo retroceder el cortador de cremallera respecto al disco en blanco del piñón. El efecto de este retroceso es crear el perfil activo del diente a una distancia mayor del círculo de base. Si se examina la figura 7-22, se observará que se podría usar un dedendum mayor en el engrane (no en el piñón) antes de llegar al punto de interferencia. Si se hace avanzar el cortador de cremallera hacia el disco en blanco del engrane, una distancia igual a la excentricidad respecto al disco en blanco del piñón, se usará más del dedendum del engrane y, al mismo tiempo, no se habrá cambiado la distancia entre los centros. Esto se conoce como *sistema de addendum largo y corto*.

En el sistema de addendum largo y corto no se registra cambio alguno en los círculos de paso y, en consecuencia, tampoco en el ángulo de presión. El efecto consiste en alejar la región de contacto del centro del piñón, acercándola al centro del engrane, acortando así la acción de aproximación y alargando la de retroceso.

Las características del sistema de addendum largo y corto se pueden explicar con referencia a la figura 7-23. En la figura 7-23*a* se ilustra un juego convencional (estándar) de engranes que tiene un dedendum igual al addendum más la holgura. Existe interferencia, y tendrá que rebajarse la punta del diente del engrane como se indica, o el piñón sufrirá una socavación. Esto se debe a que el círculo de addendum del engrane cruza la linea de presión en D, afuera del punto de tangencia o interferencia C; por consiguiente, la distancia CD es una medida del grado de interferencia.

Para eliminar la socavación o interferencia, se ha agrandado el addendum del piñón en la figura 7-23*b*, hasta que el círculo de addendum del piñón pasa por el punto de interferencia (punto A) del engrane. De esta manera se estará usando todo el perfil del diente del engrane. Se conserva la misma altura total; por ende, se reduce el dedendum del piñón en la misma cantidad en que se incrementa el addendum. Esto significa que ahora se debe alargar el dedendum del engrane y acortar el addendum. Con estos cambios, la trayectoria de contacto es la recta BD de la figura 7-23*b*; esta es más larga que la trayectoria BC de la figura 7-23*a*, y, por consiguiente, la razón de contacto es mayor. Nótese también que no han cambiado los círculos de base, los de paso, el ángulo de presión y la distancia entre los centros. Ambos engranes se pueden cortar con cortadores estándar, haciéndolo avanzar hacia el disco en blanco del engrane una distancia igual a la magnitud del retroceso, para esta modificación, en relación con el disco en blanco del piñón. Por último, nótese que los discos en blanco de los que se cortan los engranes tienen ahora diámetros distintos a los estándar.

Ahora se pueden determinar las dimensiones del diente para el sistema de addendum largo y corto aplicando las ecuaciones desarrolladas en las secciones previas.

Una ventaja menos obvia del sistema de addendum largo y corto es que se obtiene una mayor acción de retroceso que de aproximación. La acción de aproximación de los dientes de engrane es análoga a la de empujar un trozo de tiza sobre un pizarrón; se provoca un chirrido. Por el contrario, cuando se tira del gis sobre

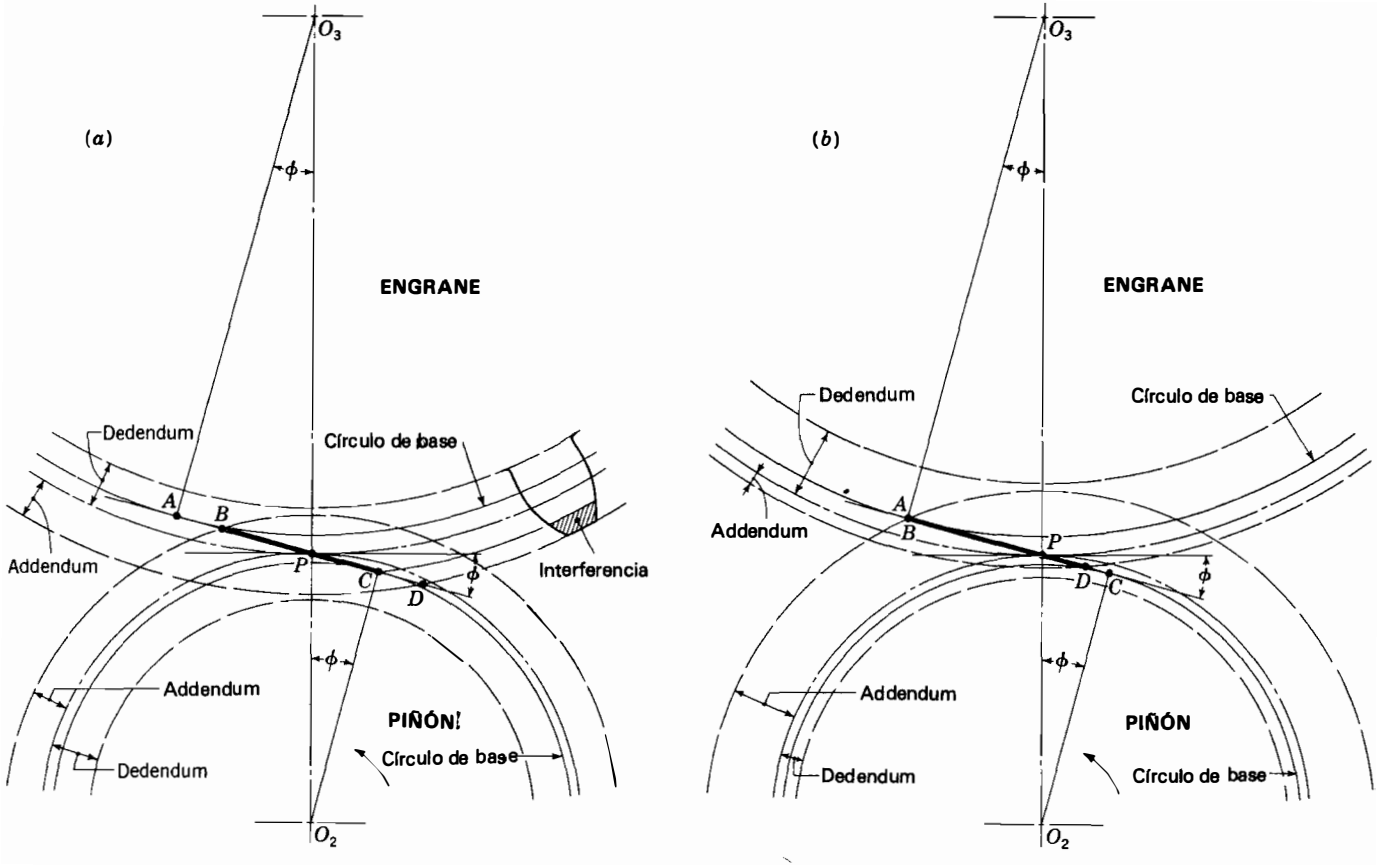


Figura 7-23 Comparación de los engranes estándar y los cortados mediante el sistema de addendum largo y corto: *a*) engrane y piñón con addendum y dedendum estándar, *b*) engrane y piñón con addendum largo y corto.

el pizarrón, se desliza con suavidad; esta acción es análoga a la de retroceso. Por consiguiente, siempre se prefiere la acción de retroceso debido a la suavidad y a las fuerzas de fricción menores.

El sistema de addendum largo y corto no ofrece ventaja alguna si los engranes acoplados son del mismo tamaño. En esta situación, el incrementar el addendum de uno de los engranes tan sólo produciría una mayor socavación en el otro. Asimismo, es obvio que el engrane menor del par debe ser el impulsor si se desea obtener las ventajas de la acción de retroceso.

7-12 PERFIL CICLOIDAL

El perfil cicloidal se utilizó profusamente en la fabricación de engranes hace aproximadamente un siglo, en virtud de la facilidad para producirlos por fundición. En la actualidad se usa sólo en raras ocasiones por razones que se explicarán en esta sección.

En la figura 7-24 se muestra la construcción de un perfil cicloidal. Dos círculos generadores, representados por líneas a trazos, ruedan sobre el interior y el exterior, respectivamente, del círculo de paso y generan el flanco hipocicloidal y la cara epicicloidal del diente del engrane. Estos dos mismos círculos sirven también para generar el perfil de los dientes del piñón correspondiente; pero ahora se invierte el papel de los círculos generadores. El círculo que generó el flanco del diente del engrane genera ahora la cara epicicloidal del diente del piñón. Y, del mismo modo, el círculo que generó la cara del diente del engrane genera ahora el flanco del diente del piñón.

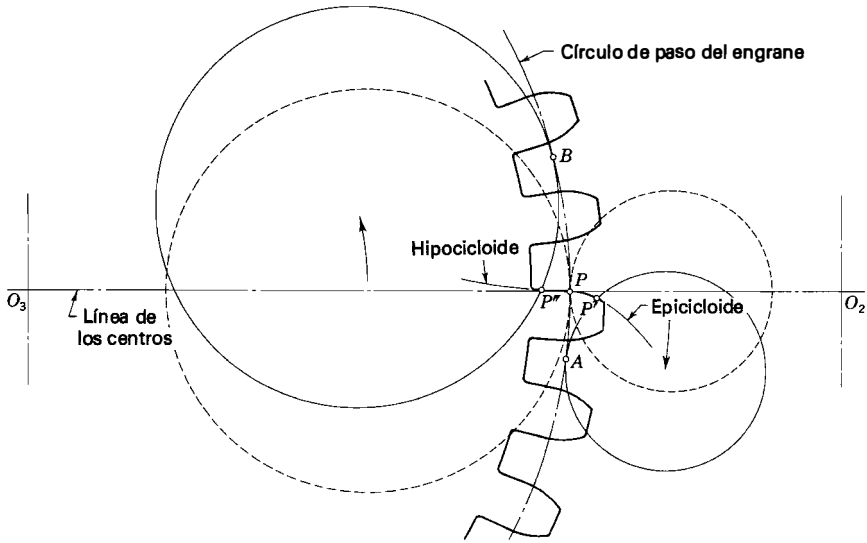


Figura 7-24 Generación de dientes cicloidales sobre un engrane.

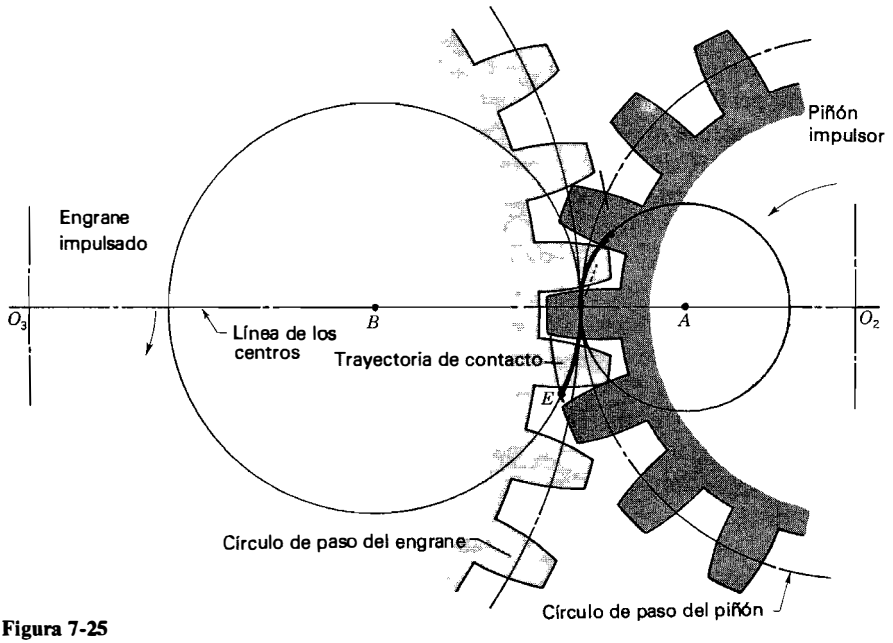


Figura 7-25

Nótese que al generar un lado de un diente, los dos círculos generadores ruedan en direcciones opuestas.

En la figura 7-25 se ilustran acoplados el piñón y el engrane producidos por este método. Considérese que el piñón es el impulsor y que gira en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj. Los dos círculos de paso son tangentes en el punto de paso P y ruedan sobre sí mismos sin resbalar. Los dos círculos generadores tienen centros estacionarios en A y B, y también ruedan con los círculos de paso en movimiento. Existe un punto de contacto C en la intersección del círculo generador con el centro en A y los dos perfiles de contacto. Sea C_2 un punto del flanco del diente del piñón y C_3 un punto de la cara del diente del engrane. Conforme los dos círculos de paso y el círculo generador ruedan el uno sobre el otro, un punto del círculo generador recorre simultáneamente la cara del diente sobre el engrane móvil, y el flanco del diente sobre el piñón móvil. De esta manera el punto C es una posición instantánea de este punto móvil y el arco CP, del círculo generador, es su trayectoria. El contacto inicial ocurrirá en D, en donde el círculo de addendum del engrane impulsado corta al círculo generador. Por consiguiente, la trayectoria completa de aproximación es el arco DP. Durante la aproximación sólo se han usado las porciones de los perfiles de diente generados por el círculo con centro en A.

Regresando a la figura 7-25, nótese que el punto de paso P es el centro instantáneo de rotación del círculo generador, sin importar cuál de los dos círculos de paso se considera que está rodando. Por ende, P es el centro instantáneo de ro-

tación del punto *C*, sobre el círculo generador, y, en consecuencia, la recta *PC* es normal a los dos perfiles de diente; como los dos engranes giran, siempre se cumplirá esto. Por consiguiente, el engranaje cicloidal satisface la ley del engranaje en que la normal al perfil de diente pasa siempre por el punto de paso

No obstante, nótese que la recta *PC*, que es la línea de presión, no tendrá una inclinación constante. Conforme el punto de contacto se acerca al de paso, la línea de presión tiende a la perpendicularidad con la línea de los centros.

Durante la acción de retroceso el círculo generador con centro en *B* es el que actúa. El contacto se produce sobre la cara del diente del piñón y el flanco del diente del engrane. Nótese que cada uno de estos perfiles es generado por el círculo que tiene su centro en *B*. Durante el retroceso, la línea de presión gira regresando hacia una inclinación similar a la que tuvo durante la aproximación. El punto final de contacto se localiza en *E*, en donde el círculo de addendum del piñón se interseca con el círculo generador. Por ende, la trayectoria de contacto durante el retroceso es la distancia *PE* a lo largo del arco.

El ángulo de presión variable del diente cicloidal genera ruido y desgaste adicionales, y también produce cambios en las reacciones sobre el cojinete en los soportes del eje. Del mismo modo, la doble curvatura que ocurre con frecuencia introduce problemas en el corte de los dientes, que no se presentan con la forma de involuta. Para que funcionen con propiedad, los engranes cicloidales se deben operar exactamente a la distancia correcta entre los centros porque, de lo contrario, las porciones que entran en contacto de los perfiles no serán conjugadas. Puesto que de necesidad ocurren deflexiones debido a la transmisión de carga, sería virtualmente imposible mantener la distancia correcta entre los centros bajo todas las condiciones de carga. Por lo tanto, en la mayor parte de las aplicaciones existentes, parece que la forma cicloidal de los dientes tiene poco que ofrecer en comparación con el perfil de involuta.

PROBLEMAS

7-1 Determínese el paso diametral de un par de engranes cuya distancia entre los centros es de 0.362 5 pulg. Los engranes tienen, respectivamente, 32 y 84 dientes.

7-2 Encuéntrese el número de dientes y el paso circular de un engrane con un diámetro de paso de 6 pulg y cuyo paso diametral es 9.

7-3 Determínese el módulo de un par de engranes cuya distancia entre los centros es de 58 mm. Los engranes tienen 18 y 40 dientes, respectivamente.

7-4 Encuéntrese el número de dientes y el paso circular de un engrane cuyo diámetro es de 200 mm, si el módulo es 8 mm por diente.

7-5 ¿Cuáles son el paso diametral y el diámetro de paso de un engrane de 40 dientes cuyo paso circular es de 3.50 pulg?

7-6 Los diámetros de paso de un par de engranes acoplados son $3\frac{1}{2}$ y $8\frac{1}{4}$ pulg, respectivamente. Si el paso diametral es 16, ¿cuántos dientes hay en cada engrane?

7-7 Encuéntrese el módulo y el diámetro de paso de un engrane cuyo paso circular es de 40 mm, si el engrane tiene 36 dientes.

7-8 Los diámetros de paso de un par de engranes son de 60 y 100 mm, respectivamente. Si el módulo es 2.5 mm por dientes, ¿cuántos dientes hay en cada engrane?

7-9 ¿Cuál es el diámetro de un engrane de 33 dientes si el paso circular es de 0.875 pulg?

7-10 Un eje sostiene un engrane de 30 dientes con paso diametral de 3, el cual impulsa a otro engrane a una velocidad de 480 rpm. ¿A qué velocidad gira el engrane de 30 dientes si la distancia entre los centros de los ejes es de 9 pulg?

7-11 Dos engranes que tienen una razón de velocidades angulares de 3:1 están montados sobre ejes cuyos centros están separados 136 mm. Si el módulo de los engranes es 4 mm, ¿cuántos dientes tiene cada engrane?

7-12 Un engrane que tiene un módulo de 4 mm por diente y 21 dientes impulsa a otro cuya velocidad es de 240 rpm. ¿Con qué rapidez gira el engrane de 21 dientes si la distancia entre los centros de los ejes es de 156 mm?

7-13 Un piñón de 24 dientes con un paso diametral de 4 debe impulsar a un engrane de 36 dientes. Los engranes se cortan en el sistema de involuta de 20° y altura completa. Hágase un dibujo de los engranes presentando un diente de cada uno de ellos. Calcúlense y tabúlense el addendum, el dedendum, la holgura, el paso circular, el espesor del diente y los diámetros de los círculos de base; asimismo, las trayectorias de aproximación, retroceso y acción; así como la razón de contacto y el paso de base.

7-14 Un piñón de 15 dientes y paso diametral de 5 se va a acoplar con un engrane interno de 30 dientes. Ambos son de involuta de 20°, de altura completa. Hágase un dibujo de los engranes mostrando varios dientes de cada uno. ¿Es posible montar estos engranes en dirección radial? De no ser así, ¿qué remedio se debe aplicar?

7-15 Se acopla un piñón de 17 dientes y un paso diametral de $2\frac{1}{2}$, a un engrane de 50 dientes. Ambos se cortan en el sistema de involuta de 20° y de altura completa. Hágase un dibujo de los engranes mostrando un diente de cada uno de ellos. Encuéntrense los arcos de aproximación, de retroceso y de acción, así como la razón de contacto, obteniendo directamente los datos del dibujo.

7-16† Un juego de engranes tiene un módulo de 5 mm por diente, es de dientes de altura completa y un ángulo de presión de $22\frac{1}{2}°$, y tiene 19 y 31 dientes, respectivamente. Hágase un dibujo de los engranes presentando un diente de cada uno de ellos. Úsese 1.0 m para el addendum y 1.35 m para el dedendum. Tabúlense el addendum, el dedendum, la holgura, el paso circular, el espesor del diente, el diámetro del círculo de base, el paso de base y la razón de contacto.

7-17† Un engrane tiene un módulo de 8 mm por diente y 22 dientes, y se acopla con una cremallera. El addendum y el dedendum son, respectivamente, 1.0 m y 1.25 m; el ángulo de presión es de 25°. Hágase un dibujo presentando los dientes acoplados y midanse las longitudes de la trayectoria de aproximación, la de retroceso y la trayectoria total de contacto sobre la línea de acción. ¿Cuál es la razón de contacto?

7-18 Repítase el problema 7-15, utilizando en esta ocasión el sistema de 25° de altura completa.

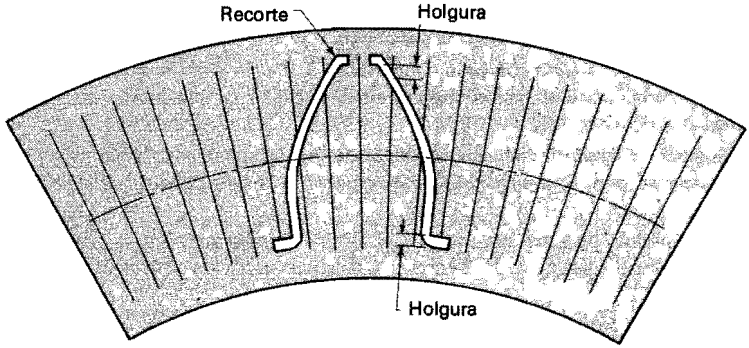
7-19 Dibújese un engrane de 26 dientes y paso diametral 2 acoplado con una cremallera. Los engranes son de involuta de 20° y de altura completa.

a) Encuéntrense los arcos de aproximación, de retroceso y de acción, así como la razón de contacto.

b) Dibújese una segunda cremallera acoplada al mismo engrane; pero con una excentricidad de 1/8 pulg hacia afuera del centro del engrane. Determínese la nueva razón de contacto. ¿Se registró algún cambio en el ángulo de presión?

7-20 a 7-24 Los cortadores limadores para engranes tienen la ventaja de que se pueden usar tanto para engranes exteriores como interiores, y también de que sólo se necesita una pequeña carrera en vacío al final de la carrera. Se puede simular con facilidad la acción generadora de un cortador limador para piñón empleando una hoja de plástico transparente. En la figura se ilustra un diente de un cortador de piñones de 16 dientes, con un ángulo de presión de 20°, tal y como se puede cortar a partir de una hoja de plástico. Para construir el cortador, trácese el diente en una hoja de papel de dibujo. Asegúrese de incluir la holgura en la parte superior del diente. Trácense rectas radiales a través del círculo de paso, espaciadas a distancias iguales a la cuarta parte del espesor del diente, como se muestra en la figura.

† En el SI, las dimensiones de los dientes se dan en módulos, m. Por ende, $a = 1.0$ m significa 1 módulo y no 1 metro.



Problemas 7-20 y 7-24

Ahora, sujétese el plástico sobre el dibujo y grábese la figura por recortar, el círculo de paso y las rectas radiales sobre la hoja. A continuación se retira ésta y se recorta el perfil del diente con una hoja de rasurar. Se debe usar después un trozo pequeño de lija fina para eliminar cualquier rebaba.

Para generar un engrane con el cortador, lo único que se necesita trazar es el círculo de paso y el de addendum. Divídase el círculo de paso en espacios iguales a los que se usaron en la plantilla y trácense rectas radiales por lo puntos de división. Entonces se obtienen los perfiles de los dientes haciendo rodar el círculo de paso de la plantilla sobre el del engrane, y trazando con suavidad el diente del cortador para cada posición. El diente generado resultante sobre el engrane quedará marcado con toda claridad. Todos los problemas que siguen emplean una plantilla estándar de paso diametral 1 y altura completa, como la que se acaba de describir. En cada caso genérense unos cuantos dientes y estímese la magnitud de la socavación.

Número del problema	Número de dientes
7-20	10
7-21	12
7-22	14
7-23	20
7-24	36

7-25† Un engrane con un módulo de 10 mm tiene 17 dientes, un ángulo de presión de 20°, un addendum de 1.0 m y un dedendum de 1.25 m. Determínese el espesor de los dientes en el circulo de base y en el de addendum. ¿Cuál es el ángulo de presión correspondiente al círculo de addendum?

7-26 Un piñón de 15 dientes tiene 1.5 de paso diametral y dientes de altura completa de 20°. Calcúlese el espesor de los dientes en el círculo de base. ¿Cuáles son el espesor y el ángulo de presión en el círculo de addendum?

7-27 Un diente tiene un espesor de 0.785 pulg a un radio de 8 pulg y un ángulo de presión de 25°. ¿Cuál es el espesor en el círculo de base?

7-28 Un diente tine 1.57 pulg de espesor en el radio de paso de 16 pulg, y un ángulo de presión de 20°. ¿A qué radio se hace puntiagudo el diente?

7-29 Un piñón de involuta de 25° y un paso diametral de 12 tiene 18 dientes. Calcúlese el espesor de los dientes en el circulo de base. ¿Cuál es el espesor y el ángulo de presión en el circulo de addendum?

† Véase la nota al pie de la p. 297.

7-30 Se debe cortar un piñón especial de 10 dientes y paso diametral de 8, con un ángulo de presión de 221/2°. ¿Qué addendum máximo se puede usar antes de que los dientes se hagan puntiagudos?

7-31 Se puede medir la exactitud en el corte de los dientes de engrane ajustando clavijas endurecidas y rectificadas en espacio entre dientes diametralmente opuestos, y midiendo la distancia sobre estas clavijas. Un engrane tiene 96 dientes y un paso diametral de 10, y se corta siguiendo el sistema de involuta de altura completa y 20°.

a) Calcúlese el diámetro de la clavija que hará contacto con los dientes en las líneas de paso, si no se permite juego alguno entre dientes.

b) Si el engrane se corta con exactitud, ¿cuál debe ser la distancia medida sobre las clavijas?

7-32 Se corta un juego de engranes intercambiables siguiendo el sistema de involuta, de 20° y altura completa, con un paso diametral de 4. Los engranes tienen 24, 32, 48 y 96 dientes. Calcúlese, para cada engrane, el radio de curvatura del perfil de los dientes, tanto en el círculo de paso como en el de addendum.

7-33 Calcúlese la razón de contacto de un piñón de 17 dientes que impulsa a un engrane de 73 dientes. Los engranes tienen un paso diametral de 96 y se cortaron aplicando el sistema de paso fino de 20°.

7-34 Un piñón especial de 11 dientes y ángulo de presión de 25° debe impulsar un engrane de 23 dientes. Los engranes tienen un paso diametral de 8 y son de dientes truncados. ¿Cuál es la razón de contacto?

7-35 Un piñón de 22 dientes se acopla con un engrane de 42 dientes. Los engranes son de altura completa, tienen un paso diametral de 16 y se cortan con un ángulo de presión de $17\frac{1}{2}°$. Encuéntrese la razón de contacto.

7-36 Un par de engranes acoplados tienen un paso diametral de 24 y se produjeron con el sistema de 20°. Si el número de dientes es 15 y 50, ¿qué addenda máximos pueden tener si no debe ocurrir interferencia?

7-37 Se produce un fuego de engranes por fundición con un ángulo de presión de $17\frac{1}{2}°$ y un paso circular de $4\frac{1}{2}$ pulg. El piñón tiene 20 dientes de altura completa. Si el engrane cuenta con 240 dientes, ¿cuál debe ser su addendum para evitar la interferencia?

7-38 Con el método descrito en el problema 7-20, córtese un diente de cremallera de altura completa, con un paso diametral de 1 y un ángulo de presión de 20°, utilizando una hoja de plástico transparente. Úsese una holgura modificada de $0.35/P$ para obtener un claflán más fuerte. Se puede usar esta plantilla para simular la acción generadora de una fresa maestra. Ahora, con el sistema de distancia variable entre los centros, genérese un piñón de 11 dientes para que se acople con un engrane de 25 dientes sin interferencia. Anótense los valores hallados para la distancia entre los centros, los radios de paso, el ángulo de presión, los diámetros de los discos en blanco, la excentricidad del cortador y la razón de contacto. Obsérvese que existe más de una solución satisfactoria.

7-39 Con la plantilla que se construyó en el problema 7-38, genérese un piñón de 11 dientes para acoplarlo con un engrane de 44 dientes, aplicando el sistema de addendum largo y corto. Determínense y anótense valores apropiados para el addendum y el dedendum del engrane y el piñón, y para la excentricidad del cortador y la razón de contacto. Compárese la razón de contacto con la que se habría obtenido si se hubieran empleado engranes estándar.

7-40 Un piñón estándar de 20 dientes, con un paso diametral de 1, altura completa y un ángulo de presión de 20°, impulsa a un engrane de 48 dientes. La velocidad del piñón es de 500 rpm. Usando la longitud de la trayectoria de contacto como abscisa, trácese una curva que muestre la velocidad de deslizamiento, cambia de signo cuando el punto de contacto pasa por el punto de paso.

CAPÍTULO

OCHO

ENGRANES HELICOIDALES, DE GUSANO Y CÓNICOS

La mayoría de los ingenieros prefieren utilizar engranes rectos cuando es preciso transferir potencia entre ejes paralelos, porque son más fáciles de diseñar y, a menudo, su fabricación más económica; pero a veces las necesidades del diseño son tales que los engranes helicoidales resultan la mejor opción. Esto es cierto sobre todo cuando se trata de cargas pesadas, altas velocidades o cuando se debe mantener bajo el nivel de ruido.

Cuando se debe transmitir movimiento entre ejes que no son paralelos, no se puede utilizar el engrane recto; el diseñador debe elegir entonces entre los engranes helicoidales cruzados, de gusano, cónicos o hipoidales. Los engranes cónicos tienen dientes rectos, contacto lineal y eficiencias altas. Los engranes helicoidales cruzados y los de gusano tienen una eficiencia mucho menor debido a que se incrementa la acción de deslizamiento; sin embargo, si se emplean buenos principios de ingeniería, se pueden diseñar engranes helicoidales cruzados y de gusano con valores bastantes aceptables de la eficiencia. Los engranes hipoidales y los cónicos se emplean en aplicaciones similares, y aunque los hipoidales cuentan con dientes inherentemente más fuertes, la eficiencia es con frecuencia mucho menor. Los engranes de gusano se emplean cuando se requieren razones de velocidades elevadas.

8-1 ENGRANES HELICOIDALES DE EJES PARALELOS

Los engranes helicoidales se usan para transmitir movimiento entre ejes no paralelos y paralelos. Cuando se emplean con ejes no paralelos reciben el nombre de *engranes helicoidales cruzados*; y se estudian en la sección 8-6.

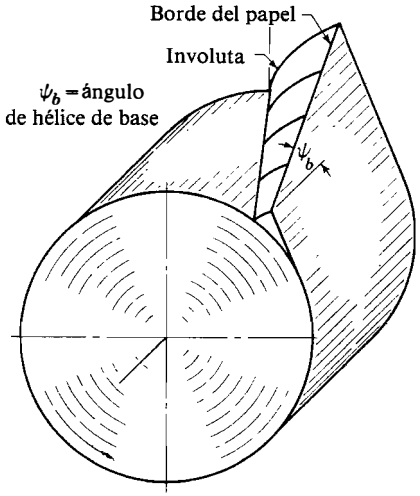


Figura 8-1 Helicoide de involuta.

La forma de los dientes de un engrane helicoidal es un helicoide de involuta, como la que se ilustra en la figura 8-1. Si se corta un trozo de papel dándole la forma de un paralelogramo y se enrolla alrededor de un cilindro, el borde angular del papel se convierte en una hélice. Si a continuación se desenrolla el papel, cada punto de la orilla angular genera una curva involuta. La superficie obtenida cuando cada punto de la orilla genera una involuta recibe el nombre de *helicoide de involuta*.

El contacto inicial de los dientes de engranes rectos es una recta que se extiende a todo lo largo sobre la cara del diente. El contacto inicial de los dientes de engranes helicoidales es un punto que se convierte en una recta conforme los dientes se encastran más; en los engranes helicoidales, la recta es diagonal a través de la cara del diente. Es este encastramiento gradual de los dientes y la suave transferencia de la carga de un diente a otro lo que les confiere a los engranes helicoidales la capacidad de transmitir cargas pesadas a velocidades elevadas.

Se obtienen los engranes de hélice doble (llamados también de espina de pescado) cuando para cada engrane se cortan dientes derechos e izquierdos en el mismo disco en blanco y funcionan en ejes paralelos. Las fuerzas de empuje en las mitades derecha e izquierda son iguales y opuestas y se cancelan entre sí.

8-2 RELACIONES ENTRE LOS DIENTES DE ENGRANES HELICOIDALES

En la figura 8-2 se representa una porción de la vista superior de una cremallera helicoidal. Las rectas AB y CD son las líneas de los centros de dos dientes helicoidales adyacentes, tomadas sobre el plano de paso. El ángulo ψ es el *ángulo de hélice* y se debe medir en el diámetro de paso, a menos que se especifique otra cosa. La distancia AC es el *paso circular transversal* p_t en el plano de rotación. La

distancia AE es el *paso circular normal* p_n y se relaciona con el paso circular transversal como sigue:

$$p_n = p_t \cos \psi \tag{8-1}$$

La distancia AD se denomina *paso axial* p_x y es

$$p_x = \frac{p_t}{\tan \psi} \tag{8-2}$$

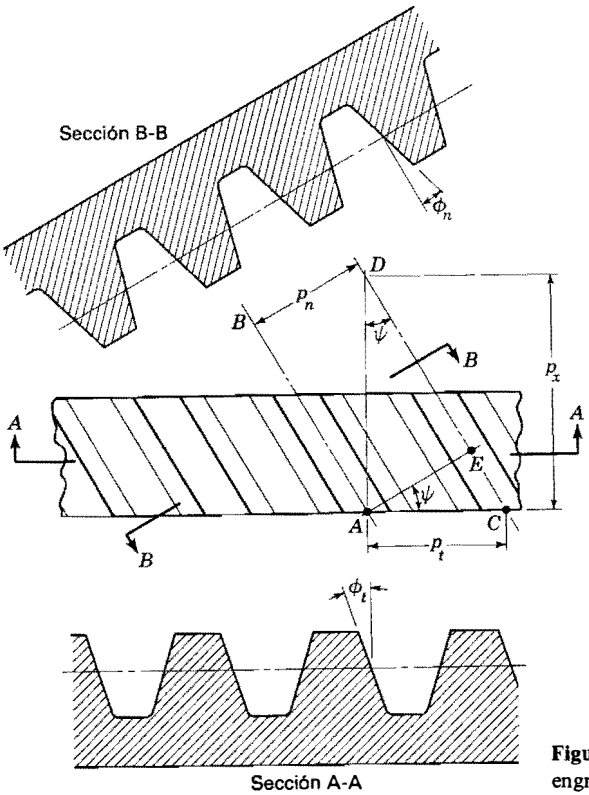


Figura 8-2 Relaciones entre los dientes en un engrane helicoidal.

Puesto que $p_n P_n = \pi$, el *paso diametral normal* es

$$P_n = \frac{P_t}{\cos \psi} \tag{8-3}$$

en donde P_t es el *paso diametral transversal*.

Debido a la angularidad de los dientes, se deben definir dos ángulos de presión. Estos son el *ángulo de presión transversal* ϕ_t y el *ángulo de presión normal* ϕ_n, como se ilustra en la figura 8-2. Ambos se relacionan por medio de

$$\cos \psi = \frac{\tan \phi_n}{\tan \phi_t} \tag{8-4}$$

Al aplicar estas ecuaciones conviene recordar que todas las ecuaciones y relaciones que son válidas para los engranes rectos, se aplican de la misma manera para el plano transversal de un engrane helicoidal.

Se puede lograr una mejor imagen de las relaciones entre los dientes a través de un examen minucioso de la figura 8-3. Con el fin de obtener las relaciones geométricas, se ha cortado un engrane helicoidal mediante el plano oblicuo AA que forma un ángulo ψ con una sección transversal normal. Para mayor conveniencia sólo se muestra el cilindro de paso de radio r. La figura muestra que la intersección del plano y el cilindro de paso produce una elipse cuyo radio en el punto de paso P es r_e. Éste se conoce con el nombre de *radio de paso equivalente,* y es el radio de curvatura de la superficie de paso en la sección transversal normal. Para la condición de que $\psi = 0$, este radio de curvatura es r. Si se piensa en que el ángulo ψ aumenta lentamente desde 0 hasta 90°, se ve que r_e principia en un valor de r y se incrementa hasta que $r_e = \infty$. cuando $\psi = 90°$.

Se puede demostrar † que

$$r_e = \frac{r}{\cos^2 \psi} \tag{8-5}$$

en donde r es el radio de paso del engrane helicoidal y r_e es el radio de paso de un engrane recto equivalente. Este engrane equivalente se toma sobre la sección normal del engrane helicoidal. Definamos el número de dientes en el engrane helicoidal como N y en el engrane recto equivalente, como N_e. Por lo tanto,

$$N_e = d_e P_n \tag{d}$$

† La ecuación de una elipse con su centro en el origen de un sistema xy, siendo a y b el semieje mayor y el semieje menor, respectivamente, es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{a}$$

Asimismo, la fórmula para el radio de curvatura es

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \tag{b}$$

Si se usan estas dos ecuaciones, no es difícil hallar el radio de curvatura correspondiente a $x = 0$ y $y = b$. El resultado es

$$\rho = \frac{a^2}{b} \tag{c}$$

Ahora, con referencia a la figura 8-3, se sustituye $a = r/(\cos \psi)$ y $b = r$ en la ecuación (*c*) y se obtiene la ecuación (8-5).

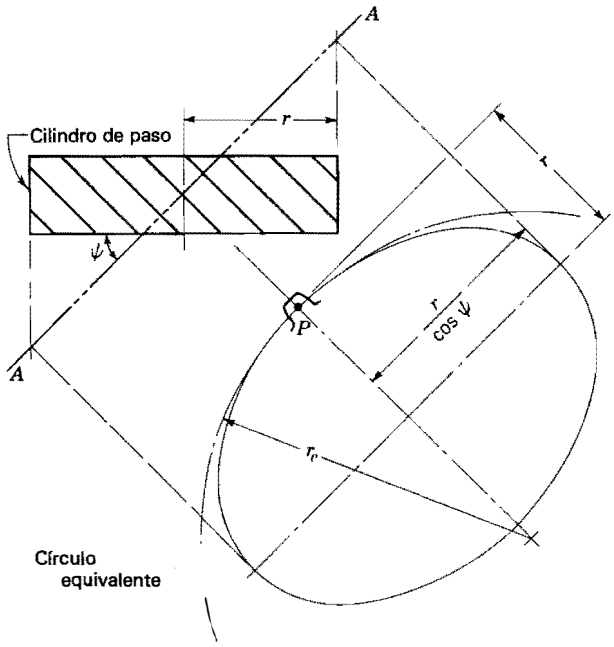


Figura 8-3

en donde $d_e = 2r_e$ es el diámetro de paso del engrane recto equivalente. Asimismo, la (*d*) se puede escribir

$$N_e = \frac{d}{\cos^2 \psi} \frac{P_t}{\cos \psi} = \frac{N}{\cos^3 \psi} \tag{8-6}$$

8-3 PROPORCIONES DE LOS DIENTES EN LOS ENGRANES HELICOIDALES

Excepción hecha de los engranes de paso fino (con un paso diametral de 20 o más fino), no existe un estándar para las proporciones de los dientes de engranes helicoidales. Una de las razones de esto es que resulta más barato cambiar el diseño ligeramente que comprar herramientas especiales. Puesto que, de todas maneras, los engranes helicoidales rara vez se usan en forma intercambiable; y dado que existen muchos diseños diferentes que funcionan bien juntos, en realidad se obtienen pocas ventajas en hacerlos intercambiables.

Como regla general, las proporciones de los dientes se deben basar en un ángulo de presión normal de 20°; de modo que se pueden usar la mayor parte de las proporciones presentadas en la tabla 7-1. Las dimensiones de dientes se deben calcular utilizando el paso diametral normal. Estas proporciones son adecuadas para ángulos de hélice desde 0 hasta 30°, y todos los ángulos de hélice se pueden cortar

con la misma fresa maestra. Por supuesto, el paso diametral normal de la fresa maestra y del engrane deben ser iguales.

Es factible basar un conjunto opcional de proporciones en un ángulo de presión transversal de 20° y el uso del paso diametral transversal. Para éstas, los ángulos de hélice se restringen comúnmente a 15, 23, 30 o 45°. No se recomiendan ángulos mayores de 45°. Todavía debe seguirse utilizando el paso diametral normal para calcular las dimensiones de los dientes. Las proporciones dadas en la tabla 7-1 por lo

Muchos especialistas recomendaban que la anchura de la cara de los engranes helicoidales fuera por lo
verdadera acción de engrane helicoidal. Una excepción a esta regla son los engranes automotrices que tienen una anchura de cara considerablemente menor, y los engranes marinos de reducción, que con frecuencia tienen una anchura de cara mucho mayor.

Conviene hacer notar también que en un juego de engranes helicoidales paralelos, los dos deben tener el mismo ángulo de hélice y el mismo paso, y deben ser de mano opuesta. La razón de velocidades se determina al igual que en el caso de los engranes rectos.

8-4 CONTACTO DE LOS DIENTES EN LOS ENGRANES HELICOIDALES

Los dientes de engranes rectos acoplados entran en contacto en una recta que es paralela a sus ejes de rotación. Como se indica en la figura 8-4, el contacto entre los dientes de engranes helicoidales es una recta diagonal.

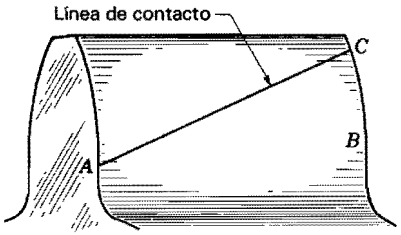


Figura 8-4 Mientras que en *A* apenas se inicia el contacto, en el otro extremo del diente ya ha avanzado desde *B* hasta *C*.

Existen varias clases de razones de contacto que se usan para evaluar el desempeño o rendimiento de los engranes helicoidales. La *razón de contacto transversal* se designa por m y es la razón de contacto en el plano transversal. Esta razón se obtiene exactamente en la misma forma que para los engranes rectos.

La *razón de contacto normal* m_n es la razón de contacto en la sección normal; y también se encuentra exactamente en la misma forma que para los engranes rectos; pero en la *determinación se deben usar engranes rectos equivalentes*. El *ángulo de hélice de base* ψ_b y el *ángulo de hélice de paso* ψ, para los engranes helicoidales, se relacionan mediante

$$\tan \psi_b = \tan \psi \cos \phi \tag{8-7}$$

Luego, las razones de contacto transversal y normal se relacionan mediante

$$m_n = \frac{m}{\cos^2 \psi_b} \tag{8-8}$$

La *razón de contacto axial*, llamada también *razón de contacto de cara*, es la razón de la anchura de cara del engrane al paso axial; está dada por

$$m_x = \frac{F}{p_x} = \frac{F \tan \psi}{p_t} \tag{8-9}$$

en donde F es la anchura de la cara. Nótese que la razón de contacto de cara depende sólo de la geometría de un solo engrane, en tanto que las razones de contacto transversal y normal dependen de la geometría de un par de engranes acoplados.

La *razón de contacto total* m_t es la suma de las razones de contacto de cara y transversal. En cierto sentido da el número total promedio de dientes en contacto.

8-5 ENGRANES DE ESPINA DE PESCADO

Los engranes *de hélice doble*, llamados también de *espina de pescado*, se componen de dientes con una hélice derecha y otra izquierda cortadas sobre el mismo disco en blanco, como se ilustra esquemáticamente en la figura 8-5. Una de las desventajas del engrane helicoidal simple es la existencia de cargas axiales de empuje (véase la figura 12-11); que se eliminan por medio de la configuración de espina de pescado, porque la fuerza de empuje de la mitad derecha es balanceada por la de la mitad izquierda. No obstante, uno de los miembros de un juego de engranes de espina de pescado debe montarse siempre con cierto juego o flotación axial para dar margen a los pequeñísimos errores de los dientes y a las tolerancias de montaje.

Los ángulos de hélice por lo común son mayores en el caso de los engranes de espina de pescado que para los engranes helicoidales simples, debido a la ausencia de las reacciones de empuje.

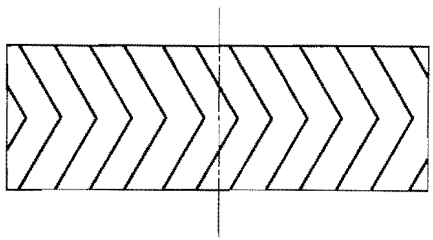


Figura 8-5 Dibujo esquemático del cilindro de paso de un engrane de hélice doble.

8-6 ENGRANES HELICOIDALES DE EJES CRUZADOS

A veces se utilizan los engranes helicoidales cruzados, o de espiral, cuando las líneas entre los centros de los ejes no son paralelas ni se intersecan. Son esencialmente engranes de gusano envolventes, porque los discos en blanco tienen una forma cilíndrica.

Los dientes de los engranes helicoidales cruzados tienen contacto puntual entre sí, que se convierte en un *contacto lineal* conforme los engranes se desgastan. Por esta razón sólo pueden soportar
del contacto puntual, no es necesario que se monten con precisión; pueden hacerse variar la distancia entre los centros, o bien, el ángulo entre los ejes ligeramente sin afectar la magnitud del contacto.

No existe diferencia entre un engrane helicoidal cruzado y un engrane helicoidal sino hasta que se montan y acoplan entre sí; es decir, se fabrican del mismo modo. Un par de engranes helicoidales cruzados acoplados por lo
mano; es decir, un impulsor derecho va con un impulsado derecho. En la figura 8-6 se muestra la relación entre el empuje, la mano y la rotación para los engranes helicoidales cruzados.

Cuando se especifican los tamaños de los dientes, siempre se debe usar el paso normal. La razón de esto es que cuando se usan ángulos de hélice diferente para el impulsor y el impulsado, los pasos transversales no son los mismos. La relación del ángulo entre los ejes y el ángulo de hélice es

$$\Sigma = \psi_2 \pm \psi_3 \tag{8-10}$$

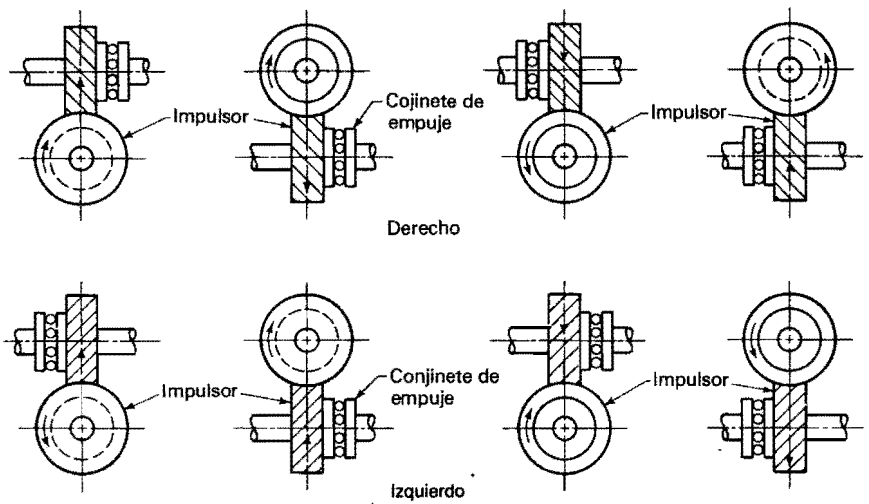


Figura 8-6 Relaciones de empuje, rotación y mano para engranaje helicoidal cruzado. (*Boston Gear Works, Inc., North Quincy, Mass.*)

en donde Σ es el ángulo entre los ejes. El signo más se usa cuando los dos ángulos de hélice son de la misma mano y el signo menos cuando son de mano opuesta. Se usan los engranes helicoidales cruzados de mano opuesta cuando el ángulo entre los ejes es pequeño.

El diámetro de paso se obtiene partiendo de

$$d = \frac{N}{P_n \cos \psi} \tag{8-11}$$

en donde N = número de dientes
P_n = paso diametral normal
ψ = ángulo de hélice

Puesto que los diámetros de paso no se relacionan directamente con los números de dientes, no es factible utilizarlos para obtener la razón de velocidades angulares. Se debe obtener esta razón de la razón de los números de dientes.

Los engranes helicoidales cruzados tendrán la velocidad de deslizamiento más baja en contacto cuando los ángulos de hélice de los dos engranes sean iguales. Si los ángulos de hélice no son iguales, el engrane que tiene el mayor ángulo de hélice debe utilizarse como el impulsor, si ambos engranes son de la misma mano.

No hay un estándar para las proporciones de los dientes de los engranes helicoidales cruzados; muchas proporciones diferentes ofrecen una buena acción de diente. Puesto que los dientes tienen contacto puntual, debe realizarse un esfuerzo por obtener una razón de contacto de 2 o más. Por esta razón, los engranes helicoidales cruzados se cortan generalmente con un ángulo de presión bajo y con dientes profundos. Dudley† da una lista de las proporciones de los dientes, que se presenta en la tabla 8-1 como representativas de un buen diseño. Los números de

Tabla 8-1 Proporciones de los dientes para engranes helicoidales de ejes cruzados

Paso diametral normal $P_n = 1$; altura de trabajo = 2.400 pulg; altura total = 2.650 pulg; addendum = 1.200 pulg.

Impulsor			
Ángulo de hélice ψ_2, grados	Número mínimo de dientes	Ángulo de hélice del impulsado ψ_3, grados	Ángulo de presión normal ϕ_n, grados
45	20	45	14.50
60	9	30	17.50
75	4	15	19.50
86	1	4	20

† Darle W. Dudley, *Practical Gear Design*, p. 111. McGraw-Hill, New York, 1954.

dientes para el impulsor ahí indicados son el mínimo requerido para evitar la socavación. El engrane impulsado debe tener 20 o más dientes, si se desea obtener una razón de contacto de 2.

8-7 ENGRANAJE DE GUSANO

En la figura 8-7 se muestra una aplicación de un gusano y su engrane. Estos engranes se emplean con ejes que no se intersecan, y que forman casi siempre un ángulo entre los ejes de 90°; pero no existe razón alguna por la que no se puedan usar otros ángulos entre los ejes, si el diseño así lo requiere.

El gusano es el miembro que tiene una rosca tipo tornillo y, con frecuencia, a los dientes del gusano se les menciona como roscas. Los gusanos de uso común tienen de uno a ocho dientes y, como se verá más adelante, no existe una relación definida entre el número de dientes y el diámetro de paso de un gusano. Los gusanos se pueden diseñar con una superficie de paso cilíndrica, como se muestra en la figura 8-8, o bien, pueden tener la forma de un reloj de arena, de tal manera que el gusano envuelva o encierre parcialmente a su engrane.

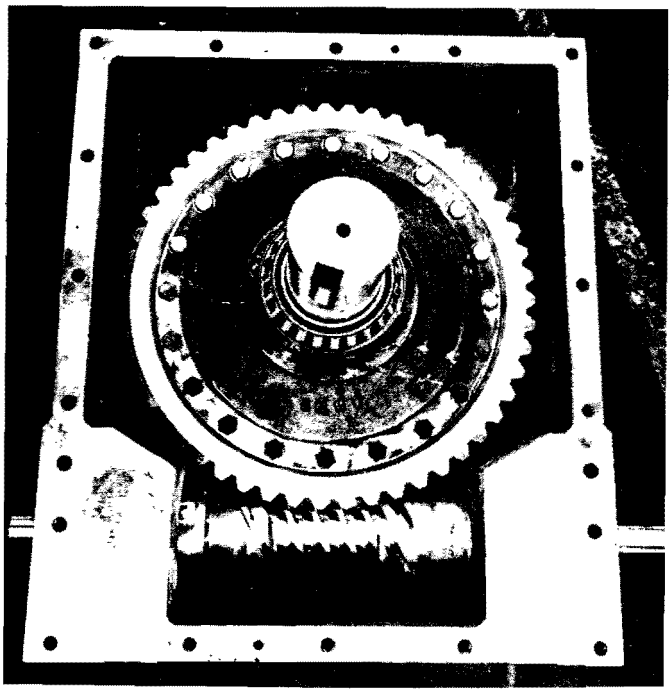


Figura 8-7 Gusano y su engrane de envolvente simple. (*The Falk Corporation, Subsidiaria de la Sundstrand Corporation, Milwaukee, Wis.*)

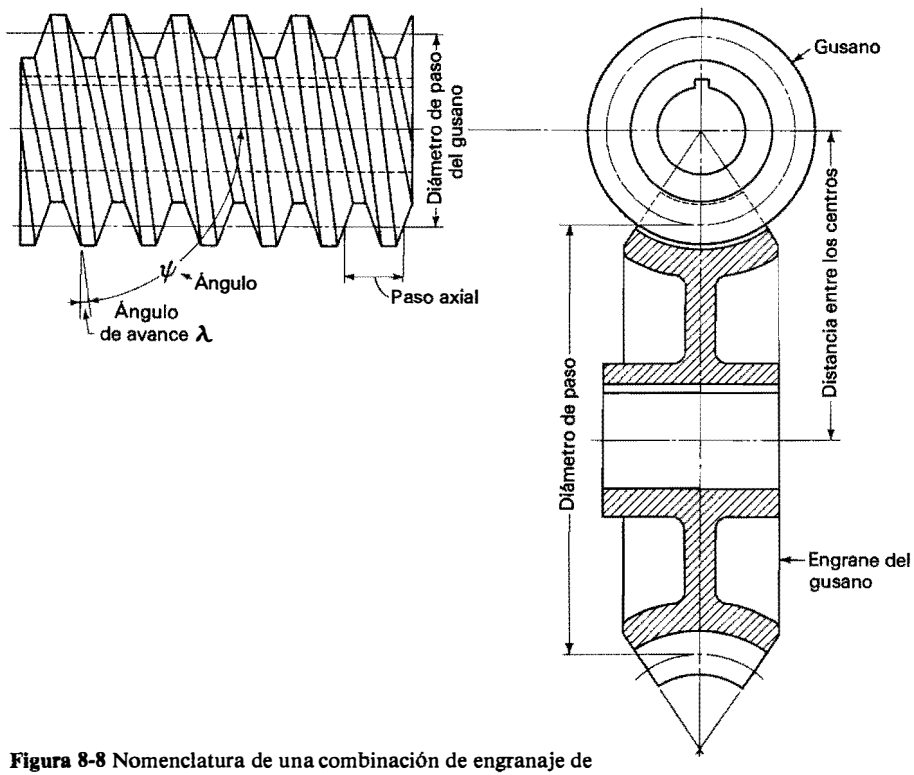


Figura 8-8 Nomenclatura de una combinación de engranaje de gusano de envolvente simple.

El engrane del gusano es casi siempre el miembro impulsado del par, y se hace de manera que envuelva al gusano. Si el engrane se acopla con un gusano cilíndrico, se dice que el conjunto es de *envolvente simple*. Cuando el gusano tiene la forma de un reloj de arena, se dice que el conjunto es de *doble envolvente* porque cada miembro envuelve al otro.

Una combinación de gusano y engrane es similar a un par de engranes helicoidales cruzados acoplados, excepto en que el engrane del gusano envuelve parcialmente a éste. Por esta razón tienen un contacto lineal, en lugar del contacto puntual que se encuentra en los engranes helicoidales cruzados y, por consiguiente, son capaces de transmitir más potencia. Cuando se usa una combinación doble envolvente, incluso se puede transmitir más potencia, por lo menos teóricamente, porque el contacto ocurre sobre un área de las superficies de los dientes.

En la combinación unienvolvente no existe diferencia alguna en si el gusano gira sobre su propio eje e impulsa al engrane mediante una acción de tornillo, o bien, si el gusano se traslada a lo largo de su eje e impulsa al gusano mediante una acción de cremallera. El movimiento y el contacto resultantes son los mismos. Por esta razón, no es necesario que el gusano se monte exactamente sobre su eje. Sin

embargo, el engrane debe estar correctamente montado a lo
rotación; de lo
al eje del gusano.

En una combinación doble envolvente, los dos miembros están angostados y, por ende, deben montarse con exactitud en cada dirección con el fin de obtener una acción correcta.

En la figura 8-8 se muestra la nomenclatura de un juego unienvolvente.

El gusano acoplado y el engrane del gusano con un ángulo entre los ejes de 90° tienen la misma mano de la hélice; pero los ángulos de hélice son por lo bastante diferentes. En el gusano, el ángulo de hélice es muy grande (al menos para uno o dos dientes) y muy pequeño en el engrane. Debido a esto, se acostumbra especificar el *ángulo de avance* para el gusano y el ángulo de hélice para el engrane. Esto es conveniente porque, para un ángulo entre los ejes de 90°, ambos son iguales. El ángulo de avance de gusano es el complemento del ángulo de hélice del mismo, como se indica en la figura 8-8.

Al especificar el paso de los juegos de engranes de gusano, especifíquese el paso axial del gusano y el paso circular del engrane. Cuando el ángulo entre los ejes es de 90°, éstos son iguales. Es bastante común emplear incluso fracciones para el paso circular, como por ejemplo. $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$ pulg. etc. Sin embargo, no hay razón alguna por la que no se puedan usar pasos diametrales estándar, como los que se utilizan para los engranes rectos. El diámetro de paso del engrane es el mismo que el correspondiente a los engranes rectos:

$$d_3 = \frac{N_3 p}{\pi} \tag{8-12}$$

en donde d_3 = diámetro de paso
N_3 = número de dientes
p = paso circular

todos tomados con referencia al engrane del gusano.

El diámetro de paso del gusano puede tener cualquier valor; pero debe ser el mismo que el de la fresa maestra, que se use para cortar los dientes del engrane del gusano. La *AGMA* recomienda la siguiente relación entre el diámetro de paso del gusano y la distancia entre los centros:

$$d_2 = \frac{(r_2 + r_3)^{0.875}}{2.2} \tag{8-13}$$

en donde la cantidad $r_2 + r_3$ es la distancia entre los centros. Esta ecuación da un conjunto de proporciones que darán como resultado una buena capacidad de potencia. No es obligatorio usar la ecuación (8-13); otras proporciones que también darán buenos resultados y, de hecho, puede que no sea siempre la capacidad de potencia la consideración primaria. Sin embargo, hay muchas variables en el diseño del engrane del gusano y la ecuación es útil para obtener dimensiones ten-

tativas. La norma *AGMA*† afirma también que el denominador de la ecuación (8-13) puede variar de 1.7 a 3, sin que se afecte apreciablemente la capacidad.

El *avance* de un gusano tiene el mismo significado que para una rosca de tornillo y es la distancia que se desplazará un punto sobre la hélice cuando se hace dar al gusano una revolución completa. Por ende, para un gusano de un diente, el avance es igual al paso axial. En forma de ecuación,

$$l = p_x N_2 \tag{8-14}$$

en donde l es el avance en pulgadas y N_2 es el número de dientes del gusano. El avance y el ángulo de avance están relacionados de la manera siguiente:

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{l}{\pi d_2} \tag{8-15}$$

en donde λ es el ángulo de avance, como se muestra en la figura 8-8.

Los dientes de los gusanos se cortan casi siempre en una fresadora o en un torno. Los dientes del engrane del gusano se producen casi siempre con fresa maestra. A excepción de la holgura en la punta del diente de la fresa maestra, el gusano debe ser un duplicado exacto de la la fresa maestra con el fin de obtener una acción conjugada. Eso significa también que, siempre que sea posible, el gusano debe diseñarse utilizando las dimensiones de las fresas maestras existentes.

Los ángulos de presión utilizados en los juegos de engranes de gusano varían enormemente, y deben depender en forma aproximada del valor del ángulo de avance. Se obtendrá una buena acción del diente si el ángulo de presión se hace lo suficientemente grande como para eliminar la socavación del diente del engrane del gusano en el lado en el que termina el contacto. Buckingham recomienda los valores que se dan en la tabla 8-2.

Se puede obtener una altura de diente satisfactoria que siga teniendo aproximadamente la proporción correcta respecto al ángulo de avance, haciendo que la altura sea una proporción del paso circular normal. Con un addendum de $1/P$ para engranes rectos de altura completa, se obtienen las proporciones siguientes para el gusano y el engrane del gusano:

Tabla 8-2 Angulos de presión recomendados para los engranajes de gusano

Ángulo de avance λ, grados	Ángulo de presión ϕ, grados
0–16	$14\frac{1}{2}$
16–25	20
25–35	25
35–45	30

† AGMA Standard 213.02, 1952.

$$\text{Addendum} = 0.3183p_n$$

$$\text{Altura completa} = 0.6366p_n$$

$$\text{Holgura} = 0.050p_n$$

La anchura de la cara del engrane del gusano se debe obtener como se indica en la figura 8-9. Esto hace que la cara del engrane del gusano tenga la misma longitud que una tangente al círculo de paso del gusano entre sus puntos de intersección con el círculo de addendum.

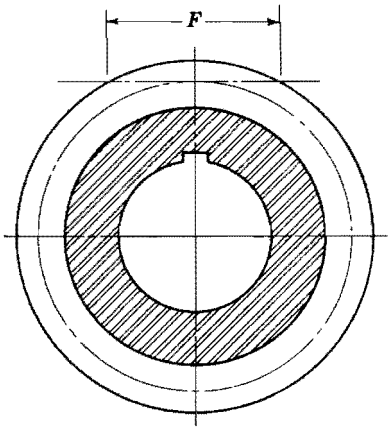


Figura 8-9

8-8 ENGRANES CONICOS DE DIENTES RECTOS

Cuando se debe transmitir movimiento entre flechas o barras cuyos ejes se intersecan, se necesita alguna forma de engrane cónico. Aunque con frecuencia los engranes cónicos se fabrican para un ángulo entre los ejes de 90°, se pueden producir casi para cualquier ángulo. Los dientes más exactos se obtienen por generación.

Los engranes cónicos tienen superficies de paso que son conos; estos conos ruedan juntos sin resbalar, como se indica en la figura 8-10. Los engranes se deben montar de tal manera que los vértices de los dos conos de paso coincidan, porque el paso de los dientes depende de la distancia radial al vértice.

La verdadera forma del diente de un engrane cónico se obtiene tomando una sección esférica que pase por el diente, en donde el centro de la esfera se localice en el vértice común, como se muestra en la figura 8-11. Por consiguiente, conforme el radio de la esfera aumenta, debe existir el mismo número de dientes en una superficie mayor; de donde, el tamaño de los dientes aumenta conforme se toman secciones esféricas cada vez mayores. Se ha visto que las condiciones de acción y contacto de los dientes de engrane rectos se pueden representar sobre una superficie

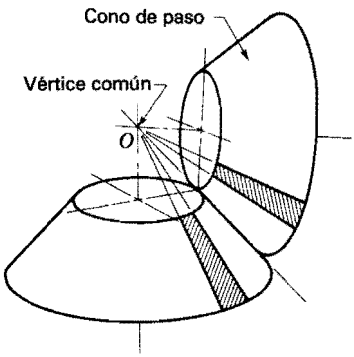


Figura 8-10 Las superficies de paso de los engranes cónicos son conos que tienen un contacto de rodamiento puro.

plana tomada a ángulos rectos con los ejes de los engranes rectos. En el caso de los dientes de engranes cónicos, las condiciones de acción y contacto se deben representar sobre una superficie esférica (en lugar de una superficie plana). Incluso es factible tomar a los engranes rectos como un caso especial de los engranes cónicos en el que el radio de la esfera es infinito, produciendo así una superficie plana sobre la que se representa la acción del diente.

Es práctica estándar especificar el diámetro de paso de los engranes cónicos en el extremo mayor de los dientes. En la figura 8-12 se dibujaron los conos de paso de un par de engranes cónicos y los radios de paso se dan como r_2 y r_3, respectivamente, para el piñón y el engrane. Los ángulos γ_2 y γ_3 se definen como los *án-*

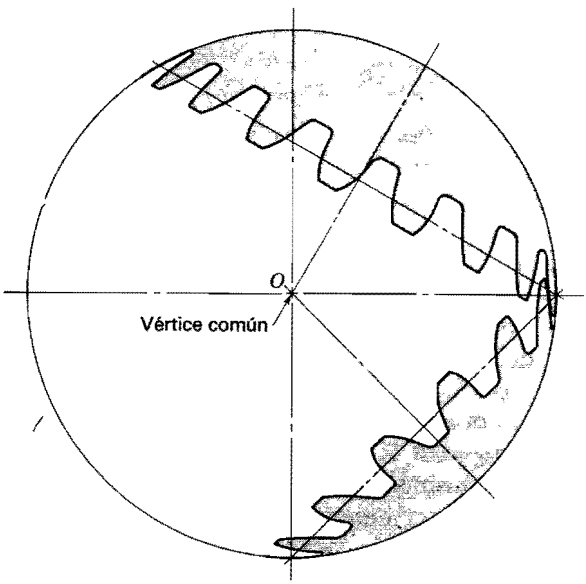


Figura 8-11 Sección esférica de los dientes de engranes cónicos.

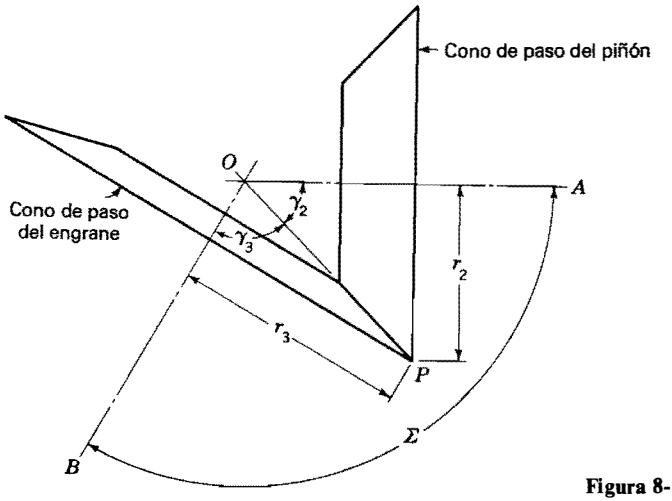


Figura 8-12

gulos de paso y su suma es igual al ángulo entre los ejes Σ. La razón de velocidades se obtiene de la misma manera que para los engranes rectos, y es

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{N_3}{N_2} \tag{8-16}$$

En el diseño cinemático de los engranes, casi siempre se dan los números de dientes de cada engrane y el ángulo entre los ejes, y se deben determinar los ángulos de paso correspondientes. Aunque éstos se pueden calcular con facilidad aplicando un método gráfico, el procedimiento analítico proporciona valores exactos. Según la figura 8-12, la distancia OP se puede escribir

$$OP = \frac{r_2}{\operatorname{sen}\gamma_2} \qquad \text{or} \qquad OP = \frac{r_3}{\operatorname{sen}\gamma_3}$$

de tal manera que

$$\operatorname{sen}\gamma_2 = \frac{r_2}{r_3}\operatorname{sen}\gamma_3 = \frac{r_2}{r_3}\operatorname{sen}(\Sigma - \gamma_2) \tag{a}$$

o bien,

$$\operatorname{sen}\gamma_2 = \frac{r_2}{r_3}(\operatorname{sen}\Sigma\cos\gamma_2 - \operatorname{sen}\gamma_2\cos\Sigma) \tag{b}$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación (b) entre cos γ_2 y reacomodando sus términos, se obtiene

$$\tan\gamma_2 = \frac{\operatorname{sen}\Sigma}{(r_3/r_2) + \cos\Sigma} = \frac{\operatorname{sen}\Sigma}{(N_3/N_2) + \cos\Sigma} \tag{8-17}$$

De manera análoga,

$$\tan \gamma_3 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{(N_2/N_3) + \cos \Sigma} \tag{8-18}$$

Para un ángulo entre los ejes de 90°, las expresiones anteriores se reducen a

$$\tan \gamma_2 = \frac{N_2}{N_3} \tag{8-19}$$

y

$$\tan \gamma_3 = \frac{N_3}{N_2} \tag{8-20}$$

La proyección de los dientes de engranes cónicos sobre la superficie de una esfera sería, de hecho, un problema difícil y tardado. Por fortuna, se dispone de una aproximación que reduce el problema al de los engranes rectos ordinarios. Este método se conoce como *aproximación de Tredgold* y, siempre y cuando el engrane tenga ocho o más dientes, es lo suficientemente exacto para fines prácticos. Su aplicación es casi universal y la terminología de los dientes de engranes cónicos se ha desarrollado en torno al mismo.

Al utilizar el método de Tredgold, se forma un *cono posterior* de elementos perpendiculares a los del cono de paso en el extremo grande del diente; lo que se ilustra en la figura 8-13. La longitud del elemento de un cono posterior se conoce con el nombre de *radio del cono posterior*. A continuación se construye un engrane recto equivalente cuyo radio de paso r_e es igual al radio del cono posterior. Por consiguiente, partiendo de un par de engranes cónicos se puede obtener, mediante la aproximación de Tredgold, un par de engranes rectos equivalentes, que entonces se usan para definir los perfiles de los dientes; también se pueden usar para determinar las condiciones de acción y contacto del diente, exactamente en la misma forma que en el caso de los engranes rectos ordinarios, y los resultados corresponderán casi por completo con los de los engranes cónicos. Para la geometría indicada en la figura 8-13, los radios de paso equivalentes son

$$r_{e_2} = \frac{r_2}{\cos \gamma_2} \qquad r_{e_3} = \frac{r_3}{\cos \gamma_3} \tag{8-21}$$

El número de dientes en el engrane recto equivalente es

$$N_e = \frac{2\pi r_e}{p} \tag{8-22}$$

en donde p es el paso circular del engrane cónico medido en el extremo grande de los dientes. En caso usual, los engranes rectos equivalentes *no* tendrán un número entero de dientes.

8-9 PROPORCIONES DE LOS DIENTES EN LOS ENGRANES CÓNICOS

Prácticamente todos los engranes cónicos de dientes rectos que se fabrican hoy en día utilizan el ángulo de presión de 20°. No es necesario emplear la forma de dien-

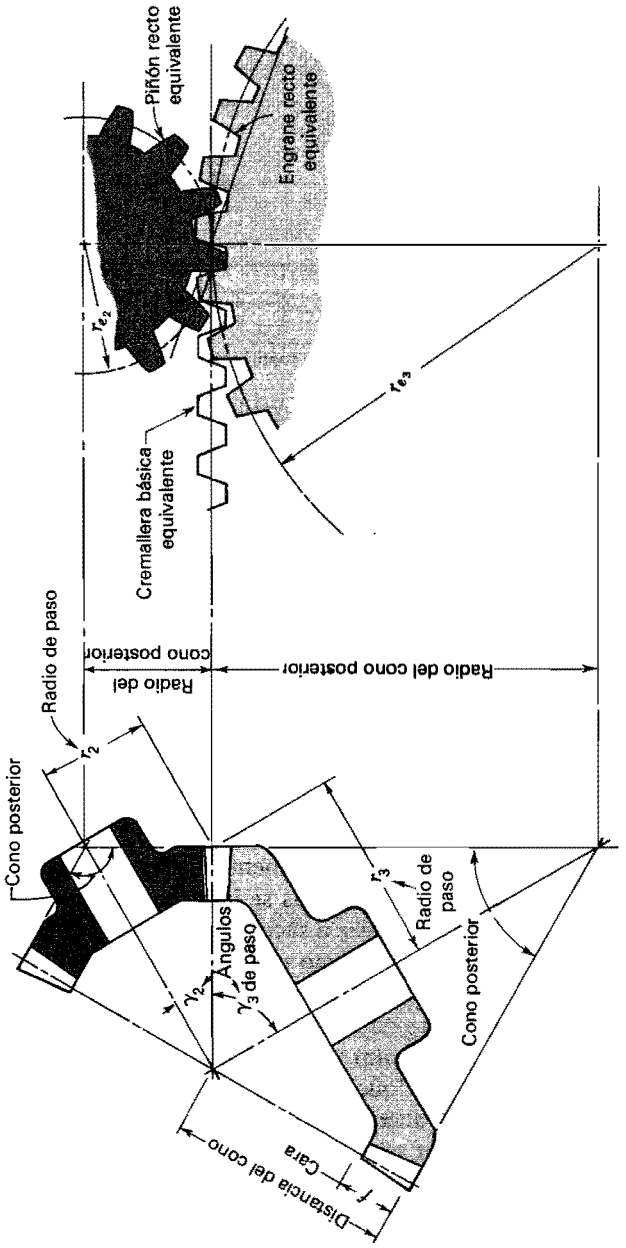


Figura 8-13 Aproximación de Tredgold.

Tabla 8-3 Proporciones de los dientes, para dientes rectos de 20° de engranes cónicos

Concepto	Fórmula
Altura de trabajo	$h_k = \frac{2.0}{P}$
Holgura	$c = \frac{0.188}{P} + 0.002$ Pulg
Addendum del engrane	$a_G = \frac{0.54}{P} + \frac{0.460}{P(m_{90})^2}$
Razón del engrane	$m_G = \frac{N_G}{N_P}$
Razón equivalente de 90°	$m_{90} = \begin{cases} m_G & \text{cuando } \Sigma = 90° \\ \sqrt{m_G \frac{\cos \gamma_P}{\cos \gamma_G}} & \text{cuando } \Sigma \neq 90° \end{cases}$
Anchura de la cara	$F = \frac{l}{3}$ o $F = \frac{10}{P}$ la que sea menor
Número mínimo de dientes	Piñón: 16, 15, 14, 13 / Engrane: 16, 17, 20, 30

te intercambiable porque, de cualquier manera, los engranes cónicos no se pueden intercambiar. Por esta razón se utiliza el sistema de addendum largo y corto que se describió en la sección 7-11. En la tabla 8-3 se presenta una tabulación de estas proporciones.

Los engranes cónicos se montan usualmente sobre el lado exterior de los cojinetes, debido a que los ejes de las flechas se intersecan, y esto significa que el efecto de la deflexión de flecha es tender a sacar el extremo pequeño de los dientes del endentamiento, haciendo que el extremo mayor lleve la mayor parte de la carga. Por ende, la carga a través del diente es variable y, por esta razón, es conveniente diseñar un diente un tanto corto. Como se muestra en la tabla 8-3, la anchura de la cara se limita por lo común a aproximadamente un tercio de la distancia del cono. Se observa también que una anchura de cara corta simplifica los problemas del trabajo a máquina al cortar los dientes de un engrane cónico.

En la figura 8-14 se definen otros términos característicos de los engranes cónicos. Obsérvese que se mantiene una holgura constante haciendo que los elementos del cono de la cara sean paralelos a los elementos del cono de la raíz del engrane endentado. Esto explica por qué el vértice del cono de la cara no coinciden con el del cono de paso en la figura 8-14. Esto permite un chaflán más grande en el extremo pequeño del diente, que el que de lo contrario, se obtendría.

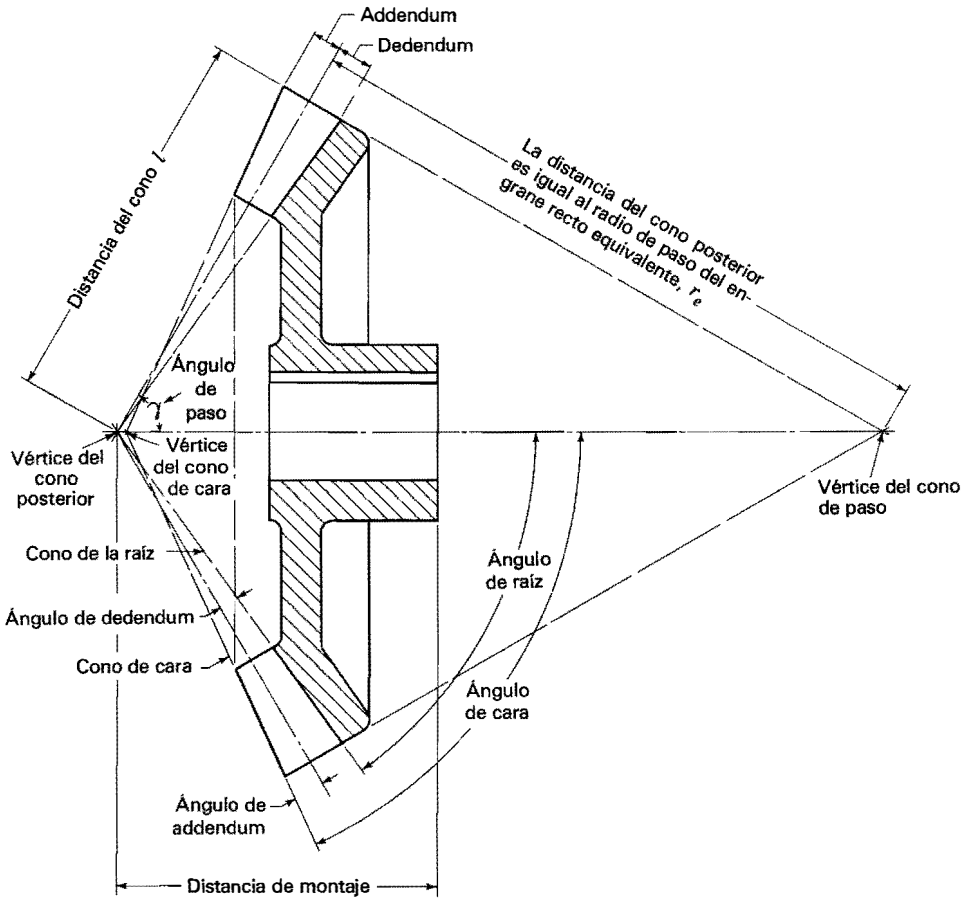


Figura 8-14

8-10 CORONA DENTADA Y ENGRANES DE CARA

Si el ángulo de paso de un par de engranes cónicos se hace igual a 90°, el cono de paso se convierte en una superficie plana y el engrane resultante recibe el nombre de *corona dentada.* En la figura 8-15 se presenta una corona dentada acoplada con un piñón cónico. Nótese que una corona dentada es el equivalente a una cremallera en el engranaje recto. El cono posterior de una corona dentada es un cilindro y el diente de involuta resultante tiene lados rectos, como se indica en la figura 8-13.

Se puede obtener un juego de engranes pseudocónicos utilizando un engrane de cara endentado con un engrane recto. El ángulo entre los ejes es de 90°. Para

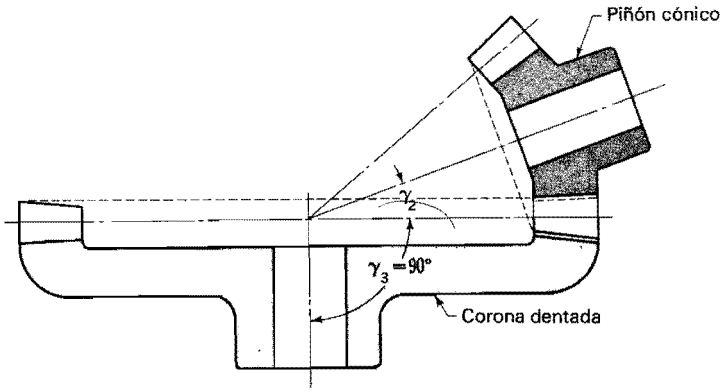


Figura 8-15 Corona dentada y piñón cónico.

asegurar la mejor acción de los dientes, el piñón recto debe ser un duplicado del cortador limador utilizado para cortar el engrane de cara, con excepción, por supuesto, de la holgura adicional en las puntas de los dientes del cortador. La anchura de cara de los dientes en el engrane de cara se debe mantener más bien corta; de lo contrario, el borde superior se hará puntiagudo en el diámetro mayor.

8-11 ENGRANES CÓNICOS ESPIRALES

Los engranes cónicos rectos son fáciles de diseñar y sencillos para fabricarse, y dan muy buenos resultados en operación si se montan exacta y positivamente. Sin embargo, como en el caso de los engranes rectos, se hacen ruidosos en los valores más elevados de la velocidad de la línea de paso. En estos casos, a menudo resulta una buena práctica de diseño recurrir al engrane cónico espiral, que es el equivalente cónico del engrane helicoidal. En la figura 8-16 se muestra un par endentado de engranes cónicos espirales, y en ella se puede ver que las superficies de paso y la naturaleza del contacto son iguales que para los engranes cónicos rectos, excepto por las diferencias introducidas por los dientes de forma espiral.

Los dientes de los engranes cónicos espirales se conjugan con una cremallera de corona básica, que se genera como se indica en la figura 8-17, utilizando un cortador circular. El ángulo de espiral ψ se mide en el radio medio del engrane. Al igual que en los engranes helicoidales, los cónicos espirales dan una acción de diente mucho más suave que los engranes cónicos rectos y, por consiguiente, son útiles en las situaciones en que se encuentran velocidades elevadas. Para obtener una verdadera acción de diente espiral, la razón de contacto en la cara debe ser de por lo menos 1.25.

Los ángulos de presión usados con los engranes cónicos espirales son por lo común $14\frac{1}{2}$ a 20°, mientras que el ángulo de espiral es de aproximadamente 30 ó

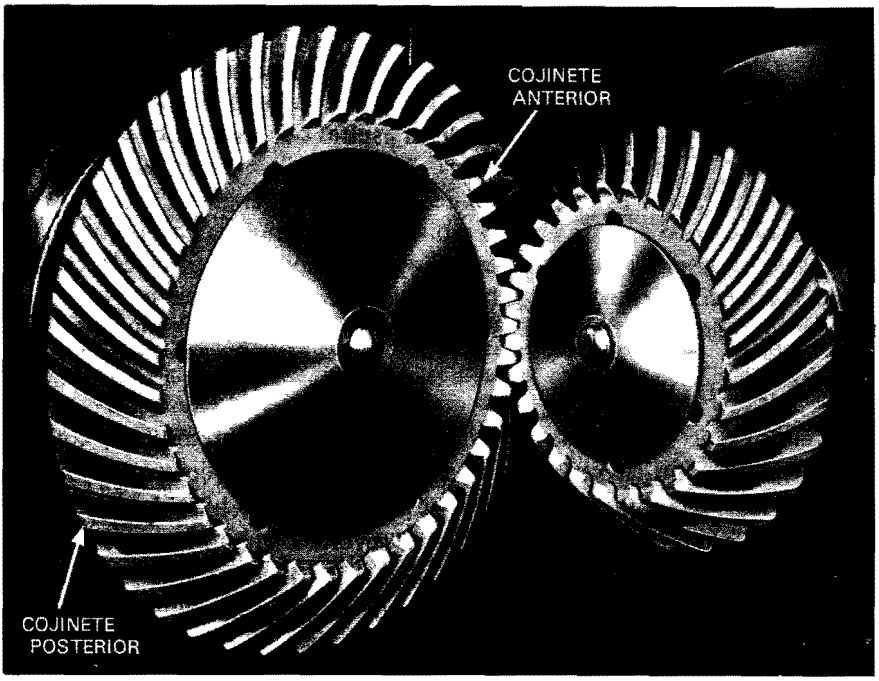


Figura 8-16 Engranes cónicos espirales. (*Gleason Works, Rochester, N.Y.*)

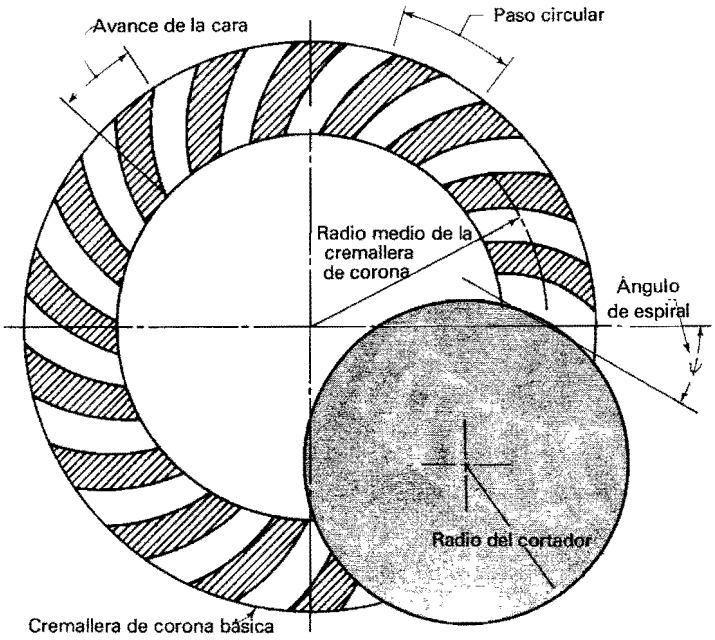


Figura 8-17 Corte de dientes de un engrane espiral sobre la cremallera de corona básica.

35°. Por lo que concierne a la acción del diente, la mano de la espiral puede ser derecha o izquierda, y esto no provoca diferencia alguna. Sin embargo, si los cojinetes están flojos, los dientes podrían atascarse o separarse, dependiendo de la dirección de la rotación y la mano de la espiral. Puesto que el atascamiento de los dientes causaría el mayor daño, la mano de la espiral debe ser tal que los dientes tiendan a separarse.

Engranes cónicos Zerol El engrane cónico Zerol es un engrane patentado que tiene dientes curvos; pero con un ángulo espiral de cero grados. Por lo que respecta a la acción de los dientes, no tiene ventaja alguna sobre el engrane cónico recto y se ha diseñado sencillamente para aprovechar la maquinaria cortadora que se usa para producir engranes cónicos espirales.

8-12 ENGRANES HIPOIDALES

Como en el caso de las aplicaciones en los diferenciales de automóviles, con frecuencia conviene tener un engrane similar a los cónicos, pero con los ejes descentrados o excéntricos. Este tipo de engranes se conocen como hipoidales debido a que sus superficies de paso son hiperboloides de revolución. La acción de los dientes entre este tipo de engranes es una combinación de rodadura y deslizamiento a lo largo de una recta, y tiene mucho en común con la de los engranes del gusano. En la figura 8-18 se ilustra un par de engranes hipoidales.

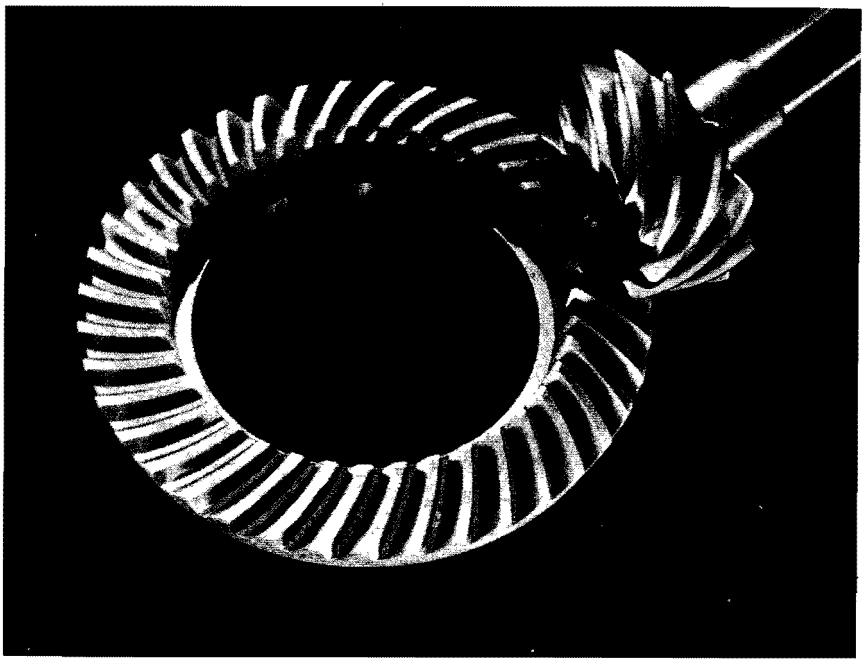


Figura 8-18 Engranes hipoidales. (*Gleason Works, Rochester, N.Y.*)

PROBLEMAS

8-1 Un par de engranes helicoidales paralelos tiene un ángulo de presión normal de $14\frac{1}{2}°$, 6 de paso diametral y un ángulo de hélice de 45°. El piñón tiene 15 dientes y el engrane 24. Calcúlese el paso circular transversal y normal, el paso diametral normal, los diámetros de paso y los números equivalentes de dientes.

8-2 Un par de engranes helicoidales paralelos se cortan con un ángulo de presión normal de 20° y un ángulo de hélice de 30°. Tienen un paso diametral de 16 y, respectivamente, 16 y 40 dientes. Se debe encontrar el ángulo de presión transversal, el paso circular normal, el paso axial y los radios de paso de los engranes rectos equivalentes.

8-3 Un juego de engranes helicoidales paralelos se fabrica con un ángulo de presión transversal de 20° y un ángulo de hélice de 35°. Los engranes tienen un paso diametral de 10 y 15 y 25 dientes, respectivamente. Si la anchura de la cara es de $\frac{3}{4}$ pulg, calcúlese el ángulo de hélice de base y la razón de contacto axial.

8-4 Se va a cortar un par de engranes helicoidales para ejes paralelos cuya distancia entre los centros debe ser de aproximadamente $3\frac{1}{2}$ pulg, para obtener una razón de velocidades de 1.80, aproximadamente. Los engranes se deben cortar con una fresa maestra con un ángulo de presión estándar de 20° cuyo paso diametral es de 8. Con un ángulo de hélice de 30°, determínense los valores transversales del paso diametral y del circular, así como los números de dientes, los diámetros de paso y la distancia entre los centros.

8-5 Un piñón helicoidal de 16 dientes va a girar a 1 800 rpm e impulsará a un engrane helicoidal sobre un eje paralelo a 400 rpm. Los centros de los ejes deben tener una separación de 11 pulg. Utilizando un ángulo de hélice de 23° y un ángulo de presión de 20°, determínense valores para los números de dientes, diámetros de paso, paso circular y diametral normales, y la anchura de la cara.

8-6 La descripción en un catálogo de un par de engranes helicoidales es la siguiente: ángulo de presión normal $14\frac{1}{2}°$, ángulo de hélice 45°, paso diametral de 8, anchura de cara, 1 pulg, paso diametral normal, 11.31. El piñón tiene 12 dientes y un diámetro de paso de 1.500 pulg, y el engrane cuenta con 32 dientes, un diámetro de paso de 4.000 pulg. Los dos engranes tienen dientes de altura completa y se pueden comprar ya sea de mano derecha o izquierda. Si se acopla un piñón derecho con un engrane izquierdo, encuéntrese la razón de contacto transversal, la razón de contacto normal, la razón de contacto axial y la razón de contacto total.

8-7 En la transmisión de un camión de tamaño mediano se tiene un engrane del vástago del embrague de 22 dientes, que se endenta continuamente con un engrane de contramarcha de 41 dientes. Los datos son: paso diametral normal, 7.6, ángulo de presión normal, $18\frac{1}{2}°$; ángulo de hélice, $23\frac{1}{2}°$; y anchura de la cara 1.12 pulg. El engrane del vástago del embrague se corta con una hélice izquierda y el engrane de contramarcha con una hélice derecha. Determínense la razón de contacto normal y la total si los dientes se cortan de altura completa con respecto al paso diametral normal.

8-8 Un piñón helicoidal es derecho, tiene 12 dientes, un ángulo de hélice de 60° y debe impulsar a otro engrane con una razón de velocidades de 3. Los ejes forman un ángulo de 90° y el paso diametral normal de los engranes es 8. Encuéntrese el ángulo de hélice y el número de dientes del engrane acoplado. ¿Cuál es la distancia entre los centros?

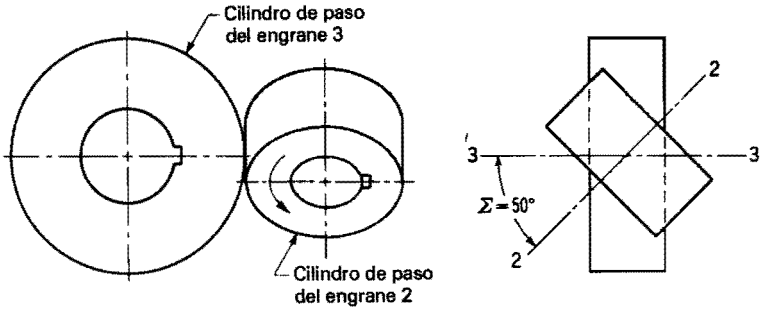
8-9 Un piñón helicoidal derecho debe impulsar a un engrane, con un ángulo entre ejes de 90°. El piñón tiene 6 dientes y un ángulo de hélice de 75°, y debe impulsar el engrane con una razón de velocidades de 6.5. El paso diametral normal de los engranes es 12. Calcúlese el ángulo de hélice y el número de dientes del engrane acoplado; determínese el diámetro de paso de cada engrane.

8-10 El engrane 2 de la figura (pág. 324) debe girar en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj e impulsar al engrane 3 en el sentido contrario, con una razón de velocidades de 2.

Úsese un paso diametral de 5, una distancia entre los centros de aproximadamente 10 pulg y el mismo ángulo de hélice en ambos engranes. Encuéntrense los números de dientes, los ángulos de hélice y la distancia exacta entre los centros.

8-11 Un gusano que tiene 4 dientes y un avance de 1 pulg impulsa a un engrane con una razón de velocidades de $7\frac{1}{2}$. Determínense los diámetros de paso del gusano y del engrane para una distancia entre los centros de $1\frac{3}{4}$ pulg.

8-12 Especifíquese un gusano apropiado para una combinación engrane-gusano, para una razón de velocidades de 60 y distancia entre los centros de $6\frac{1}{2}$ pulg. Úsese un paso axial de 0.500 pulg.



Problema 8-10

8-13 Un gusano de 3 dientes impulsa a un engrane que tiene 40 dientes. El paso axial es $1\frac{1}{4}$ pulg y el diámetro de paso del gusano es $1\frac{3}{4}$ pulg. Calcúlese el avance y el ángulo de avance del gusano. Encuéntrese el ángulo de hélice así como el diámetro de paso del engrane.

8-14 Se va a fabricar un par de engranes cónicos de dientes rectos para un ángulo entre los ejes de 90°. Si el impulsor debe tener 18 dientes y la razón de velocidades es de 3, ¿cuáles son los ángulos de paso?

8-15 Un par de engranes cónicos de dientes rectos tiene una razón de velocidades de 1.5 y un ángulo entre los ejes de 75°. ¿Cuáles son los ángulos de paso?

8-16 Se debe montar un par de engranes cónicos rectos con un ángulo entre ejes de 120°. El piñón y el engrane deben tener, respectivamente, 15 y 33 dientes, ¿Cuáles son los ángulos de paso?

8-17 Un par de engranes cónicos rectos con paso diametral de 2 tienen 19 y 28 dientes, respectivamente. El ángulo entre los ejes es de 90°. Determínense los diámetros de paso, los ángulos de paso, el addendum, el dedendum, la anchura de la cara y los diámetros de paso de los engranes rectos equivalentes.

8-18 Un par de engranes cónicos rectos de paso diametral 8 tiene 17 y 28 dientes, respectivamente, y un ángulo entre los ejes de 105°. Calcúlese para cada engrane el diámetro de paso, el ángulo de paso, el addendum, el dedendum, la anchura de la cara y el número equivalente de dientes. Hágase un diagrama de los dos engranes endentados. Úsese las proporciones estándar de los dientes como para un ángulo entre los ejes de 90°.

CAPÍTULO

NUEVE

TRENES DE MECANISMOS

Trenes de mecanismos son todos aquellos mecanismos que se disponen en diversas combinaciones en serie y en paralelo, de tal manera que el elemento impulsado de uno de los mecanismos es el impulsor de otro. Con ciertas excepciones, que se van a estudiar a fondo, el análisis de estos trenes se puede realizar en forma de cadena, aplicando los métodos de análisis desarrollados en los capítulos previos.

9-1 TRENES DE ENGRANES DE EJES PARALELOS Y DEFINICIONES

En el capítulo 3 se estudió que *razón de velocidades angulares* es un término utilizado para describir la cantidad que resulta cuando la velocidad angular de un elemento impulsado se divide entre la velocidad angular del elemento impulsor. Por consiguiente, en un eslabonamiento de cuatro barras, en el que el eslabón 2 es el elemento impulsor, o de entrada, y el eslabón 4 se considera como el elemento impulsado, o de salida, la razón de velocidades angulares es

$$e = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} \qquad (a)$$

En este capítulo se han suprimido los segundos subíndices de la ecuación (*a*) para simplificar la notación. Asimismo, en el caso del engranaje, es más conveniente tratar con la velocidad y, por tanto, se empleará el símbolo n para describir la velocidad en revoluciones por minuto (rpm) o, en algunos casos, en revoluciones por segundo (r/s o $1/s$). Por ende, es preferible escribir la (*a*) como

$$e = \frac{n_L}{n_F} \qquad (9\text{-}1)$$

en donde n_L es la velocidad del *último* engrane de un tren y n_F es la velocidad del primer engrane del mismo tren. Comúnmente, el último engrane es la salida y es el engrane impulsado, y el primero es el impulsor o de entrada.

El término e definido por la ecuación (9-1) recibe a veces el nombre de *razón de velocidades* o bien, *valor del tren.* Ambos términos son perfectamente adecuados. La ecuación se escribe a menudo en la forma más conveniente.

$$n_L = en_F \tag{9-2}$$

Considérese ahora un piñón 2 que impulsa a un engrane 3. La velocidad del engrane impulsado es

$$n_3 = \frac{N_2}{N_3} n_2 = \frac{d_2}{d_3} n_2 \tag{b}$$

en donde N es el número de dientes, d es el diámetro de paso y n puede ser las revoluciones por minuto o el número total de vueltas. En el caso de engranajes con ejes paralelos, se puede tener presentes las direcciones especificando que la velocidad es positiva o negativa, dependiendo de si la dirección es en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj o en el mismo sentido. Este método no es aplicable cuando los ejes de los engranes no son paralelos entre sí, como sucede, por ejemplo, en los engranajes cónicos, helicoidales cruzados o de gusano. Por estas razones, a menudo es más sencillo tener presentes las direcciones utilizando un esquema del tren.

El tren que se muestra en la figura 9-1 se compone de cinco engranes. Si se aplica la (*b*) en forma de cadena, se encuentra que la velocidad del engrane 6 es

$$n_6 = \frac{N_2}{N_3}\frac{N_4}{N_5}\frac{N_5}{N_6} n_2 \tag{c}$$

En este caso se observa que el engrane 5 es un engrane loco y que sus números de dientes se cancelan en la ecuación (c) y, por ende, sólo tiene la función de cambiar la dirección de rotación del engrane 6. También se observa que los engranes 2, 4 y 5 son *impulsores,* en tanto que los 3, 5 y 6 son *elementos impulsados.* Por ende, la ecuación (9-1) se puede escribir también

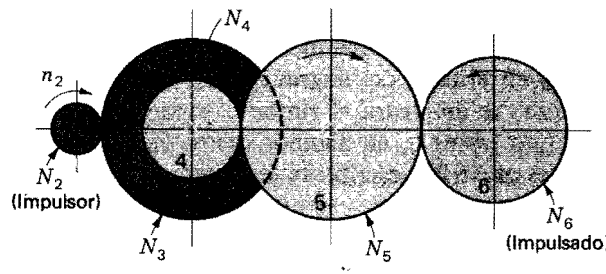


Figura 9-1

$$e = \frac{\text{producto de los números de dientes de los impulsores}}{\text{producto de los números de dientes de los impulsados}} \qquad (9\text{-}3)$$

Nótese en la (*b*) que también se pueden usar los diámetros de paso en la (9-3). Para engranaje con ejes paralelos se usará la siguiente *convención de los signos.* Si el último engrane gira en el mismo sentido que el primero, *e* es positivo; si el último engrane gira en sentido opuesto al primero, *e* es negativo.

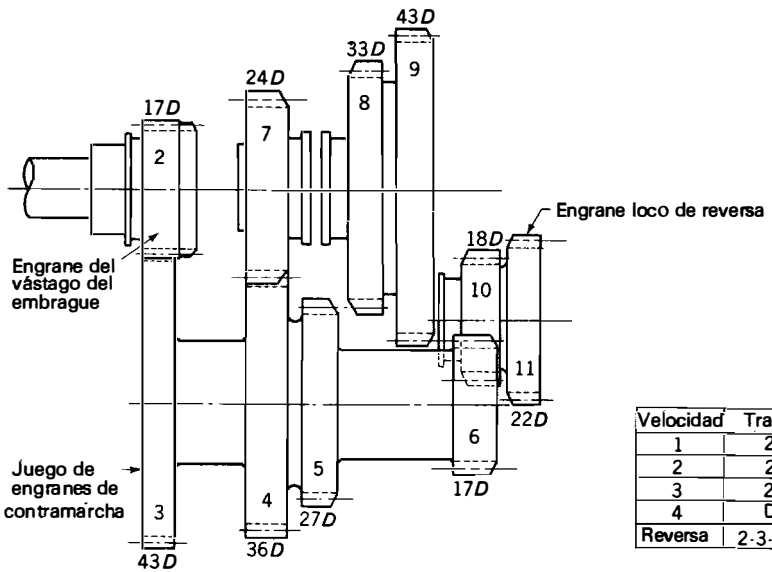
9-2 EJEMPLOS DE TRENES DE ENGRANES

Al hablar de trenes de engranes, con frecuencia resulta conveniente describir un *tren de engranes simple* como el que sólo tiene un engrane en cada eje. Entonces un *tren de engranes compuesto* es el que, como el de la figura 9-1, tiene dos o más engranes en uno o más ejes.

En la figura 9-2 se muestra una transmisión para camiones de tamaño pequeño y medio; cuenta con cuatro velocidades hacia adelante y una hacia atrás.

El tren que aparece en la figura 9-3 se compone de engranes cónicos, helicoidales y rectos. Los engranes helicoidales son cruzados y, por tanto, la dirección de rotación depende de la mano de los engranes helicoidales.

Un *tren de engranes invertido* (Fig. 9-4) es aquél en el que el primero y último engranes están sobre el mismo eje. Esta configuración da lugar a la compacticidad y se usa en aplicaciones tales como reductores de velocidad, relojes (para conectar la manecilla de las horas con la de los minutos), y herramientas para máquina.



Velocidad	Transmisión
1	2-3-6-9
2	2-3-5-8
3	2-3-4-7
4	Directa
Reversa	2-3-6-10-11-9

Figura 9-2 Transmisión de camión. Los engranes son rectos con un paso diametral de 7 y un ángulo de presión de 22.5°.

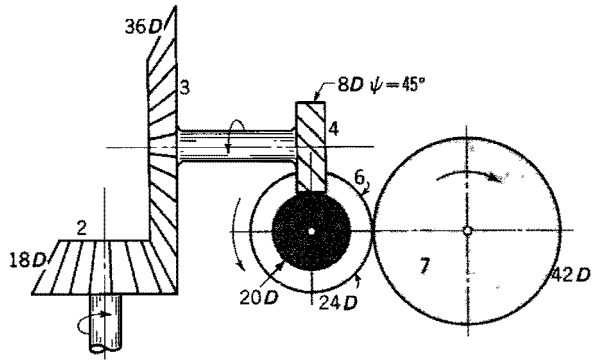


Figura 9-3 Tren que consta de engranes cónicos, helicoidales cruzados y rectos.

Como ejercicio, se sugiere que el lector determine un conjunto adecuado de pasos diametrales para cada par de engranes ilustrados en la figura, de tal suerte que el primero y último engranes tengan el mismo eje de rotación.

9-3 DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE DIENTES

Si se está trasmitiendo una gran cantidad de potencia a través de una unidad de reducción de velocidad, el paso del último par de engranes acoplados será mayor que el del primer par, porque el momento de torsión es mayor en el extremo de salida. En espacio dado se pueden usar más dientes en engranes de paso más reducido; de donde, se puede obtener una mayor reducción de velocidad en el extremo de alta velocidad.

Sin adentrarse en el problema de la resistencia de los dientes, supóngase que se desea utilizar un par de engranes en un tren con el fin de obtener un valor del tren de 1/12. Impongamos también la restricción de que el número de dientes no debe ser menor que 15 y que la reducción obtenida en el primer par de engranes debe ser aproximadamente el doble de la que se obtiene en el segundo par. Esto significa que

$$e = \frac{N_2}{N_3}\frac{N_4}{N_5} = \frac{1}{12} \qquad (a)$$

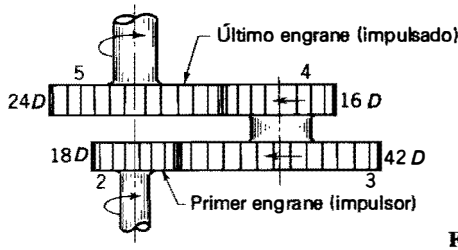


Figura 9-4 Tren de engranes invertido.

en donde N_2/N_3 es el valor de tren del primer par y N_4/N_5 es el del segundo. Dado que el valor de tren del primer par debe ser la mitad del correspondiente al segundo,

$$\frac{N_4}{2N_5}\frac{N_4}{N_5} = \frac{1}{12} \qquad (b)$$

o bien,

$$\frac{N_4}{N_5} = \sqrt{\frac{1}{6}} = 0.4082 \qquad (c)$$

con cuatro cifras decimales. Se observa que los siguientes números de dientes están cercanos al valor deseado:

$$\frac{15}{37} \quad \frac{16}{39} \quad \frac{18}{44} \quad \frac{20}{49} \quad \frac{22}{54}$$

De éstos, la mejor aproximación es $\frac{20}{49}$; pero nótese que

$$e = \frac{N_2}{N_3}\frac{N_4}{N_5} = \frac{20}{98}\frac{20}{49} = \frac{200}{2\,401}$$

no es $\frac{1}{12}$. Por otro lado, la combinación de $\frac{22}{108}$ para la primera reducción y $\frac{18}{44}$ para la segunda da un valor de exactamente $\frac{1}{12}$. De donde

$$e = (\tfrac{22}{108})(\tfrac{18}{44}) = \tfrac{1}{12}$$

En este caso, la reducción en el primer par no es exactamente el doble que la del segundo; pero esta consideración en general tiene poca importancia.

El problema de especificar los números de dientes y el número de pares de engranes para dar un valor del tren dentro de cualquier grado de especificado de exactitud ha despertado el interés de muchas personas. Considérese, por ejemplo, el problema de especificar un juego de engranes que tengan un valor del tren de $\pi/10$, con una exactitud de ocho cifras decimales.

9-4 TRENES DE ENGRANES EPICÍCLICOS

En la figura 9-5 se muestra el tren de engranes epicíclico elemental junto con la designación simplificada de los mismos, utilizada por Lévai.† El tren se compone de un *engrane central 2* y un *engrane epicíclico 4,* que produce un movimiento epicíclico rodando en torno a la periferia del engrane central. Cuenta también con un *brazo de manivela* 3 que contiene los cojinentes para el engrane epicíclico con el fin de mantener endentadas a las dos ruedas de engrane.

Estos trenes se conocen también como *planetarios.* Según esta nomenclatura, el engrane 2 de la figura 9-5 es el *engrane sol,* el 4 es el *engrane planetario* y la manivela 3 se denomina *soporte planetario.* En la figura 9-6 se presenta el tren de

† Las publicaciones dedicadas al tema de los trenes de engranes epicíclicos son, a decir verdad, escasas. Se encontrará un estudio completo en inglés, en la obra de Z. L. Lévai *Theory of Epicyclic Gears and Epicyclic Change-Speed Gears,* Technical University of Building, Civil and Transport Engineering, Budapest, 1966. Este libro enumera 104 referencias.

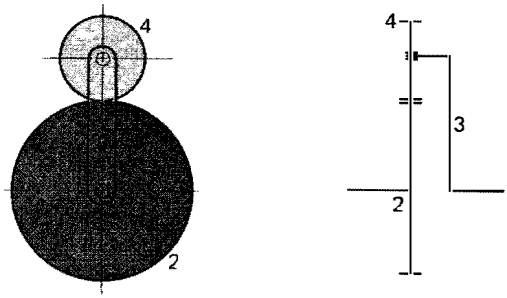


Figura 9-5 *a*) Engrane epicíclico elemental; *b*) designación simplificada.

la figura 9-5 al que se le han agregado dos engranes planetarios redundantes. Esto produce un mejor equilibrio de fuerzas porque, al agregar más engranes planetarios, se aumenta el número de fuerzas; pero los planetarios adicionales en nada contribuyen al comportamiento cinemático. Por esta razón, en general, en las ilustraciones y los problemas de este libro, únicamente se muestra un solo planetario, aun cuando una máquina real es probable que se construya con los planetarios en tríos.

En la figura 9-7 se muestra un tren de engranes epicíclico simple, junto con la designación simplificada correspondiente, en el que se puede ver la manera en la que se puede transmitir el movimiento del planetario hacia otro engrane central. El segundo engrane central en este caso es el 5, un engrane interno. En la figura 9-8 se presenta una disposición similar, con la diferencia de que los dos engranes centrales son externos. Nótese, en esta misma figura, que los planetarios dobles están montados en un solo eje planetario, y que cada uno de ellos se endenta con un engrane sol.

En cualquier caso, sea cual fuere el número de planetarios utilizados, sólo se puede emplear un soporte o brazo. Este principio se ilustra en la figura 9-6, en la que se usan planetarios redundantes, y en la figura 9-9, en donde se usan dos planetarios para alterar el comportamiento cinemático.

Según Lévai, hay 12 variaciones posibles; todas ellas se muestran en forma simplificada en la figura 9-10, como las dispuso Lévai. Las de las figuras 9-10 *a* y *c*

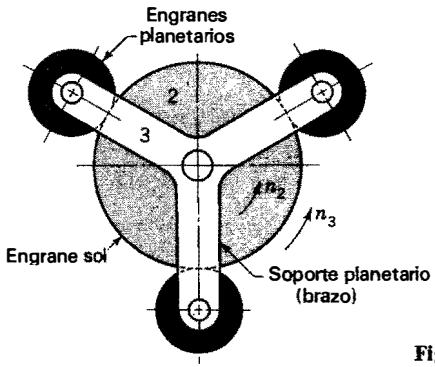


Figura 9-6 Juego de engranes planetarios.

son los trenes simples en los que los planetarios se endentan con los dos engranes sol. Los trenes que se ven en las figuras 9-10 *b* y *d* tienen pares planetarios que están parcialmente endentados entre sí, y en parte con los engranes sol.

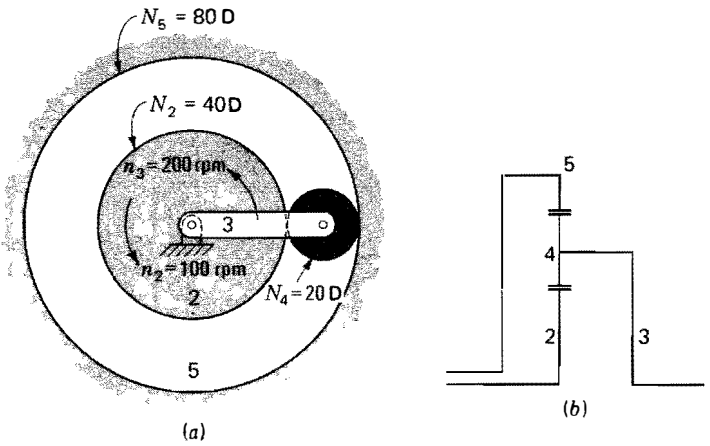


Figura 9-7 *a*) Tren de engranes epicíclico simple; *b*) designación simplificada.

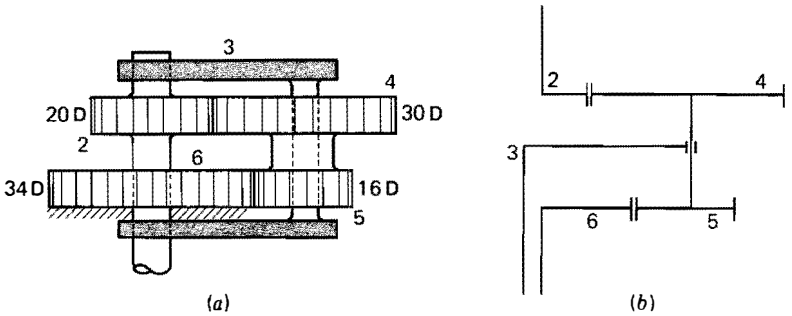


Figura 9-8 Tren de engranes epicíclico simple con planetarios dobles.

9-5 TRENES EPICÍCLICOS DE ENGRANES CÓNICOS

El tren de engranes cónicos ilustrado en la figura 9-11 se conoce con el nombre de *engrane de reducción de Humpage.* Los trenes epicíclicos de engranes cónicos se emplean con bastante frecuencia; pero son iguales que los trenes epicíclicos de engranes rectos. De hecho, el tren de la figura 9-11 es un tren epicíclico doble y en la figura 9-10 se puede hallar el equivalente de engranes rectos de cada uno. En la

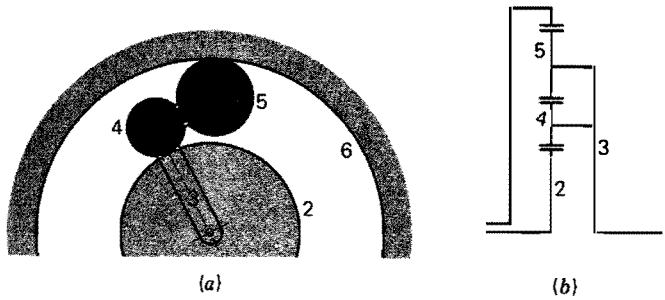


Figura 9-9 Tren epicíclico con dos planetarios.

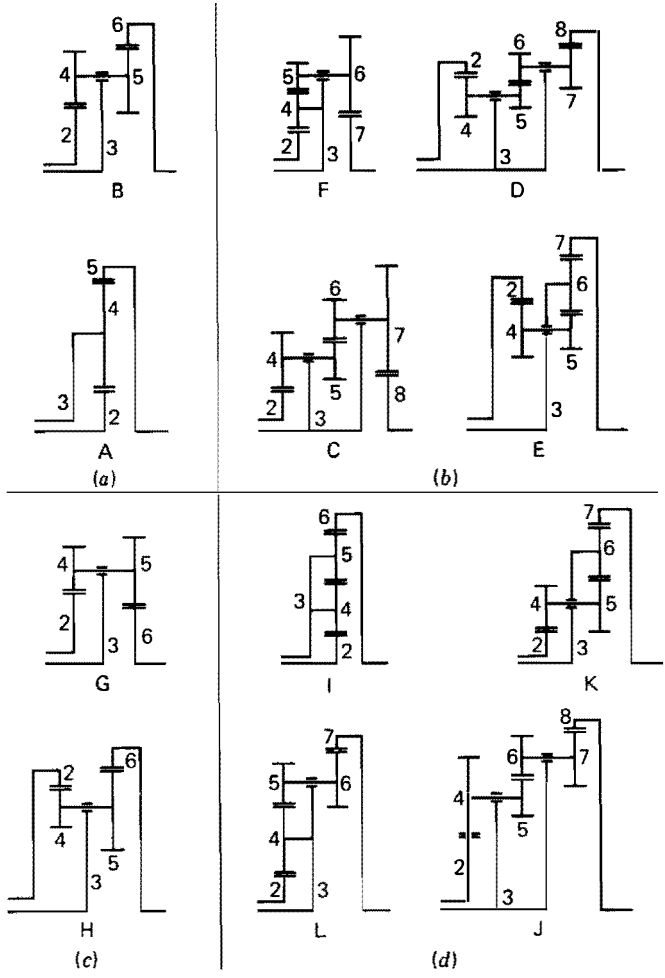


Figura 9-10 Los 12 tipos posibles de engranes epiciclicos según Lévai.

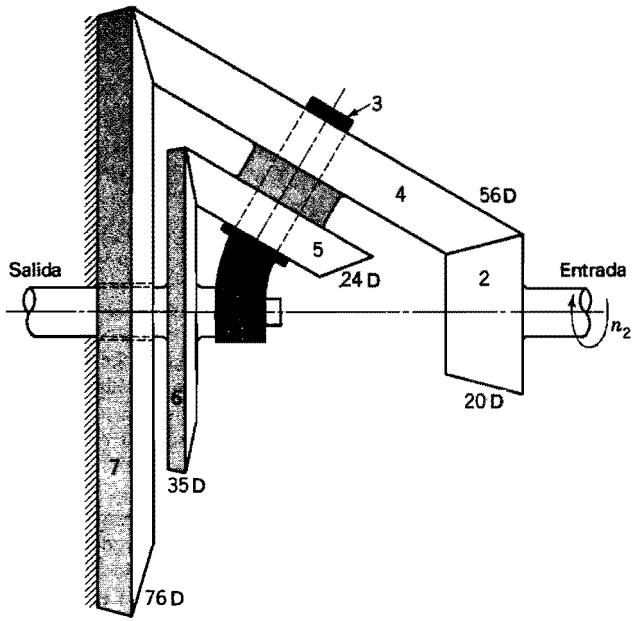


Figura 9-11

siguiente sección se encontrará que el análisis de este tipo de trenes es el mismo que para los trenes de engranes rectos.

9-5 SOLUCIÓN DE TRENES PLANETARIOS MEDIANTE FÓRMULA

En la figura 9-12 se presenta un tren de engranes planetario que consta de un engrane sol 2, un brazo 3, y los engranes planetarios 4 y 5. Al aplicar la ecuación (3-10), se puede escribir que la velocidad del engrane 2 en relación con el brazo es

$$n_{23} = n_2 - n_3 \qquad (a)$$

Asimismo, la velocidad del engrane 5 en relación con el brazo es

$$n_{53} = n_5 - n_3 \qquad (b)$$

Al dividir la (b) entre la (a) queda

$$\frac{n_{53}}{n_{23}} = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3} \qquad (c)$$

La ecuación (c) expresa la razón de la velocidad relativa del engrane 5 a la del engrane 2, y ambas velocidades se toman en relación con el brazo. Esta razón es la misma y proporcional a los números de dientes, ya sea que el brazo esté girando o no. Es el valor del tren; de donde, se puede escribir

$$e = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3} \qquad (d)$$

La ecuación (*d*)
Resulta conveniente expresarla en la forma

$$e = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A} \tag{9-4}$$

en donde n_F = velocidad del primer engrane del tren, rpm
velocidad n_L = velocidad del último engrane del tren, rpm
velocidad n_A = velocidad del brazo, rpm

Los siguientes ejemplos ilustrarán el uso de la (9-4).

Ejemplo 9-1. En la figura 9-8 se presenta un tren planetario invertido. El engrane 2 está sujeto a su eje y es impulsado a 250 rpm en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Los engranes 4 y 5 son planetarios que están unidos, pero tienen la libertad de girar, sobre el eje llevado por el brazo. El engrane 6 es estacionario. Encuéntrese la velocidad y la dirección de rotación del brazo.

SOLUCIÓN Primero se debe decidir qué engrane se va a designar como el primero y el último elementos del tren. Puesto que se dan las velocidades de los engranes 2 y 6, cualquiera de ellos puede utilizarse como el primero. La elección no establece diferencia alguna en los resultados; pero una vez tomada dicha decisión, no se puede cambiar. Así pues, se escogerá el engrane 2 como el primero; de donde, el 6 será el último. Por consiguiente,

$$n_F = n_2 = -250 \text{ rpm} \qquad n_L = n_6 = 0 \text{ rpm} \qquad e = \left(\tfrac{20}{30}\right)\left(\tfrac{16}{34}\right) = \tfrac{16}{51}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (9-4) da

$$\frac{16}{51} = \frac{0 - n_A}{-250 - n_A} \qquad n_A = 114 \text{ rpm cmr}$$

Ejemplo 9-2. En el tren de engranes cónicos ilustrado en la figura 9-11, la entrada es hacia el engrane 2, y la salida desde el engrane 6, que se conecta al eje de salida. El brazo 3 gira libremente sobre el eje de salida y lleva a los planetarios 4 y 5. El engrane 7 está fijo al marco. ¿Cuál es la velocidad de salida si el engrane 2 gira a 2 000 rpm?

SOLUCIÓN El problema se resuelve en dos pasos. En el primero se considera que el tren se compone de los engranes 2, 4 y 7, y se calcula la velocidad del brazo. Por siguiente,

$$n_F = n_2 = 2000 \text{ rpm} \qquad n_L = n_7 = 0 \text{ rpm} \qquad e = \left(-\tfrac{20}{56}\right)\left(\tfrac{56}{76}\right) = -\tfrac{5}{19}$$

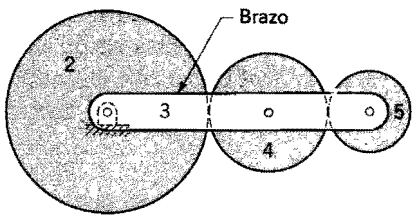


Figura 9-12

Haciendo las sustituciones en la (9-4), y despejando la velocidad del brazo, da

$$-\frac{5}{19} = \frac{0 - n_A}{2\,000 - n_A} \qquad n_A = 416.7 \text{ rpm}$$

Considérese ahora que el tren consta de los siguientes engranes 2, 4, 5 y 6. Por lo tanto se tiene que $n_F = n_2 = 2\,000$ rpm, al igual que antes, y $n_L = n_6$, que es lo que se debe encontrar. El valor del tren es

$$e = (-\tfrac{20}{56})(\tfrac{24}{35}) = -\tfrac{12}{49}$$

Haciendo las sustituciones en la (9-4) una vez más y resolviendo para n_L, puesto que ahora se conoce n_A da

$$-\frac{12}{49} = \frac{n_L - 416.7}{2\,000 - 416.7}$$

$$n_L = n_6 = 28.91 \text{ rpm}$$

El eje de salida gira en la misma dirección que el engrane 2, con una reducción de 2 000:28.91, o sea, 69.2:1.

9-7 ANÁLISIS TABULAR DE TRENES PLANETARIOS

En la figura 9-7 se ilustra un tren de engranes planetario que consta de un engrane sol 2, un soporte (brazo) del planetario 3, un engrane planetario 4 y un engrane interno 5 que va endentado con el planetario. Se podrían dar razonablemente ciertos valores para las revoluciones por minuto del engrane sol y el brazo, y desear determinar las revoluciones por minuto del engrane interno.

El análisis se lleva a cabo en los tres pasos siguientes:

1. Fíjense todos los engranes al brazo y hágase que éste dé una vuelta. Tabúlense las vueltas resultantes del brazo y de cada engrane.
2. Fíjese el brazo y hágase girar uno o más de los engranes sol. Tabúlense las vueltas resultantes del brazo y de cada engrane.
3. Súmense las vueltas de cada engrane en los pasos 1 y 2, de modo que se satisfagan las condiciones dadas.

Tabla 9-1 Solución por tabulación, rpm

Número del paso	Brazo 3	Engrane 2	Engrane 4	Engrane 5
1. Engranes fijos	+200	+200	+200	+200
2. Brazo fijo	0	−100	+200	+ 50
3. Resultados	+200	+100	+400	+250

Como un ejemplo de este tipo de solución, asígnense los números de dientes que se dan en la figura 9-7, y supóngase también que la velocidad del engrane sol y

del brazo son 100 y 200 rpm, respectivamente, ambas en dirección positiva. En la tabla 9-1 se consigna la solución. En el paso 1, los engranes se fijan al brazo y a éste se le dan 200 vueltas en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Esto produce también 200 vueltas en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj para los engranes 2, 4 y 5. En el paso 2 se fija el brazo. Ahora, determínense las vueltas que debe dar el engrane 2 para que cuando se sumen a las del paso 1 el resultado sea, en este caso, + 100 rpm. Esto es −100 vueltas, como se indica. Para completar el paso 2, úsese el engrane 2 como impulsor y determínese el número de vueltas de los engranes 4 y 5. De donde,

$$n_4 = (-100)(-\tfrac{40}{20}) = +200 \text{ rpm}$$

y

$$n_5 = (-100)(-\tfrac{40}{20})(\tfrac{20}{80}) = +50 \text{ rpm}$$

Estos valores se anotan en las columnas apropiadas y se suman los pasos 1 y 2 para obtener el resultado.

Los siguientes ejemplos desarrollados ayudarán a comprender mejor este método.

Ejemplo 9-3. Encuéntrese la velocidad del engrane exterior de la figura 9-7 si, por el contrario, el engrane 2 gira a 100 rpm en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj, y el brazo 3 gira a 200 rpm en el sentido contrario.

SOLUCIÓN Los resultados están tabulados a continuación. En el paso 1, los engranes se fijan al brazo y se hace girar a éste 200 vueltas en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj. Esto hace que los engranes 2, 4 y 5 realicen también 200 vueltas en ese sentido.

En el paso 2 se fija el brazo; de modo que se anota 0 para las vueltas del brazo en la primera columna. En la segunda columna, el engrane 2 debe girar de tal modo que cuando sus vueltas se sumen a las del paso 1, el resultado sea 100 vueltas en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Por esta razón, se especifican −300 vueltas para el engrane 2. Ahora, si se trata al engrane 2 como impulsor, las vueltas de los engranes 4 y 5 son:

Número del paso	Brazo 3	Engrane 2	Engrane 4	Engrane 5
1. Engranes fijos	+200	+200	+200	+200
2. Brazo fijo	0	−300	+600	+150
3. Resultados	+200	−100	+800	+350

$$n_4 = (-300)(-\tfrac{40}{20}) = +600 \text{ rpm}$$

$$n_5 = (-300)(-\tfrac{40}{20})(\tfrac{20}{80}) = +150 \text{ rpm}$$

Después de sumar las columnas, se ve que el resultado es

$$n_5 = 350 \text{ rpm cmr}$$

Ejemplo 9-4 El tren de engranes planetario que aparece en la figura 9-13 se conoce con el nombre de paradoja de Ferguson. El engrane 2 es estacionario en virtud de estar fijo a un marco, el brazo 3 y los engranes 4 y 5 pueden girar libremente sobre el eje. Los engranes 2, 4 y 5 tienen, respectivamente, 100, 101 y 99 dientes, cortados todos ellos en discos en blanco del mismo diámetro, de tal modo que el planetario 6 se endenta con todos ellos. Hállense las vueltas de los en-

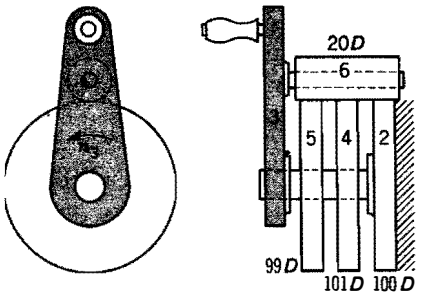


Figura 9-13 Paradoja de Ferguson.

granes 4 y 5 si al brazo se le da una vuelta en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

SOLUCIÓN Los resultados se dan en la tabla que sigue

Número del paso	Brazo 3	Engrane 2	Engrane 4	Engrane 5
1. Engranes fijos	+1	+1	+1	+1
2. Brazo fijo	0	−1	−100/101	−100/99
3. Resultados	+1	0	+1/101	−1/99

Para que el engrane 2 quede fijo, se le debe dar una vuelta en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj en el paso 2. Los resultados muestran que conforme se hace girar el brazo, el engrane 4 gira muy lentamente en la misma dirección, en tanto que el 5 gira muy lentamente en la dirección opuesta.

Ejemplo 9-5 La unidad de sobremarcha que se ilustra en la figura 9-14 se usa detrás de una transmisión estándar para reducir la velocidad del motor. Determínese el porcentaje de reducción que se obtendrá cuando se "mete" la sobremarcha

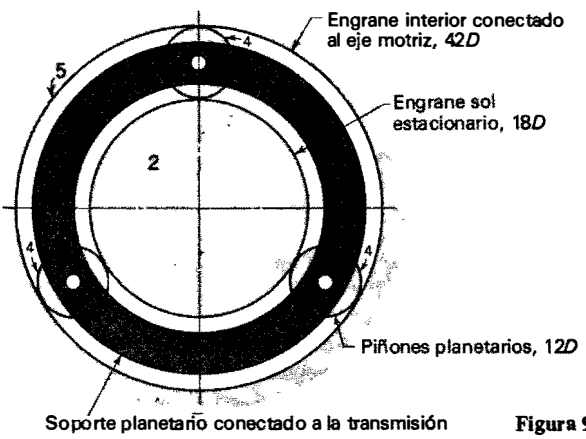


Figura 9-14 Unidad de sobremarcha.

SOLUCIÓN Es conveniente utilizar una vuelta para el brazo. Esto proporciona los resultados que se muestran en la tabla que sigue. La velocidad del motor corresponde a la del brazo, y la del eje motriz a la del engrane 5. Por lo tanto,

$$\text{Reducción en la velocidad del motor} = \frac{1.429 - 1}{1.429}(100) = 30\%$$

Número del paso	Brazo 3	Engrane 2	Engrane 4	Engrane 5
1. Engranes fijos	+1	+1	+1	+1
2. Brazo fijo	0	−1	+1.5	+0.429
3. Resultados	+1	0	+2.5	+1.429

9-8 DIFERENCIALES

La clase de trenes de engranes planetarios conocida como diferenciales se utiliza con tanta profusión que merece una atención especial. La operación de un diferencial se ilustra por medio del dibujo esquemático del diferencial de automóvil que aparece en la figura 9-15. El piñón del eje motriz y el engrane anular normalmente son engranes hipoidales. El anular actúa como el soporte planetario y se puede calcular su velocidad como para un tren de engranes simple, cuando se conoce la velocidad del eje motriz. Los engranes 5 y 6 se conectan, respectivamente, a cada rueda posterior y, cuando el automóvil se está moviendo en línea recta, ambos giran

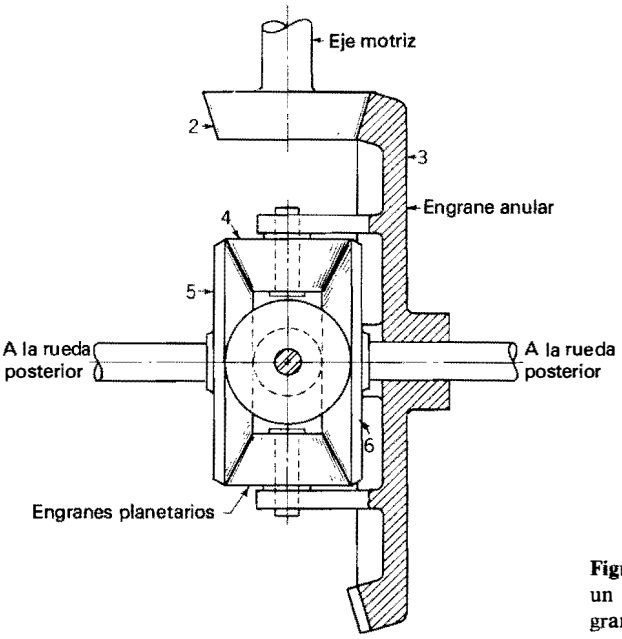


Figura 9-15 Dibujo esquemático de un diferencial automotriz de engranes cónicos.

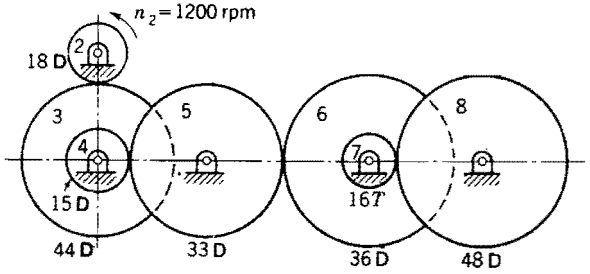
en la misma dirección exactamente con la misma velocidad. Por ende, para el movimiento rectilíneo del automóvil, no hay movimiento relativo entre los engranes planetarios y los engranes 5 y 6. De hecho, los engranes planetarios sirven sólo como cuñas para transmitir el movimiento del soporte planetario a ambas ruedas.

Cuando el vehículo efectúa una vuelta, la rueda que queda dentro de la misma realiza menos revoluciones que la que describe el radio más largo al girar. A menos que de alguna manera se dé margen para esta diferencia de velocidades, una de las llantas, o las dos, tendrían que resbalar para poder efectuar la vuelta. El diferencial permite que cada rueda gire a velocidades diferentes mientras que, al mismo tiempo, entrega potencia a ambas. Durante una vuelta, los engranes planetarios giran en torno a sus propios ejes, permitiendo con ello que los engranes 5 y 6 lo hagan a velocidades diferentes.

El propósito de un diferencial es establecer una diferencia entre las velocidades de las dos ruedas. En el diferencial usual de los automóviles, el momento de torsión se divide en forma igual ya sea que el auto se desplace en línea recta o describa una curva. En ocasiones, las condiciones de la carretera son tales que el efecto de tracción desarrollado por las dos ruedas es desigual. En este caso, el esfuerzo total de tracción disponible será de sólo el doble del que se tiene en la rueda con la menor tracción, porque el diferencial divide el momento de torsión en forma igual. Si sucede que una de las ruedas se apoya sobre nieve o hielo, el esfuerzo total disponible es muy pequeño y sólo se requerirá un momento de torsión reducido para hacer que la rueda gire.

PROBLEMAS

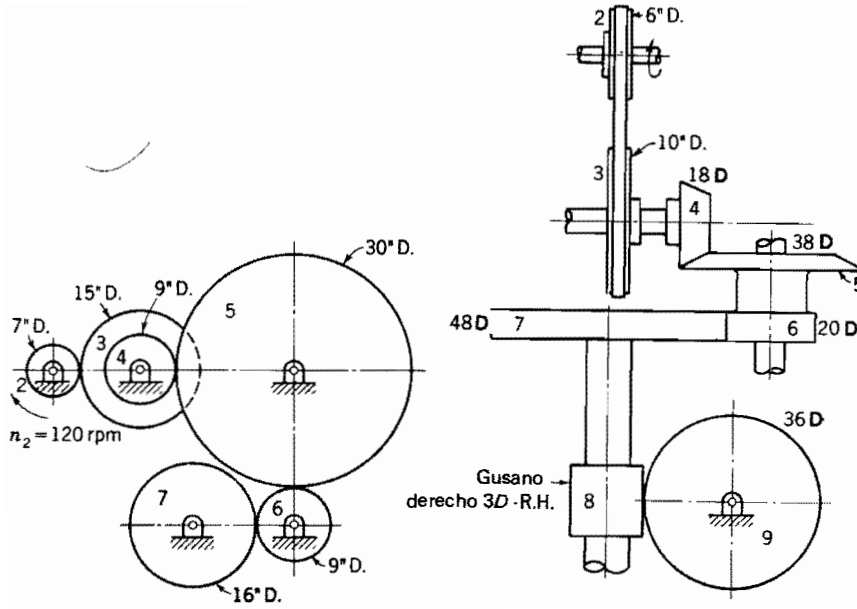
9-1 Calcúlese la velocidad y la dirección de rotación del engrane 8 de la figura. ¿Cuál es la razón de velocidades del tren?



Problema 9-1

9-2 La parte (*a*) de la figura da los diámetros de paso de un juego de engranes rectos que forman un tren. Calcúlese la razón de velocidades del tren. Determínese la velocidad y dirección de rotación de los engranes 5 y 7.

9-3 En la parte (*b*) de la figura se muestra un tren que consta de engranes cónicos, rectos y un gusano junto con su engrane. El piñón cónico está montado sobre un eje que se impulsa mediante una banda en V sobre poleas. Si la polea 2 gira a 1 200 rpm en la dirección que se muestra, encuéntrese la velocidad y dirección de rotación del engrane 9.

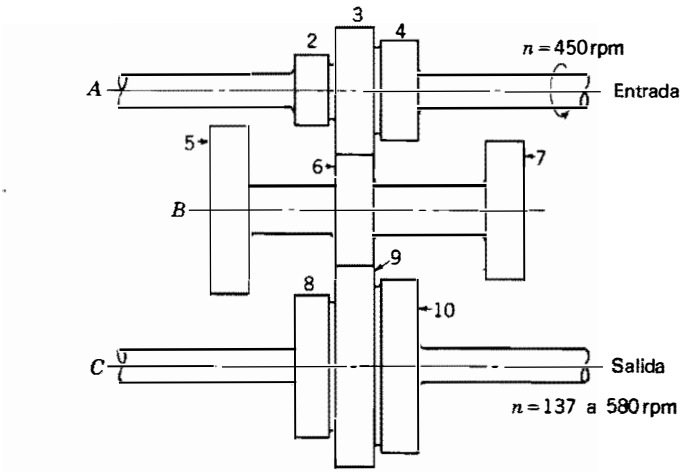


(*a*) (*b*)

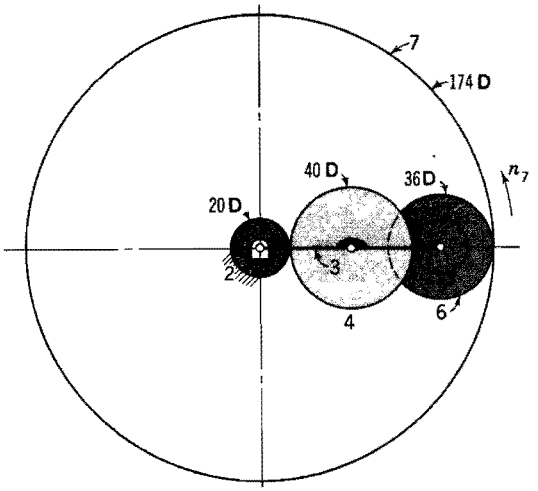
Problema 9-2 y 9-3

9-4 Úsese la transmisión de camión de la figura 9-2 y una velocidad de entrada de 3 000 rpm. Encuéntrese la velocidad del eje motriz para cada engrane de avance y para el engrane de reversa.

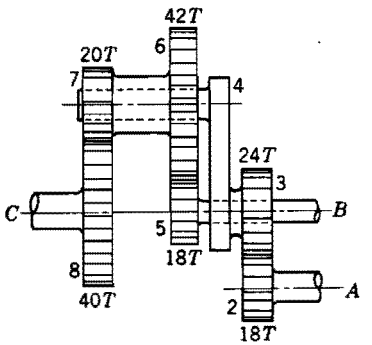
9-5 En la figura se ilustran los engranes contenidos en una caja de engranes de cambio de velocidades que se utilizan en aplicaciones de máquinas-herramienta. En este caso se pueden obtener nueve cambios de velocidad deslizando el grupo de engranes sobre los ejes *B* y *C*. El problema del diseñador de la



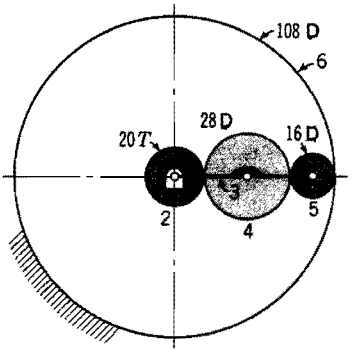
Problema 9-5



Problemas 9-6 y 9-7



(*a*)



(*b*)

Problemas 9-8 a 9-11

máquina-herramienta consiste en seleccionar los números de dientes para los diversos engranes, con el fin de producir una distribución razonable de velocidades para el eje de salida. Los engranes más pequeño y más grande son, respectivamente, el 2 y el 9. Suponiendo que estos engranes tienen 20 y 45 dientes, respectivamente, determínese un conjunto de números de dientes apropiados para los engranes restantes. ¿Cuáles son las velocidades correspondientes del eje de salida? Nótese que el problema tiene muchas soluciones.

9-6 El engrane interior (el número 7) de la figura gira a 60 rpm cmr. ¿Cuáles son la velocidad y dirección de rotación del brazo 3?

9-7 Si el brazo de la figura gira cmr a 300 rpm, determínese la velocidad y dirección de rotación del engrane interior 7.

9-8 En la parte (*a*) de la figura, el eje *C* es estacionario. Si el engrane 2 gira a 800 rpm mmr, ¿cuál es la velocidad y cuál la dirección de rotación del eje *B*?

9-9 En la parte (*a*) de la figura, considérese que el eje *B* es estacionario. Si el eje *C* se impulsa a 380 rpm cmr, ¿cuáles son la velocidad y dirección de rotación del eje *A*?

9-10 En la parte (*a*) de la figura, determínese la velocidad y dirección de rotación del eje *C* a) los ejes *A* y *B* giran a 360 rpm cmr y *b*) el eje *A* gira a 360 rpm mmr y el eje *B* lo hace a 360 rpm cmr.

9-11 En la parte (*b*) de la figura, el engrane 2 está conectado al eje de entrada. Si el brazo 3 está conectado al eje de salida, ¿qué reducción de velocidad se puede obtener? ¿Cuál es el sentido de la rotación del eje de salida? ¿Qué cambios se podrían hacer en el tren para producir el sentido de rotación opuesto?

9-12 El tren de Lévai tipo L que se muestra en la figura 9-10 tiene $N_2 = 16$ D, $N_4 = 19$ D, $N_5 = 17$ D $N_6 = 24$ D, $N_7 = 95$ D. El engrane interno 7 está fijo. Calcúlese la velocidad y dirección de rotación del brazo si el engrane 2 se impulsa a 100 rpm mmr.

9-13 El tren de Lévai tipo *A* que aparece en la figura 9-10 tiene $N_2 = 20$ D y $N_4 = 32$ D

a) Encuéntrese el número de dientes en el engrane 5 y el radio del brazo de manivela, si el módulo es 6 mm.

b) ¿Cuál es la velocidad y dirección de rotación del brazo si el engrane 2 está fijo y el engrane interno 5 gira a 10 rpm cmr?

9-14 Los números de dientes para el diferencial automotriz ilustrado en la figura 9-15 son $N_2 = 17$, $N_3 = 54$, $N_4 = 11$, y $N_5 = N_6 = 16$. El eje motriz gira a 1 200 rpm, ¿cuál es la velocidad de la rueda derecha si se encuentra elevada, montada sobre un gato, y la rueda izquierda descansa sobre la superficie de la carretera?

9-15 Un vehículo que usa el diferencial ilustrado en la figura 9-15, gira hacia la derecha a una velocidad de 30 millas por hora, describiendo una curva con un radio de 80 pies. Úsense los mismos números de dientes que se citaron en el problema 9-14. El diámetro de la llanta es de 15 pulg. Supóngase que la distancia de centro a centro entre las rodaduras es de 60 pulg.

a) Calcúlese la velocidad de cada rueda posterior.

b) ¿Cuál es la velocidad del engrane anular?

CAPÍTULO

DIEZ

SÍNTESIS DE ESLABONAMIENTOS

El término *síntesis cinemática* se refiere al diseño o creación de un mecanismo para obtener un conjunto deseado de características de movimiento. En vista de la amplísima variedad de técnicas disponibles, algunas de las cuales suelen ser en extremo abrumadoras, aquí se presentan algunos de los procedimientos más útiles para ilustrar la aplicación de la teoría. †‡

10-1 SÍNTESIS DEL TIPO, DEL NÚMERO Y DIMENSIONAL

La *síntesis del tipo* se refiere a la clase de mecanismo seleccionado; podría ser un eslabonamiento, un sistema de engranes, bandas y poleas o un sistema de levas. Esta fase inicial del problema total de diseño comprende por lo común factores de diseño tales como los procesos de manufactura, materiales, seguridad, confiabi-

† Se pueden encontrar extensas referencias en K. Hain (traducida por T.P. Goodman y otros), *Applied Kinematics,* 2a. ed., pp. 639-727, McGraw-Hill, 1967, y en Ferdinand Freudenstein y George N. Sandor, *Kinematics of Mechanisms,* en Harold A. Rothbart (ed.). *Mechanical Design and Systems Handbook.* pp. 4-56 a 4-68, McGraw-Hill, New York, 1964.

‡ En lengua inglesa, las siguientes son las referencias más útiles sobre síntesis cinemática: Rudolf A. Beyer (traducida por Herbert Kuenzel), *Kinematics Synthesis of Mechanisms*, McGraw-Hill, New York, 1963; Alexander Cowie, Kinematics and Design of Mechanisms, International Textbook, Scranton, Pa., 1961; Hain, *op. cit.;* Allen S. Hall, Jr., *Kinematics and Linkage Design,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961; R. S. Hartenberg y Jacques Denavit, *Kinematics Synthesis of Linkages,* McGraw-Hill, New York, 1964; Jeremy Hirschhorn, *Kinematics and Dynamics of Plane Mechanisms,* McGraw-Hill, New York, 1962; D. C. Tao, *Fundamentals of Applied Kinematics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967; A. H. Soni, *Mechanism Synthesis and Analysis,* McGraw-Hill, 1974.

lidad, espacio y economía. El estudio de la cinemática en general se ocupa sólo ligeramentente de la síntesis del tipo.

La *síntesis del número* se ocupa del número de eslabones y de articulaciones o pares que se requieren para obtener una movilidad determinada (véase la sección 1-6). La síntesis del número es el segundo paso en el diseño, después de la síntesis del tipo.

El tercer paso en el diseño, la determinación de las dimensiones de los eslabones individuales se conoce con el nombre de *síntesis dimensional*. Éste es el tema del que se ocupa el resto de este capítulo.

10-2 GENERACIÓN DE LA FUNCIÓN, GENERACIÓN DE LA TRAYECTORIA Y GUÍA DEL CUERPO

Una clasificación importante de los problemas de síntesis que surge en el diseño de los eslabonamientos es la llamada generación de la función. Una de las necesidades frecuentes en el diseño es la de hacer que un elemento de salida gire, oscile, o tenga un movimiento alternativo, según una función del tiempo, o bien, una función del movimiento de entrada especificada. Esto se conoce con el nombre de *generación de la función*. Un ejemplo sencillo es el de sintetizar un eslabonamiento de cuatro barras para generar la función $y = f(x)$. En este caso, x representaría el movimiento de la manivela de entrada y el eslabonamiento se diseñaría de tal modo que el movimiento del oscilador de salida sea una aproximación de la función y. Otros ejemplos de generación de la función son:

1. En la línea de un transportador, el elemento de salida de un mecanismo se debe mover a la velocidad constante del transportador, al mismo tiempo que realiza cierta operación, por ejemplo, poner un tapón, regresar, recoger el siguiente tapón y repetir la operación.
2. El elemento de salida debe hacer una pausa o detenerse durante su ciclo de movimiento a fin de dar tiempo para que suceda otro evento. El segundo evento podría ser una operación de sellado, engrapado o sujeción de algún tipo.
3. El elemento de salida debe girar a una función de velocidad no uniforme especificada, porque está acoplada a otro mecanismo que requiere ese movimiento de rotación.

Un segundo tipo de problema de síntesis es aquél en el que un punto del acoplador debe generar una trayectoria que tenga una forma prescrita. Las necesidades comunes son que una porción de la trayectoria sea un arco circular, elíptico o una recta. En ocasiones se necesita que la trayectoria cruce sobre sí misma, como en una figura de ocho.

La tercera clase general de problemas de síntesis se denomina guía del cuerpo; en este caso, el interés reside en mover un objeto de una posición a otra. El problema puede ser una traslación simple o una combinación de traslación y rotación.

Por ejemplo, en la industria de la construcción, piezas pesadas como cucharones y cuchillas de *bulldozer* se deben mover siguiendo una serie de posiciones prescritas.

Dos clases de *defectos*, llamados de *rama* y de *orden*, pueden presentarse en la síntesis para confundir al diseñador. El defecto de rama se refiere a un eslabonamiento desarrollado que satisface todas las necesidades de posición pero tiene puntos del acoplador en ambas ramas de la curva del acoplador. El defecto de orden se refiere a un eslabonamiento desarrollado que satisface todas las necesidades de posición, pero no en el orden correcto.†

10-3 POSICIONES DE PRECISIÓN: ESPACIAMIENTO DE CHEBYCHEV

Si θ_2 es la posición angular del eslabón 2 en un eslabonamiento de cuatro barras, y θ_4 es la posición angular del eslabón 4, entonces uno de los problemas de la síntesis cinemática es encontrar las dimensiones del eslabonamiento de tal manera que

$$\theta_4 = f(\theta_2) \qquad (a)$$

en donde f es cualquier relación funcional deseada.

Aunque este problema no se ha resuelto, es posible especificar hasta cinco valores para θ_2, llamados *puntos de precisión*, y encontrar en ocasiones un eslabonamiento que satisfaga la relación deseada para la función y luego seleccionar de dos a cinco puntos de precisión a partir de la gráfica para utilizarlos en la síntesis. Si el proceso tiene éxito, la relación funcional se satisface para estos puntos; pero ocurrirán desviaciones en otros. Para muchas funciones, el error más grande se puede mantener a un nivel inferior al 4%.

Entre los puntos se presentarán desviaciones, conocidas con el nombre de *errores estructurales*. Uno de los problemas del diseño de eslabonamiento consiste en seleccionar un conjunto de puntos de precisión para utilizarlos en la síntesis, de tal modo que se minimice el error estructural.

Como primer tanteo, el mejor espaciamiento de estos puntos es el llamado *espaciamiento de Chebychev*. Para n puntos en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_{n+1}$ el espaciamiento Chebychev, según Freudenstein y Sandor,‡ es

$$x_j = \frac{1}{2}(x_0 + x_{n+1}) - \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_0)\cos\frac{\pi(2j-1)}{2n} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (10\text{-}1)$$

en donde x_j son los puntos de precisión.

† Véase la obra de K. J. Waldron y E. N. Stevensen, Jr., *Elimination of Branch, Grashof, and Order Defects in Path-Angle Generation and Function Generation Synthesis,* ASME Paper No. 78-DET-16

‡ *Op. cit.* p. 4-27.

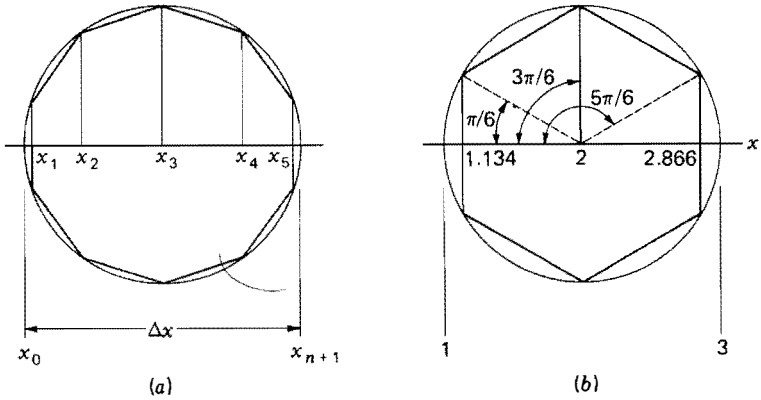


Figura 10-1 Determinación gráfica del espaciamiento de Chebychev.

Como ejemplo, supóngase que se desea idear un eslabonamiento para generar la función

$$y = x^{0.8} \qquad (b)$$

para el intervalo $1 \leq x \leq 3$, usando tres puntos de precisión. Entonces, partiendo de la ecuación (10-1), los tres valores de x son

$$x_1 = \frac{1}{2}(1+3) - \frac{1}{2}(3-1)\cos\frac{\pi(2-1)}{(2)(3)} = 2 - \cos\frac{\pi}{6} = 1.134$$

$$x_2 = 2 - \cos\frac{3\pi}{6} = 2.000$$

$$x_3 = 2 - \cos\frac{5\pi}{6} = 2.866$$

Los valores correspondientes de y se encuentran basándose en la (b) y son

$$y_1 = 1.106 \qquad y_2 = 1.741 \qquad y_3 = 2.322$$

Se obtienen con facilidad estos puntos exactos utilizando el procedimiento de la figura 10-1. El método se muestra en la figura 10-1*a*, en donde se construye primero un círculo cuyo diámetro es el intervalo Δx dado por la ecuación

$$\Delta x = x_{n+1} - x_0 \qquad (c)$$

En este círculo inscríbase un polígono regular de $2n$ lados. Las perpendiculares bajadas de cada vértice intersecarán a Δx en los puntos de precisión. En la figura 10-1*b* se ilustra la construcción para el ejemplo numérico.

Al concluir esta sección, conviene destacar que el espaciamiento de Chebychev es la mejor primera aproximación; dependiendo de las necesidades de exactitud del

problema. Si se requiere una actitud adicional, entonces mediante una curva del error estructural en contra de x, por lo común se pueden determinar visualmente los ajustes que se deben hacer en los puntos de precisión para el tanteo siguiente.

10-4 SÍNTESIS DE POSICIÓN DEL MECANISMO GENERAL DE CORREDERA Y MANIVELA

El mecanismo centrado de corredera y manivela ilustrado en la figura 10-2*a*, tiene una carrera B_1B_2 igual al doble del radio de la manivela, r_2. Como se muestra, se encuentran las posiciones extremas B_1 y B_2, llamadas también posiciones límite, de la corredera, trazando arcos de círculo con centro en O_2 y cuyo radio sea, respectivamente $r_3 - r_2$ y $r_3 + r_2$.

En general, el mecanismo centrado de corredera y manivela debe tener a r_3 más grande que r_2. Sin embargo, el caso especial de $r_3 = r_2$ da por resultado un *mecanismo isósceles de corredera y manivela* en el que la corredera tiene un movimiento alternativo pasando por O_2 y la carrera es 4 veces el radio de la manivela. Todos los puntos del acoplador del mecanismo *isósceles* de corredera y manivela generan trayectorias elípticas. Las trayectorias generadas por puntos sobre el acoplador del mecanismo de corredera y manivela de la figura 10-2*a* son no elípticas; pero siempre son simétricas en torno al eje de deslizamiento O_2B.

El eslabonamiento de la figura 10-2*b* se denomina *mecanismo general o excéntrico de corredera y manivela*. Se pueden obtener ciertos efectos especiales, cambiando la distancia de excentricidad e. Por ejemplo, la carrera B_1B_2 siempre es mayor que el doble del radio de la manivela. Asimismo, el ángulo de la manivela requerido para ejecutar la carrera hacia adelante es diferente del que corresponde a la carrera de retroceso. Se puede aplicar esta característica para sintetizar los mecanismos de retorno rápido, en los que se desea una carrera de trabajo más lenta. En la figura 10-2*b*, nótese que se encuentran las posiciones límite B_1 y B_2 de la corredera, de la misma manera que para el de corredera y manivela centrados.

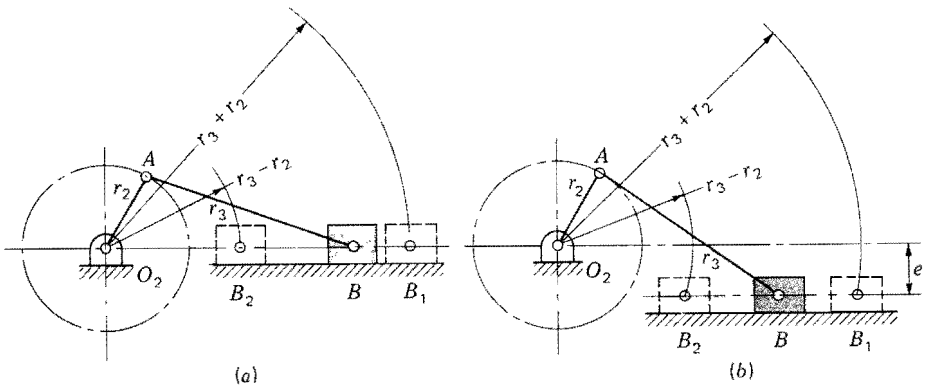


Figura 10-2 *a*) Mecanismo centrado de corredera y manivela; *b*) mecanismo general, o excéntrico, de corredera y manivela.

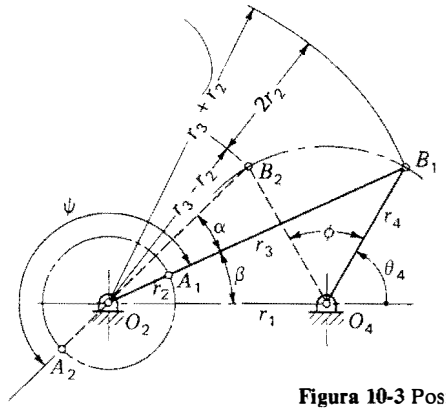


Figura 10-3 Posiciones extremas del mecanismo de manivela y oscilador.

10-5 SÍNTESIS DE MECANISMOS DE MANIVELA Y OSCILADOR

Las posiciones límite del oscilador, en un mecanismo de manivela y oscilador, están identificadas como los puntos B_1 y B_2 en la figura 10-3. Nótese que estas posiciones se encuentran de la misma manera que para el eslabonamiento de corredera y manivela. Obsérvese también que la manivela y el acoplador quedan en una sola recta en cada posición extrema.

En este caso particular, la manivela describe el ángulo ψ mientras que el oscilador se mueve de B_1 a B_2 describiendo el ángulo ϕ. Se observará que, en la carrera de retorno, el oscilador va de B_2 de regreso a B_1, recorriendo el mismo ángulo ϕ; pero que la manivela recorre el ángulo $360° - \psi$.

Hay muchos casos en los que un mecanismo de manivela y oscilador es superior a un sistema de leva y seguidor. Entre las ventajas que se tienen sobre este último sistema están las fuerzas menores que intervienen, la eliminación del resorte de retención y las holguras menores en virtud del uso de pares de revoluta.

Si $\psi > 180°$ en la figura 10-3, entonces $\alpha = \psi - 180$, en donde se puede obtener α partiendo de la ecuación correspondiente a la *razón de tiempos* (véase la sección 1-12)

$$Q = \frac{180 + \alpha}{180 - \alpha} \tag{10-2}$$

de los movimientos de avance y retorno del oscilador. El primer problema que se presenta en la síntesis de los eslabonamientos de manivela y oscilador es cómo obtener las dimensiones o la geometría que hagan que el mecanismo genere un ángulo de salida especificado ϕ, cuando también se especifica la razón de tiempos.†

† El método que se va a describir aparece en la obra de Hall, *op. cit., p.* 33, y Soni, *op. cit.,* p. 257. Tanto Tao. *op. cit.* p. 241, como Hain, *op. cit.,* p. 317, describen otro método que da resultados diferentes.

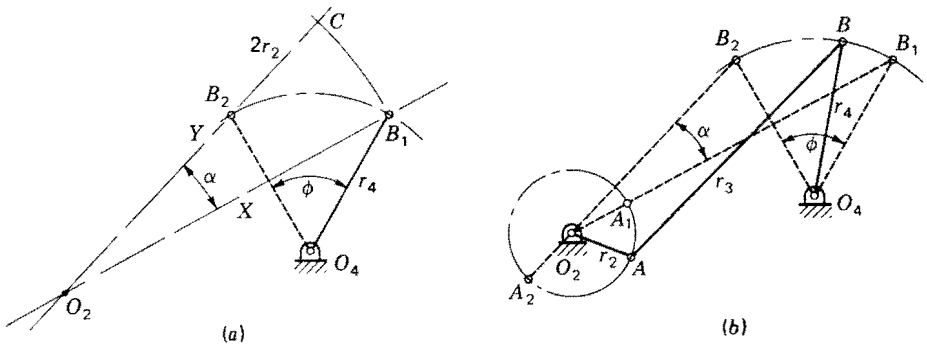


Figura 10-4 Síntesis de un eslabonamiento de cuatro barras para generar el ángulo del oscilador.

Para sintetizar un mecanismo de manivela y oscilador, para los valores específicos de ϕ y α, localícese el punto O_4 en la figura 10-4*a* y elíjase cualquier longitud deseada del oscilador, r_4. Luego trácense las dos posiciones O_4B_1 y O_4B_2 del eslabón 4, separadas por el ángulo ϕ como se dé. Trácese cualquier recta X que pase por B_1. Entonces, trácese la recta Y que pase por B_2, formando el ángulo dado α con X. La intersección de estas dos rectas define la ubicación del pivote de la manivela, O_2. Puesto que originalmente se eligió cualquier recta X, existe un número infinito de soluciones para este problema.

A continuación, como se observa en las figuras 10-3 y 10-4*a*, la distancia B_2C es $2r_2$, el doble de la longitud de la manivela. Por tanto, biséquese esta distancia para encontrar r_2. Entonces la longitud del acoplador es $r_3 = O_2B_1 - r_2$. En la figura 10-4*b* se ilustra el eslabonamiento completado.

10-6 MECANISMOS DE MANIVELA-OSCILADOR CON ÁNGULO ÓPTIMO DE TRANSMISIÓN

Brodell y Soni† han desarrollado un método analítico para sintetizar el eslabonamiento de manivela y oscilador en el que la razón de tiempos sea $Q = 1$. El diseño satisface también la condición

$$\gamma_{\text{mín}} = 180^\circ - \gamma_{\text{máx}} \qquad (a)$$

en donde γ es el ángulo de transmisión (véase la sección 1-10).

† R. Joe Brodell y A. H. Soni. "Design of the Crank-Rocker Mechanism with Unit Time Ratio", *J. Mech.*, vol. 5 No. 1, p. 1, 1970.

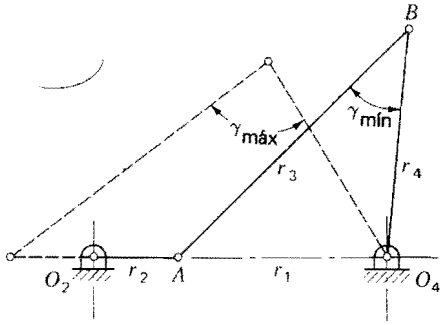


Figura 10-5

Con el fin de desarrollar el método, úsese la figura 10-3 y la ley de los cosenos, para escribir las dos ecuaciones

$$\cos(\theta_4 + \phi) = \frac{r_1^2 + r_4^2 - (r_2 + r_3)^2}{2r_1 r_4} \qquad (b)$$

$$\cos\theta_4 = \frac{r_1^2 + r_4^2 - (r_3 - r_2)^2}{2r_1 r_4} \qquad (c)$$

Luego, según la figura 10-5,

$$\cos\gamma_{\text{mín}} = \frac{r_3^2 + r_4^2 - (r_1 - r_2)^2}{2r_3 r_4} \qquad (d)$$

$$\cos\gamma_{\text{máx}} = \frac{r_3^2 + r_4^2 - (r_1 + r_2)^2}{2r_3 r_4} \qquad (e)$$

Las ecuaciones (*a*) a (*e*) ahora se resuelven en forma simultánea; los resultados son las razones entre los eslabones

$$\frac{r_3}{r_1} = \sqrt{\frac{1 - \cos\phi}{2\cos^2\gamma_{\text{mín}}}} \qquad (10\text{-}3)$$

$$\frac{r_4}{r_1} = \sqrt{\frac{1 - (r_3/r_1)^2}{1 - (r_3/r_1)^2\cos^2\gamma_{\text{mín}}}} \qquad (10\text{-}4)$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 - 1} \qquad (10\text{-}5)$$

Brodell y Soni representan gráficamente estos resultados como una gráfica de diseño, como se ilustra en la figura 10-6. Estos investigadores afirman que el ángulo de transmisión debe ser mayor que 30° para lograr un movimiento de buena "calidad", e incluso mayor, cuando se manejan velocidades elevadas.

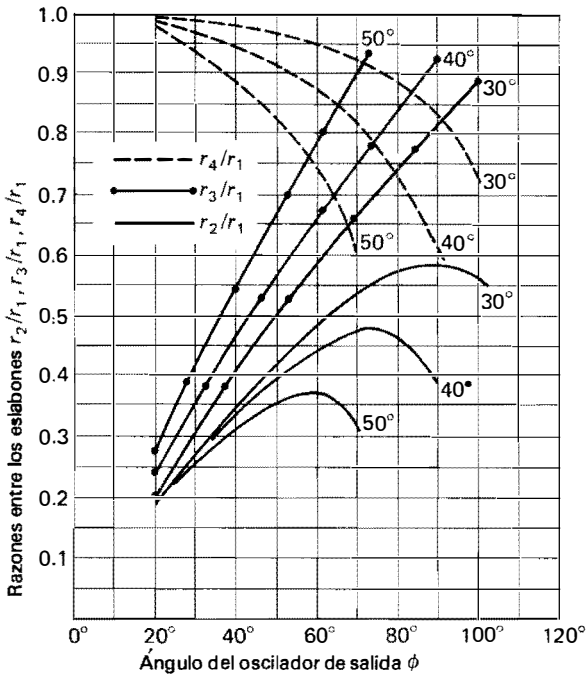


Figura 10-6 Gráfica de Brodell-Soni para diseñar el eslabonamiento de manivela y oscilador, con un ángulo de transmisión óptimo y razón de tiempos unitaria. Los ángulos que se dan en las gráficas son γ_{min}.

La síntesis de un mecanismo de manivela y oscilador para el ángulo de transmisión óptimo, cuando la razón de tiempos no es la unidad, es más difícil. Hall†, y también Soni‡, explican un método ordenado para lograr esto. En la figura 10-7 se ilustra el primer paso de este procedimiento. En este caso se seleccionan los dos

† *Op. cit.*, pp. 36-42.
‡ *Op. cit.*, p. 258.

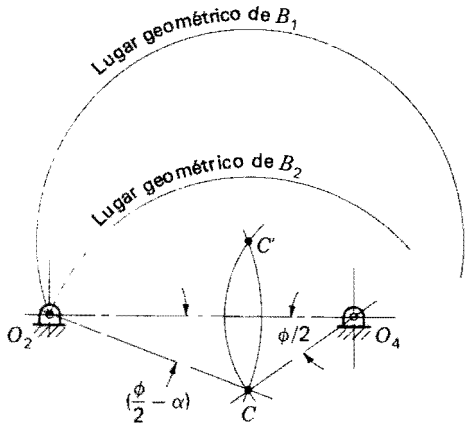


Figura 10-7 Diagrama que muestra todas las ubicaciones posibles de B_1 y B_2.

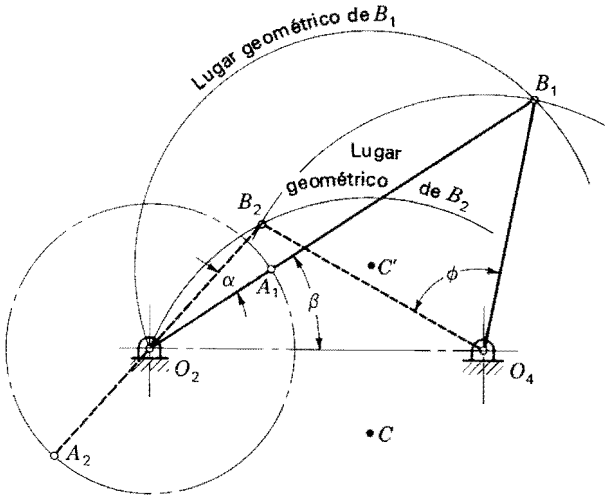


Figura 10-8 Determinación de las longitudes de los eslabones para uno de los mecanismos de manivela y oscilador posibles.

puntos O_2 y O_4, y se encuentran los puntos C y C', simétricos respecto a O_2O_4 y definidos por los ángulos $(\phi/2) - \alpha$ y $\phi/2$. Luego, utilizando a C como centro y a la distancia que va de C a O_2 como radio, trácese el arco circular que es el lugar geométrico de B_2. En seguida, utilizando a C' como centro y con el mismo radio, trácese otro arco circular que sea el lugar geométrico de B_1.

En la figura 10-8 se ha sintetizado uno de los muchos eslabonamientos posibles de manivela y oscilador. Para obtener las dimensiones, elíjase cualquier punto B_1 sobre el lugar geométrico de B_1, y trácese un arco alrededor de O_4, con el fin de localizar a B_2 sobre el lugar geométrico de B_2. Una vez que se definen estos dos puntos, se aplican los métodos de la sección anterior para localizar los puntos A_1 y A_2, junto con las longitudes de los eslabones, r_2 y r_3.

Siempre se deben verificar los eslabonamientos resultantes para asegurarse de que el eslabón 2 es capaz de describir un círculo completo.

Para obtener un eslabonamiento con un ángulo de transmisión óptimo, elíjase una variedad de puntos B_1 sobre el lugar geométrico de B_1, sintetizando un eslabonamiento para cada uno. Determínense los ángulos $|90° - \gamma_{min}|$ y $|90° - \gamma_{máx}|$ para cada uno de estos eslabonamientos. Luego sitúense estos datos en una gráfica, utilizando el ángulo β (Fig. 10-8) como la abscisa para obtener dos curvas. Entonces se define el mecanismo que tiene el mejor ángulo de transmisión mediante el punto bajo sobre una de las curvas.

10-7 SÍNTESIS DE TRES POSICIONES

En la figura 10-9*a*, el movimiento del oscilador de entrada O_2A, describiendo el ángulo ψ_{12}, provoca un movimiento del oscilador de salida O_4B, que describe el

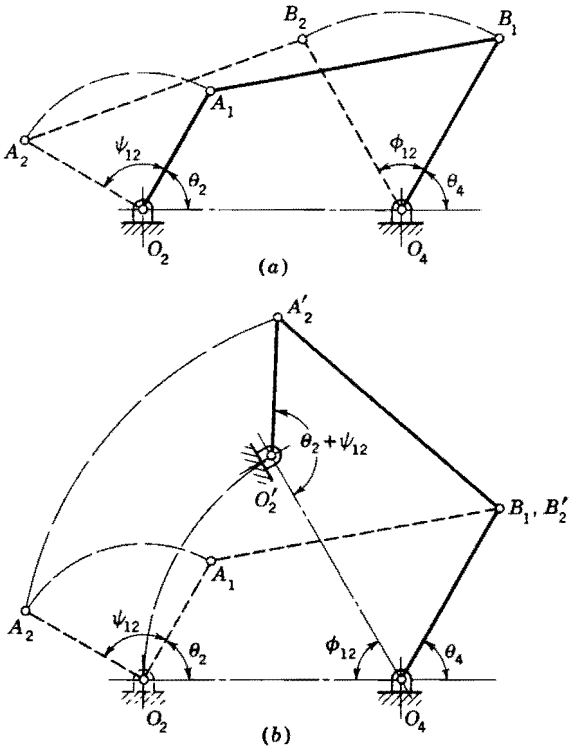


Figura 10-9 *a*) La rotación del oscilador de entrada O_2A describiendo el ángulo ψ_{12} hace que el oscilador de salida O_4B oscile describiendo el ángulo ϕ_{12}. *b*) Eslabonamiento invertido respecto a la posición O_4B.

ángulo ϕ_{12}. Para definir la inversión como una técnica de síntesis, mantengamos estacionario a O_4B y dejemos que el resto de los eslabones, incluyendo al marco, ocupen las mismas posiciones relativas como en la figura 10-9*a*. El resultado (Fig. 10-9*b*) se denomina *inversión en el oscilador de salida.* Nótese que A_1B_1 se

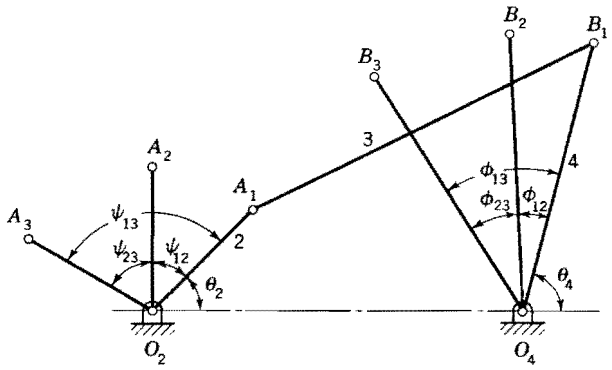


Figura 10-10

coloca en la misma posición que en las figuras 10-9*a* y *b*. Por consiguiente, la inversión se hace en la posición O_4B_1. Puesto que O_4B_1 debe estar fijo, el marco tendrá que moverse para que el eslabonamiento adquiera la posición A_2B_2. De hecho, el marco tendrá que moverse *hacia atrás,* describiendo el ángulo ϕ_{12}. Por ende, la segunda posición es $O_2'A_2'B_2'O_4$.

En la figura 10-10 se ilustra un problema y el eslabonamiento sintetizado en el que se desea determinar las dimensiones de un eslabonamiento en el que la palanca de salida debe ocupar tres posiciones especificadas, correspondientes a tres posiciones dadas de la palanca de entrada. En la figura 10-10, el ángulo de partida de la palanca de entrada es θ_2; y ψ_{12}, ψ_{23} y ψ_{13} son los ángulos de oscilación, respectivamente, entre las posiciones de diseño 1 y 2, 2 y 3, y 1 y 3. Para la palanca de salida se desean los ángulos de oscilación correspondientes ϕ_{12}, ϕ_{23} y ϕ_{13}. Es preciso determinar la longitud del eslabón 4 y su posición de partida θ_4.

La solución para el problema se ilustra en la figura 10-11 y se basa en la inversión del eslabonamiento en el eslabón 4. Trácese el oscilador de entrada O_2A en sus tres posiciones especificadas y localícese una posición deseada para O_4. Puesto que se hará la inversión en el eslabón 4, en la primera posición de diseño, trácese un rayo de O_4 a A_2 y gírelo hacia atrás describiendo el ángulo ϕ_{12} para localizar a A_2'. Del mismo modo, trácese otro rayo $OxAx$ y hágase girar hacia atrás describiendo el ángulo ϕ_{13} con el fin de localizar A_3'. Puesto que se está invirtiendo sobre la primera posición de diseño, A_1 y A_1' son coincidentes. Ahora trácense las mediatrices de las rectas $A_1'A_2'$ y $A_2'A_3'$. Éstas se intersecan en B_1 y definen la longitud del acoplador 3 así como la longitud y la posición de partida del eslabón 4.

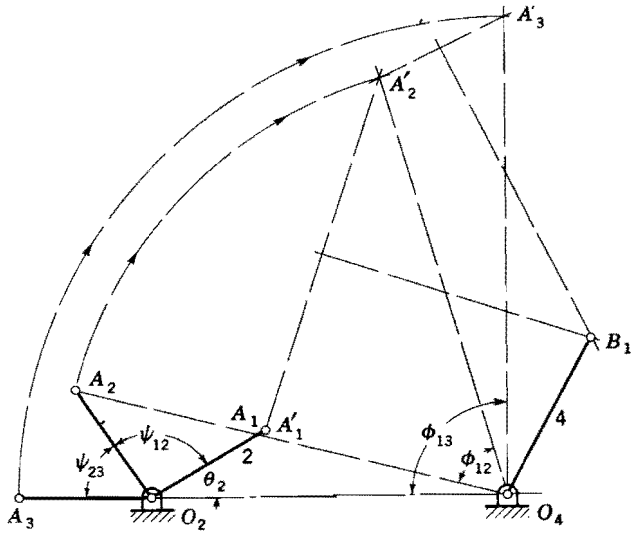


Figura 10-11

10-8 REDUCCIÓN DE LA POSICIÓN DEL PUNTO; CUATRO PUNTOS DE PRECISIÓN

En la reducción de la posición del punto, el eslabonamiento se hace simétrico respecto a la recta central del marco, O_2O_4, de forma que se logre que dos de los puntos A' sean coincidentes. El efecto de esto es producir tres puntos equivalentes A' por los que se pueda trazar un círculo como en la síntesis de tres posiciones. Este método se ilustra mejor con un ejemplo.

A continuación se sintetizará un eslabonamiento para poder generar la función $y = \log x$ para $10 \leq x \leq 60$, utilizando un intervalo de la manivela de entrada de 120° y uno de salida de 90°.

Con el propósito de simplificar la presentación, no se empleará el espaciamiento de Chebychev. Se evalúa el ángulo ψ para las cuatro posiciones de diseño a partir de la ecuación $\psi = ax + b$ y de las condiciones en la frontera $\psi = 0$ cuando $x = 10$ y $\psi = 120°$ cuando $x = 60$. Esto da $\psi = 2.40x - 24$. El ángulo ϕ se

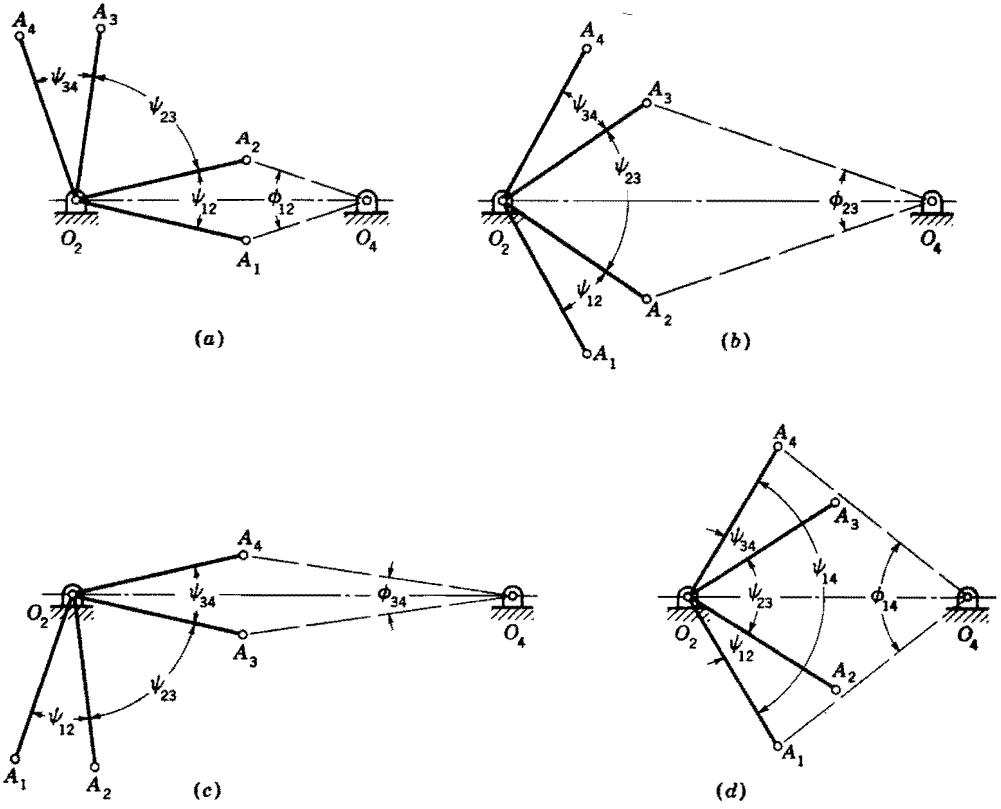


Figura 10-12

Tabla 10-1†

Posición	x	ψ, grados	y	ϕ, grados
1	10	0	2.30	0
2	20	24	3.00	35
3	45	94	3.80	75
4	60	120	4.10	90

† $\psi_{12} = 24°$ $\phi_{12} = 35°$
$\psi_{23} = 70°$ $\phi_{23} = 40°$
$\psi_{34} = 26°$ $\phi_{34} = 15°$

evalúa exactamente en la misma forma; de donde, se obtiene $\phi = 50y - 115$. En la tabla 10-1 se dan los resultados de este trabajo preliminar.

En la figura 10-12 se presenta una selección de cuatro configuraciones para la posición de partida. En *a*, la recta O_2O_4 biseca tanto a ψ_{12} como a ϕ_{12}; y, por tanto, si el elemento de salida que hace girar en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj, desde la posición O_4B_2, A_1' y A_2' serán coincidentes y se encontrarán en A_1. Entonces la inversión se basaría en la posición de O_4B_1. De donde A_3 se giraría describiendo el ángulo ϕ_{13}, en torno a O_4, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj hasta llegar a A_3', y A_4 describiría el ángulo ϕ_{14} hasta llegar a A_4'.

En la figura 10-12*b*, la recta O_2O_4 biseca a ψ_{23} y ϕ_{23}, en tanto que en *d* se bisecan los ángulos ψ_{14} y ϕ_{14}. Al obtener las inversiones para cada caso, debe tenerse un cuidado extremo para asegurarse de que se hace la rotación en la dirección correcta y con los ángulos correctos.

Cuando se usa la reducción de la posición del punto, lo único que es factible especificar por adelantado es la longitud del oscilador de entrada O_2A. La distancia O_2O_4 depende de los valores de ψ y ϕ, como se indica en la figura 10-12. Nótese que cada posición de síntesis ofrece un valor diferente para esta distancia. En realidad esto resulta muy conveniente ya que no es raro sintetizar un eslabonamiento que no pueda funcionar. Cuando esto sucede, se puede intentar una de las otras configuraciones.

El eslabonamiento sintetizado aparece en la figura 10-13. El procedimiento es exactamente el mismo que para los tres puntos de precisión, excepto en lo que ya se hizo notar previamente. El punto B_1 se obtiene en la intersección de las mediatrices de $A_1'A_3'$ y $A_3'A_4'$. En este ejemplo el mayor error cometido es menor que el 3%.

10-9 MÉTODO DE LA FIGURA SOBREPUESTA

La síntesis de un generador de función, póngase por caso, utilizando el método de la figura sobrepuesta, es el método más fácil y rápido de utilizar de entre todos. No siempre es posible obtener una solución y, en ocasiones, la exactitud es defi-

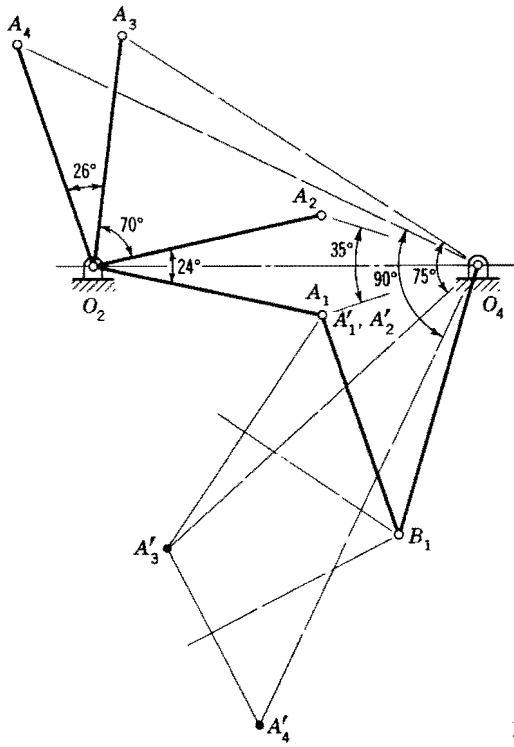


Figura 10-13

ciente. Sin embargo, desde un punto de vista teórico, se pueden emplear tantos puntos como se deseen en el proceso.

Diseñemos un generador de función para resolver la ecuación

$$y = x^{0.8} \qquad 1 \leq x \leq 3 \tag{a}$$

Supóngase que se eligen seis posiciones del eslabonamiento para este ejemplo y que se usa un espaciamiento uniforme del oscilador de salida. En la tabla 10-2 se muestran los valores de x y y redondeados, así como los ángulos correspondientes seleccionados para los osciladores de entrada y salida.

Tabla 10-2

Posición	x	ψ, grados	y	ϕ, grados
1	1	0	1	0
2	1.366	22.0	1.284	14.2
3	1.756	45.4	1.568	28.4
4	2.16	69.5	1.852	42.6
5	2.58	94.8	2.136	56.8
6	3.02	121.0	2.420	71.0

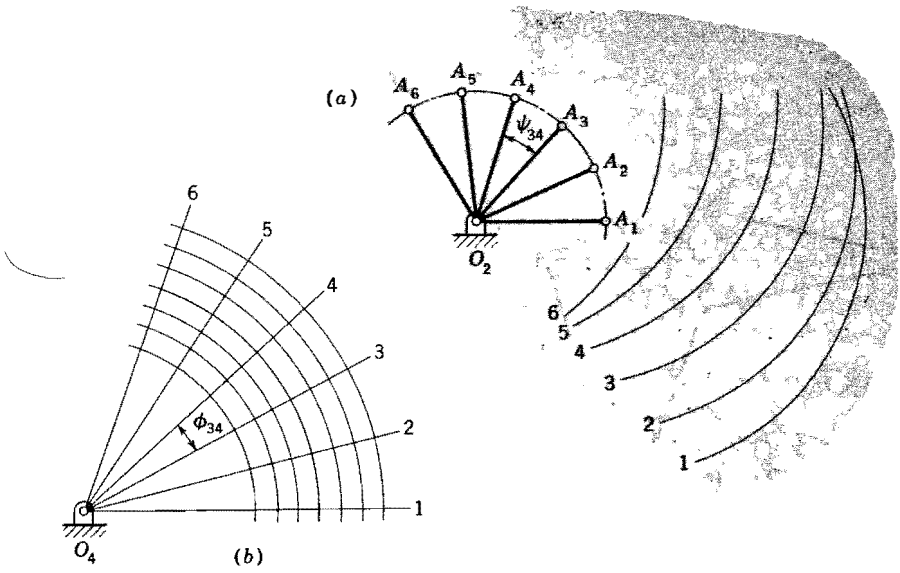


Figura 10-14

El primer paso de la síntesis es el que se ilustra en la figura 10-14*a*. Úsese una hoja de papel para dibujo y trácese el oscilador de entrada O_2A en todas sus posiciones. Esto exige que se elija la longitud de O_2A. Asimismo, en la misma hoja, elíjase una longitud para el acoplador AB y dibújense los arcos numerados del 1 al 6, utilizando respectivamente como centros desde A_1 hasta A_6.

Ahora, en otra hoja de papel, trácese el oscilador de salida, cuya longitud se desconoce, en todas sus posiciones, como se ilustra en la figura 10-14*b*. Con centro en O_4 dibújese cierto número de arcos igualmente espaciados que se intersequen con las rectas O_41, O_42, etc.; estos representan las longitudes posibles del oscilador de salida.

El paso final consiste en colocar esta última figura sobre el dibujo del primer papel y moverla en un intento por encontrar un ajuste. En este caso, se encontró el ajuste y el resultado es el que se ilustra en la figura 10-15.

10-10 SÍNTESIS DE LA CURVA DEL ACOPLADOR†

En esta sección se usa el método de reducción de la posición del punto para sintetizar un eslabonamiento de cuatro barras, de tal modo que un punto trazador del acoplador recorra cualquier trayectoria previamente especificada cuando se mueve el eslabonamiento. Luego, en las secciones que siguen, se descubrirá que las tra-

† Los métodos aquí presentados fueron ideados por Hain y se presentan en su obra, *op. cit.*, cap. 17.

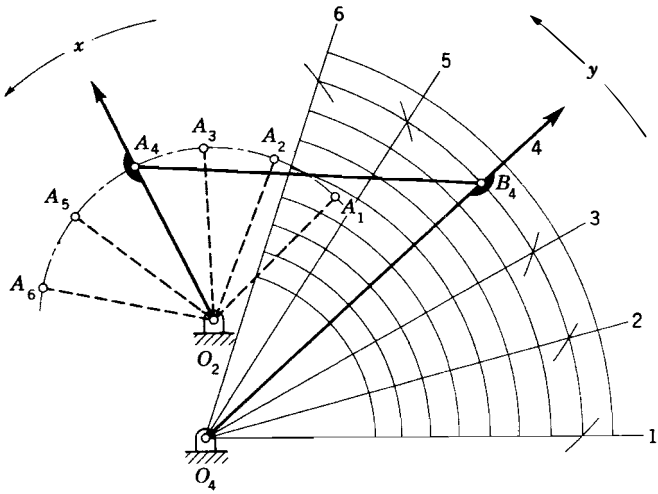


Figura 10-15

yectorias que tienen ciertas características son particularmente útiles al sintetizar eslabonamientos que tienen detenciones del elemento de salida para ciertos periodos de la rotación del elemento de entrada.

Al sintetizar un eslabonamiento con el fin de generar una trayectoria, se pueden elegir hasta seis puntos de precisión sobre la misma. Si la síntesis tiene éxito, el punto trazador pasará por cada uno de los puntos de precisión. El resultado final puede o no ser una aproximación de la trayectoria deseada.

En la figura 10-16 se ilustran dos posiciones de un eslabonamiento de cuatro barras. El eslabón 2 es el elemento de entrada; está conectado en A al acoplador 3,

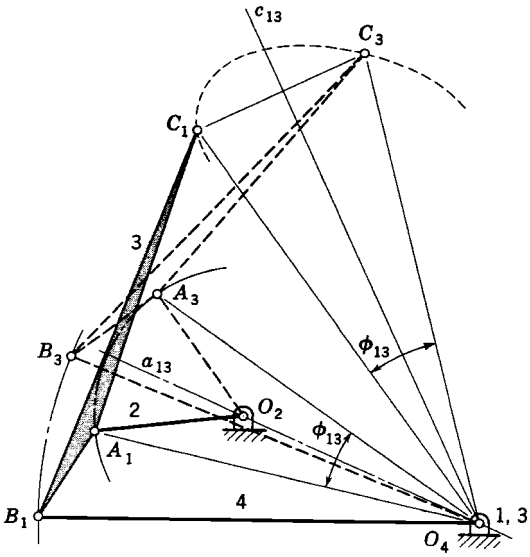


Figura 10-16

que contiene el punto trazador C, y al eslabón de salida 4 en B. Se ilustran dos fases del eslabonamiento mediante los subíndices 1 y 3. Los puntos C_1 y C_3 son dos posiciones del trazador sobre la trayectoria que se va a generar. En este ejemplo, C_1 y C_3 se han seleccionado en forma especial de tal modo que la mediatriz c_{13} pase por O_4. En lo que concierne a la selección de los puntos, se observará que el ángulo $C_1O_4C_3$ es igual al ángulo $A_1O_4A_3$, como se indica en la figura.

La ventaja de hacer que estos dos ángulos sean iguales es que, cuando se sintetiza finalmente el eslabonamiento, los triángulos $C_3A_3O_4$ y $C_1A_1O_4$ son congruentes. Por tanto, si se hace que el punto trazador pase por C_1, sobre la trayectoria, también pasará entonces por C_3.

Para sintetizar un eslabonamiento de tal manera que el acoplador pase por cuatro puntos de precisión, se localizan cuatro puntos cualesquiera C_1, C_2, C_3, C_4 de la trayectoria deseada (Fig. 10-17). Por ejemplo, eligiendo C_1 y C_3, primero se localiza O_4 en cualquier punto sobre la mediatriz c_{13}. Luego, con O_4 como centro y cualquier radio R, trácese un arco circular. A continuación, con los centros en C_1 y C_3 y cualquier otro radio r, márquense pequeños arcos que se intersequen con el arco de radio R. Estas dos intersecciones definen los puntos A_1 y A_3 del eslabón de entrada. Constrúyase la mediatriz a_{13} de A_1A_3 y obsérvese que pasa por O_4. Localícese O_2 en cualquier punto sobre a_{13}. Esto ofrece una oportunidad de elegir una longitud conveniente para el oscilador de entrada. Úsese ahora O_2 como centro y trácese el círculo de la manivela pasando por A_1 y A_3. Los puntos A_2 y A_4 de este círculo se obtienen marcando pequeños arcos de radio r una vez más con centro en C_2 y C_4. Esto completa la primera fase de la síntesis; se han localizado O_2 y O_4 en relación con la trayectoria deseada y, por ende, se ha definido la distancia O_2O_4. También se ha definido la longitud del elemento de entrada y se localizaron sus posiciones relativas a los cuatro puntos de precisión de la trayectoria.

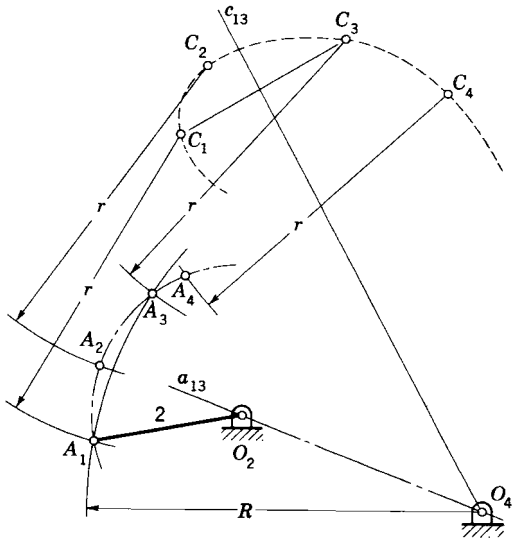


Figura 10-17

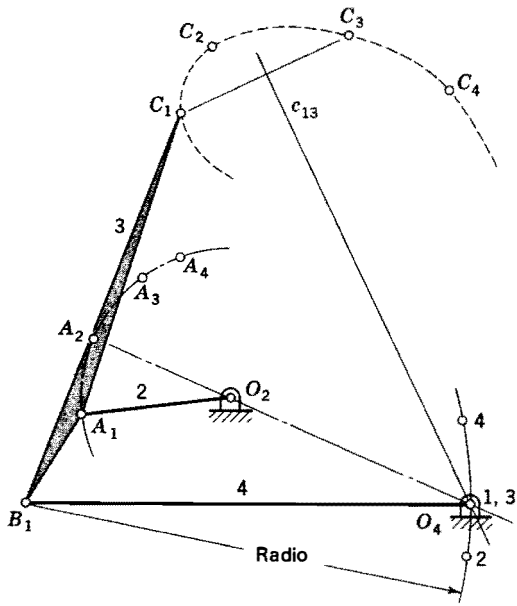


Figura 10-18

La siguiente tarea consiste en localizar el punto B, el punto de sujeción del acoplador y el elemento de salida. Se puede utilizar cualquiera de las cuatro ubicaciones de B; en este ejemplo se emplea la posición B_1.

Antes de dar principio al paso final, obsérvese que el eslabonamiento ha

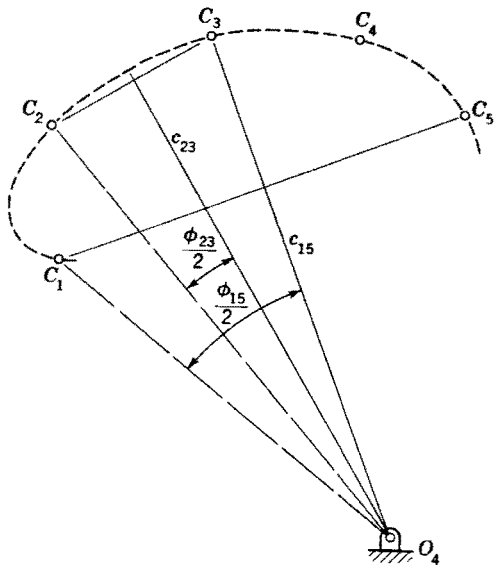


Figura 10-19

quedado definido. Se tomaron cuatro decisiones: la ubicación de O_4, los radios R y r y la ubicación de O_2. En consecuencia, hay una infinidad de soluciones posibles.

En relación con la figura 10-18, localícese el punto 2 haciendo congruentes a los triángulos $C_2A_2O_4$ y C_1A_12. Localícese el punto 4 haciendo que sean congruentes $C_4A_4O_4$ y C_1A_14. Los puntos 4, 2 y O_4 están sobre el círculo cuyo centro es B_1. De donde, B_1 se encuentra en la intersección de las mediatrices de O_42 y O_44. Nótese que el procedimiento utilizado hace que los puntos 1 y 3 coincidan con O_4. Una vez localizado B_1, se pueden dibujar los eslabones en su sitio y el mecanismo se prueba para ver si describe bien la trayectoria prescrita.

Para sintetizar un eslabonamiento con el fin de generar una trayectoria que pase por cinco puntos de precisión, es necesario hacer dos reducciones de punto. Se principia eligiendo cinco puntos de C_1 a C_5 sobre la trayectoria que se debe recorrer. Elíjanse dos pares de estos puntos para los fines de reducción. En la figura 10-19 se han elegido los pares C_1C_5 y C_2C_3. Otros pares que pudieran haberse usado son:

$$C_1C_5,\ C_2C_4 \qquad C_1C_5,\ C_3C_4 \qquad C_1C_4,\ C_2C_3 \qquad C_2C_5,\ C_3C_4$$

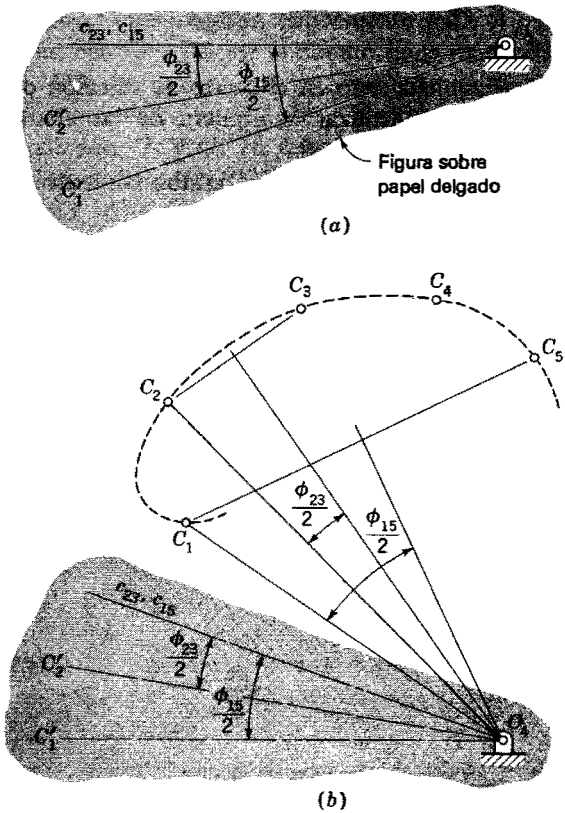


Figura 10-20

Constrúyanse las mediatrices c_{23} y c_{15} de las rectas que conectan a cada par. Estas intersecan en el punto O_4. Obsérvese que, en consecuencia, se puede localizar convenientemente O_4 mediante una selección juiciosa de los pares que se usarán, así como por la elección de las posiciones de los puntos C_i sobre la trayectoria.

El siguiente paso se realiza mejor empleando un trozo de papel delgado para sobreponerlo al dibujo. Fíjese esta hoja de papel delgado al dibujo y márquense el centro O_4, la mediatriz c_{23}, y otra recta que vaya de O_4 a C_2 sobre él. En la figura 10-24*a* se ilustra esta superposición en donde la recta O_4C_2 se designa como O_4C_2'. Esto define al ángulo $\phi_{23}/2$. A continuación, gírese el papel delgado en torno a O_4 hasta que la mediatriz coincida con c_{15} y repítase el procedimiento para el punto C_1. Con esto se define el ángulo $\phi_{15}/2$ y la recta correspondiente O_4C_1'.

Ahora se fija el papel sobrepuesto en O_4, utilizando una tachuela y se hace girar hasta que se encuentre una buena posición. Es conveniente ajustar el compás con un radio conveniente r y dibujar círculos en torno a cada punto C_i. La intersección de estos círculos con las rectas O_4C_1' y O_4C_2' de la hoja sobrepuesta, y entre sí, revelará cuáles áreas valdrá la pena investigar. Véase la figura 10-20*b*.

En la figura 10-21 se muestran los pasos finales de la solución. Después de localizar una buena posición para el papel sobrepuesto, transfiéranse las tres rectas al dibujo y quítese el papel. A continuación dibújese un arco circular de radio r para que se interseque con O_4C_1' y localícese A_1. Otro arco del mismo radio r desde C_2 interseca con O_4C_2' en A_2. Una vez localizados A_1 y A_2, dibújese la me-

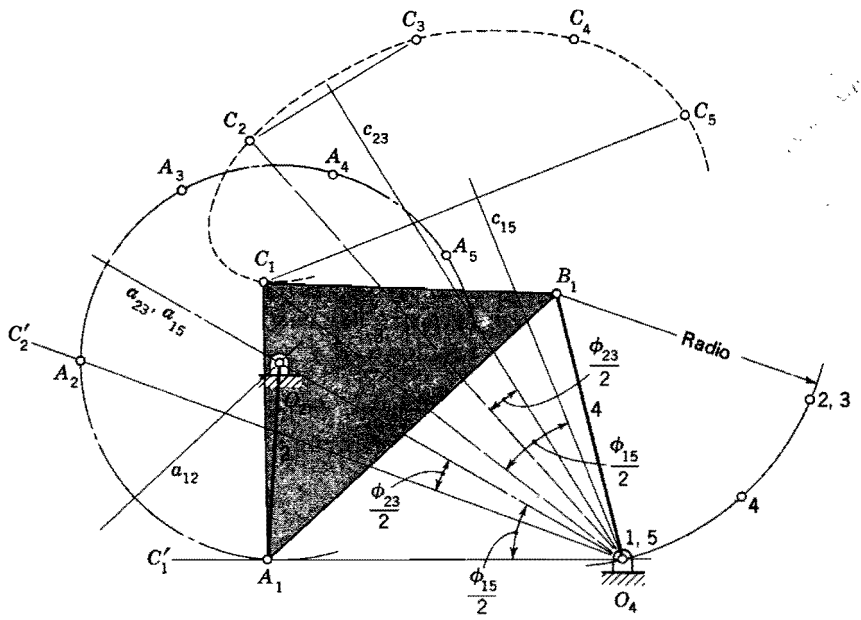


Figura 10-21

diatriz a_{12}; ésta se interseca con a_{23} en O_2, dando la longitud del oscilador de entrada. Un círculo que pase por A_1, en torno a O_2, contendrá todas las posiciones de diseño de A; utilícese el mismo radio r, localícense A_3, A_4 y A_5 sobre arcos trazados alrededor de C_3, C_4 y C_5.

Ahora ya se localizó todo excepto el punto B_1, y éste se encuentra como antes. Existe un doble punto 2,3 debido a la elección de O_4 en la mediatriz c_{23}. Para localizar este punto, trácese un arco desde C_1 cuyo radio sea C_2O_4. Luego se traza otro desde A_1 con radio A_2O_4. Estos se intersecan en el punto 2,3. Para localizar el punto 4, márquese un arco desde C_1, con radio C_4O_4, y otro desde A_1, con radio A_4O_4. Nótese que los puntos O_4 y los puntos dobles 1,5 coinciden, porque la síntesis se basa en la inversión sobre la posición O_4B_1. Los puntos O_4, 4 y los puntos dobles 2,3, están sobre un círculo cuyo centro es B_1, como se muestra en la figura 10-21. El eslabonamiento se completa dibujando el acoplador y el seguidor en la primera posición de diseño.

10-11 ESLABONAMIENTOS AFINES; TEOREMA DE ROBERTS-CHEBYCHEV

Una de las propiedades desusuales del eslabonamiento plano de cuatro barras es que no hay uno sino tres eslabonamientos de cuatro barras que generan la misma curva del acoplador. Esto fue descubierto por Roberts † en 1875 y por Chebychev en 1878, de ahí que se conozca como teorema de Roberts-Chebychev. Aunque se mencionó en una publicación en lengua inglesa en 1954,‡ no apareció en las publicaciones estadounidenses sino hasta que fue presentado en forma independiente, y casi simultánea, por Richard S. Hartenberg y Jacques Denavit, de la North Western University, y por Rolland T. Hinkle, de la Michigan State University.§

En la figura 10-22, sea O_1ABO_2 el eslabonamiento original de cuatro barras con un punto del acoplador P fijo a AB. Hartenberg y Denavit denominaron *eslabonamientos afines* a los dos eslabonamientos restantes definidos por el teorema de Roberts-Chebychev. Cada uno de los eslabonamientos afines se ilustran en la figura 10-22, uno de ellos mediante guiones cortos y el otro mediante trazos largos. La construcción es evidente, si se observa que hay cuatro triángulos semejantes, cada uno de los cuales contiene a los ángulos α, β y γ, y tres paralelogramos diferentes.

Una buena manera de obtener las dimensiones de los dos eslabonamientos afines es imaginar que pueden soltarse las conexiones con el marco, O_1, O_2 y O_3.

† Por S. Roberts, un matemático; que no es el mismo Roberts a quien se debe el generador de líneas rectas aproximadas (Fig. 1-12*b*).

‡ P. Grodzinski y E. M'Ewan, "Link Mechanisms in Modern Kinematics", *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 168. no. 37. p. 877-896, 1954.

§ R. S. Hartenberg y Jacques Denavit, "The Fecund Four-Bar", *Trans. 5th Conf. Mech., Purdue University, Lafayette, Ind., 1958*, p. 194. R. T. Hinkle, "Alternate Four-Bar Linkages", *Prod. Eng.*, vol. 29, p. 54, october, 1958.

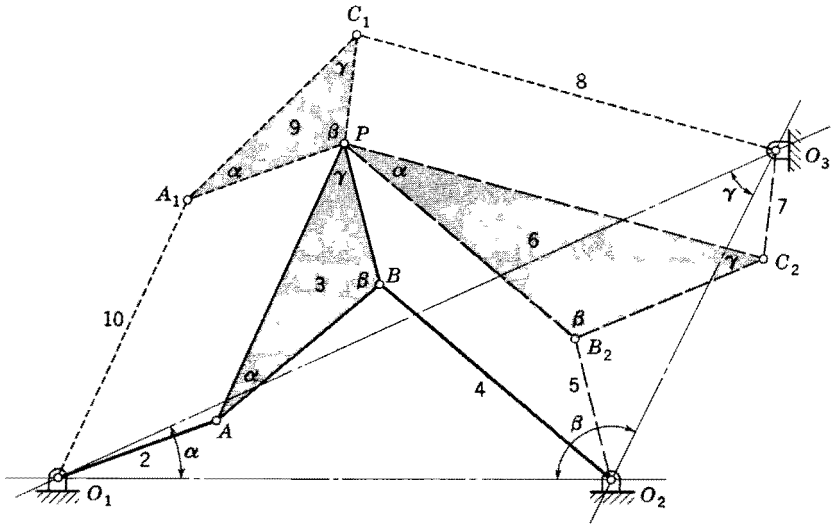


Figura 10-22

Luego "se tira" de O_1, O_2 y O_3, separándolos hasta que se forma una recta con la manivela, el acoplador y el seguidor de cada eslabonamiento. Si se hace esto con la figura 10-22, se obtiene la figura 10-23. Nótese que las distancias sobre el marco son incorrectas; pero todos los eslabones movibles tienen la longitud correcta, y todos los ángulos son los correctos. Dado cualquier eslabonamiento de cuatro barras y su punto del acoplador, se puede crear un dibujo como el de la figura 10-23

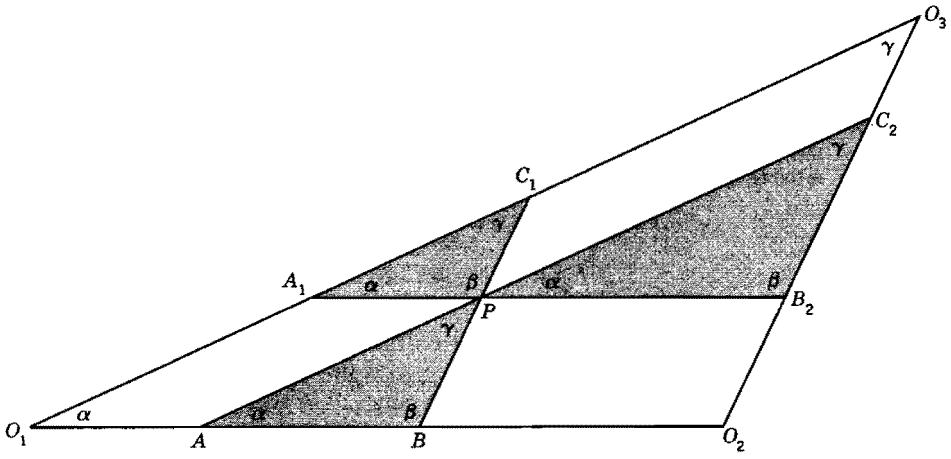


Figura 10-23 Diagrama de Cayley.

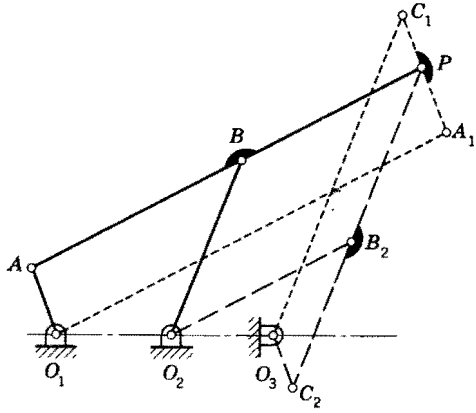


Figura 10-24

y obtener las dimensiones de los otros dos eslabonamientos afines. Este método fue descubierto por A. Cayley y se denomina *diagrama de Cayley*. †

La ventaja del teorema de Roberts-Chebychev es que uno de los otros dos eslabonamientos afines puede tener mejores características de movimiento, o un mejor ángulo de transmisión, o bien, caber en un espacio menor.

Si el punto trazador P se encuentra sobre la recta AB, o su extensión, una figura como la 10-23 es de poca ayuda, debido a que los tres eslabonamientos se comprimen en una sola recta. En la figura 10-24 se presenta un ejemplo en el que O_1ABO_2 es el eslabonamiento original que tiene un punto del acoplador P, sobre una extensión de AB. Para encontrar los eslabonamientos afines, localícese O_3 sobre una extensión de O_1O_2 en la misma razón que AB es a BP. Luego contrúyanse en orden, los paralelogramos O_1A_1PA, O_2B_2PB y $O_3C_1PC_2$.

Hartenberg y Denavit demuestran que las relaciones de velocidad angular entre los eslabones de la figura 10-22 son

$$\omega_9 = \omega_2 = \omega_7 \qquad \omega_{10} = \omega_3 = \omega_5 \qquad \omega_8 = \omega_4 = \omega_6 \tag{10-6}$$

† A. Cayley, "On Three-Bar Motion". *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 7. pp. 136-166, 1876. En la época de Cayley, un eslabonamiento de cuatro barras se describía como un mecanismo de tres barras porque aún no se había concebido la idea de cadena cinemática.

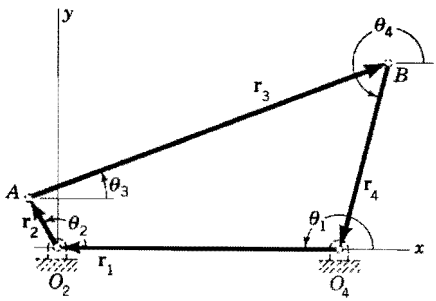


Figura 10-25

También observan que si se impulsa el eslabón 2 con una velocidad angular constante y si se deben conservar las relaciones de velocidad durante la generación de la curva del acoplador, los mecanismos afines tendrán que ser impulsados con velocidades angulares variables.

10-12 SÍNTESIS ANALÍTICA UTILIZANDO ÀLGEBRA COMPLEJA

Hay ocasiones en que se publica una investigación que resulta clásica por su simplicidad e ingenio. El especialista ruso en cinemática Bloch † publicó una investigación de esta índole, que fue la chispa que encendió una generación completa de investigación. Su método se presenta aquí más por las ideas adicionales que puede generar, que por su valor intrínseco, y también en virtud de su interés histórico.

En la figura 10-25 reemplácense los eslabones de un eslabonamiento de cuatro barras por vectores de posición y escríbase la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 = 0 \qquad (a)$$

En notación compleja polar, la ecuación (*a*) se escribe

$$r_1 e^{j\theta_1} + r_2 e^{j\theta_2} + r_3 e^{j\theta_3} + r_4 e^{j\theta_4} = 0 \qquad (b)$$

La primera y segunda derivadas de estas ecuaciones son

$$r_2\omega_2 e^{j\theta_2} + r_3\omega_3 e^{j\theta_3} + r_4\omega_4 e^{j\theta_4} = 0 \qquad (c)$$

$$r_2(\alpha_2 + j\omega_2^2)e^{j\theta_2} + r_3(\alpha_3 + j\omega_3^2)e^{j\theta_3} + r_4(\alpha_4 + j\omega_4^2)e^{j\theta_4} = 0 \qquad (d)$$

Si ahora las ecuaciones (*b*), (*c*) y (*d*) se regresan a la notación vectorial, se obtienen las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \quad &+ \mathbf{r}_2 \quad &+ \mathbf{r}_3 \quad &+ \mathbf{r}_4 = 0 \\ &\omega_2\mathbf{r}_2 \quad &+ \omega_3\mathbf{r}_3 \quad &+ \omega_4\mathbf{r}_4 = 0 \\ &(\alpha_2 + j\omega_2^2)\mathbf{r}_2 + (\alpha_3 + j\omega_3^2)\mathbf{r}_3 \quad &+ (\alpha_4 + j\omega_4^2)\mathbf{r}_4 = 0 \end{aligned} \qquad (e)$$

Este es un conjunto de ecuaciones vectoriales homogéneas cuyos coeficientes son números complejos. Bloch especificó los valores deseados de todas las velocidades angulares y aceleraciones angulares, y luego resolvió las ecuaciones para obtener las dimensiones relativas del eslabonamiento.

† S. Sch. Bloch. "On the Synthesis of Four-Bar Linkages" (en ruso), *Bull, Acad. Sci. USSR.*, pp. 47-54, 1940.

Al resolver las ecuaciones (e) para $\mathbf{r}_2$ da

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega_3 & \omega_4 \\ 0 & \dot{\omega}_3 + j\omega_3^2 & \dot{\omega}_4 + j\omega_4^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \alpha_2 + j\omega_2^2 & \alpha_3 + j\omega_3^2 & \alpha_4 + j\omega_4^2 \end{vmatrix}} \qquad (f)$$

Se obtendrán expresiones similares para $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$. Resulta que los denominadores para las tres expresiones, es decir, para $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$, son números complejos e iguales. En la división, se dividen las magnitudes y se restan los ángulos. Puesto que estos denominadores son todos semejantes, el efecto de la división sería cambiar las magnitudes de $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$ en el mismo factor, y desplazar todas las direcciones en el mismo ángulo. Por esta razón, se hace que todos los denominadores sean la unidad; las soluciones dan en tal caso vectores adimensionales para los eslabones. Cuando los determinantes se evalúan, se encuentra

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \omega_4(\alpha_3 + j\omega_3^2) - \omega_3(\alpha_4 + j\omega_4^2) \\ \mathbf{r}_3 &= \omega_2(\alpha_4 + j\omega_4^2) - \omega_4(\alpha_2 + j\omega_2^2) \\ \mathbf{r}_4 &= \omega_3(\alpha_2 + j\omega_2^2) - \omega_2(\alpha_3 + j\omega_2^2) \\ \mathbf{r}_1 &= -\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4 \end{aligned} \qquad (10\text{-}7)$$

Ejemplo 10-1 Sintetícese un eslabonamiento de cuatro barras que dé los siguientes valores para las velocidades y aceleraciones angulares:

$$\omega_2 = 200 \text{ rad/s} \qquad \omega_3 = 85 \text{ rad/s} \qquad \omega_4 = 130 \text{ rad/s}$$
$$\alpha_2 = 0 \text{ rad/s}^2 \qquad \alpha_3 = -1000 \text{ rad/s}^2 \qquad \alpha_4 = -16\,000 \text{ rad/s}^2$$

SOLUCIÓN Después de sustituir los valores dados en las ecuaciones (10-7

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= 130[-1000 + j(85^2)] - 85[-16\,000 + j(130)^2] \\ &= 1\,230\,000 - j497\,000 = 1\,330\,000\angle -22^\circ \text{ unidades} \\ \mathbf{r}_3 &= 200[-16\,000 + j(130)^2] \\ &= -3\,200\,000 - j1\,820\,000 = 3\,690\,000\angle -150.4^\circ \text{ unidades} \\ \mathbf{r}_4 &= 85[0 + j(200)^2] - 200[-1000 + j(85)^2] \\ &= 200\,000 + j1\,955\,000 = 1\,965\,000\angle 84.15^\circ \text{ unidades} \\ \mathbf{r}_1 &= -(1\,230\,000 - j497\,000) - \\ &\quad -(200\,000 + j1\,955\,000) \\ &= 1\,770\,000 + j362\,000 = 1\,810\,000\angle 11.6^\circ \text{ unidades} \end{aligned}$$

En la figura 10-
pulgada. Para hacer que $\mathbf{r}_1$ sea horizontal y esté en la dirección $-x$ se debe hacer girar todo el sistema vectorial en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj 180-1 1.6
Entonces se puede construir el eslabonamiento resultante utilizando $\mathbf{r}_1$ para el eslabón 1, $\mathbf{r}_2$ para el eslabón 2, etc., como se ilustra en la figura 10-26*b*.
en pulgadas y, si se analiza, se encontrará que se han satisfecho las condiciones del ejemplo.

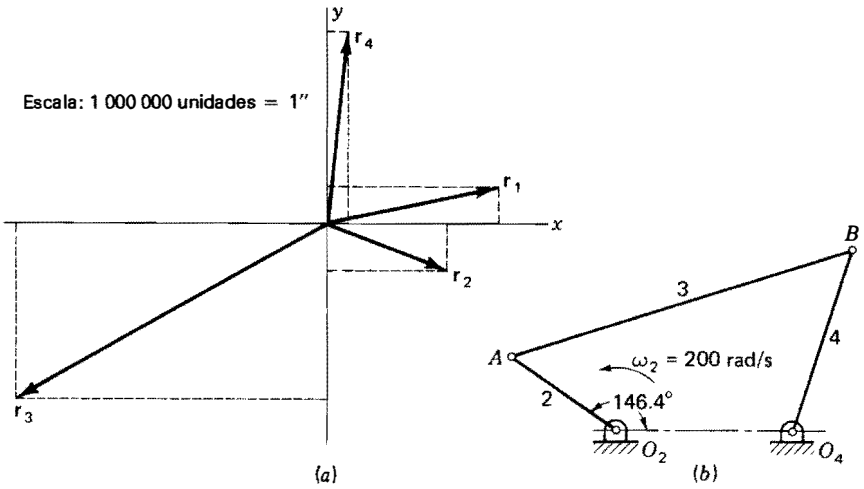


Figura 10-26 O_2A = 1.33 pulg; AB = 3.79 pulg; O_4B = 1.965 pulg; O_2O_4 = 1.81 pulg.

10-13 ECUACIÓN DE FREUDENSTEIN †

Si la ecuación de la sección anterior se lleva a la forma compleja rectangular, y si se separan las componentes real e imaginaria, se obtienen las dos ecuaciones algebraicas

$$r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 = 0 \qquad (a)$$

$$r_1 \operatorname{sen} \theta_1 + r_2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 = 0 \qquad (b)$$

Partiendo de la figura 10-25, sen $\theta_1 = 0$ y cos $\theta_1 = -1$; de donde,

$$-r_1 + r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 = 0 \qquad (c)$$

$$r_2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 = 0 \qquad (d)$$

Para eliminar el ángulo del acoplador θ_3 de las ecuaciones, pásense todos los términos, excepto los que comprenden a r_3, al segundo miembro y elévense al cuadrado ambos miembros. Esto da

$$r_3^2 \cos^2 \theta_3 = (r_1 - r_2 \cos \theta_2 - r_4 \cos \theta_4)^2 \qquad (e)$$

$$r_3^2 \operatorname{sen}^2 \theta_3 = (-r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_4 \operatorname{sen} \theta_4)^2 \qquad (f)$$

† Ferdinand Freudenstein, "Approximate Synthesis of Four-Bar Linkages", *Trans. ASME.* vol. 77. no. 6, pp. 853-861, 1955.

Desarróllense los segundos miembros de ambas ecuaciones y súmense. El resultado es el siguiente:

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - 2r_1r_2\cos\theta_2 - 2r_1r_4\cos\theta_4 + 2r_2r_4(\cos\theta_2\cos\theta_4 + \operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_4) \qquad (g)$$

Ahora, obsérvese que $\cos\theta_2\cos\theta_4 + \operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_4 \equiv \cos(\theta_2 - \theta_4)$. Si se hace esta sustitución, divídase entre el término $2r_2r_4$, y reordénense una vez más, se obtiene

$$\frac{r_3^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_4^2}{2r_2r_4} + \frac{r_1}{r_4}\cos\theta_2 + \frac{r_1}{r_2}\cos\theta_4 = \cos(\theta_2 - \theta_4) \qquad (h)$$

Freudenstein escribe la ecuación (*h*) en la forma

$$K_1\cos\theta_2 + K_2\cos\theta_4 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4) \qquad (10\text{-}8)$$

siendo

$$K_1 = \frac{r_1}{r_4} \qquad (10\text{-}9)$$

$$K_2 = \frac{r_1}{r_2} \qquad (10\text{-}10)$$

$$K_3 = \frac{r_3^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_4^2}{2r_2r_4} \qquad (10\text{-}11)$$

Ya se han presentado métodos gráficos para sintetizar un eslabonamiento de tal modo que el movimiento del elemento de salida se coordine con el de entrada. La ecuación de Freudenstein nos permite realizar esta misma tarea por medios analíticos. En consecuencia, supóngase que se desea que la palanca de salida de un eslabonamiento de cuatro barras ocupe las posiciones ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 correspondientes a las posiciones angulares ψ_1, ψ_2, y ψ_3 de la palanca de entrada. En la (10-8), lo único que se hace es sustituir θ_2 por ψ, θ_4 por ϕ, y se escribe la ecuación tres veces, una para cada posición. Esto da

$$\begin{aligned} K_1\cos\psi_1 + K_2\cos\phi_1 + K_3 &= \cos(\psi_1 - \phi_1) \\ K_1\cos\psi_2 + K_2\cos\phi_2 + K_3 &= \cos(\psi_2 - \phi_2) \\ K_1\cos\psi_3 + K_2\cos\phi_3 + K_3 &= \cos(\psi_3 - \phi_3) \end{aligned} \qquad (i)$$

Las ecuaciones (*i*) se resuelven simultáneamente para las tres incógnitas K_1, K_2, K_3. Luego se selecciona una longitud, por ejemplo r_1, para uno de los eslabones y se resuelven las ecuaciones (10-9) a (10-11) para determinar las dimensiones de los otros tres. El método queda mejor ilustrado por medio de un ejemplo.

Ejemplo 10-2 Sintetícese un generador de función para resolver la ecuación

$$y = \frac{1}{x} \qquad 1 \le x \le 2$$

utilizando tres puntos de precisión.

SOLUCIÓN Si se elige el espaciamiento de Chebychev, se encuentra, basándose en la (10-1), que los valores de x y los valores correspondientes de y son

$$x_1 = 1.067 \qquad y_1 = 0.937$$
$$x_2 = 1.500 \qquad y_2 = 0.667$$
$$x_3 = 1.933 \qquad y_3 = 0.517$$

Ahora se deben elegir los ángulos de partida para las palancas de entrada y salida, así como los ángulos de oscilación total para cada una. Estas son decisiones arbitrarias y es posible que no conduzcan a un buen eslabonamiento, en el sentido de que los errores estructurales entre los puntos de precisión pueden ser grandes o que los ángulos de transmisión resulten deficientes. En ese género de síntesis, hay ocasiones en que incluso se descubre que debe eliminarse uno de los pivotes para pasar de un punto de precisión a otro. Por lo general se requiere cierto trabajo de tanteos para descubrir las mejores posiciones de partida y ángulos de oscilación más adecuados.

Tabla 10-3

x	ψ, grados	y	ϕ, grados
1.000	30.00	1.000	240.00
1.067	36.03	0.937	251.34
1.500	75.00	0.667	300.00
1.933	113.97	0.517	326.94
2.000	120.00	0.500	330.00

Para la palanca de entrada se escoge una posición de partida de 30° y un ángulo de oscilación total de 90°. Para la palanca de salida, elíjase la posición de partida a 240° y también un recorrido total de 90°. Una vez tomadas estas decisiones, pueden completarse el primero y último renglón mostrados en la tabla 10-3.

A continuación, para obtener los valores de ψ y ϕ correspondientes a los puntos de precisión, escríbase

$$\psi = ax + b \qquad \phi = cy + d \tag{1}$$

y úsense los datos del primero y último renglones de la tabla 10-3 para evaluar las constantes a, b, c y d. Cuando se hace esto, se encuentra que las ecuaciones (1) son

$$\psi = 90x - 60 \qquad \phi = -180y + 420 \tag{2}$$

Ahora se pueden usar estas ecuaciones con el fin de calcular los datos para los renglones restantes de la tabla 10-3 y determinar las escalas de las palancas de entrada y salida del eslabonamiento sintetizado.

Ahora tómense los valores de ψ y ϕ de la segunda línea de la tabla 10-3 y sustitúyanse θ_2 y θ_4 por ellos en la (10-8). Repítase esta operación para la tercera y cuarta líneas. Entonces se tienen las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} K_1 \cos 36.03 + K_2 \cos 251.34 + K_3 &= \cos(36.03 - 251.34) \\ K_1 \cos 75.00 + K_2 \cos 300.00 + K_3 &= \cos(75.00 - 300.00) \\ K_1 \cos 113.97 + K_2 \cos 326.94 + K_3 &= \cos(113.97 - 326.94) \end{aligned} \tag{3}$$

Cuando se llevan a cabo las operaciones indicadas, se tiene

$$\begin{aligned} 0.8087K_1 - 0.3200K_2 + K_3 &= -0.8160 \\ 0.2588K_1 + 0.5000K_2 + K_3 &= -0.7071 \\ -0.4062K_1 + 0.8381K_2 + K_3 &= -0.8389 \end{aligned} \tag{4}$$

Después de resolver las ecuaciones (4), se obtiene

$$K_1 = 0.4032 \qquad K_2 = 0.4032 \qquad K_3 = -1.0130$$

Utilizando $r_1 = 1$ unidad, de la (10-9) se obtiene

$$r_4 = \frac{r_1}{K_1} = \frac{100}{0.4032} = 2.48 \text{ units}$$

Del mismo modo, basándose en las ecuaciones (10-10) y (10-11), resulta que

$$r_2 = 2.48 \text{ units} \qquad r_3 = 0.968 \text{ unit}$$

El resultado es el eslabonamiento cruzado que se ilustra en la figura 10-27.

Freudenstein ofrece las siguientes sugerencias que serán de gran ayuda para sintetizar tales generadores:

1. Los ángulos totales de oscilación de los elementos de entrada y salida deben ser menores que 120°.
2. Evítese la generación de funciones simétricas tales como $y = x^2$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.
3. Evítese la generación de funciones que tengan cambios de pendiente abruptos.

10-14 SÍNTESIS DE LOS MECANISMOS DE DETENCIÓN

Uno de los usos más interesantes de las curvas del acoplador que tienen segmentos rectilíneos o de arco circular, es en la síntesis de mecanismos que poseen una detención sustancial durante una porción de su periodo de operación. Al utilizar segmentos de curvas del acoplador no es difícil sintetizar eslabonamientos con una

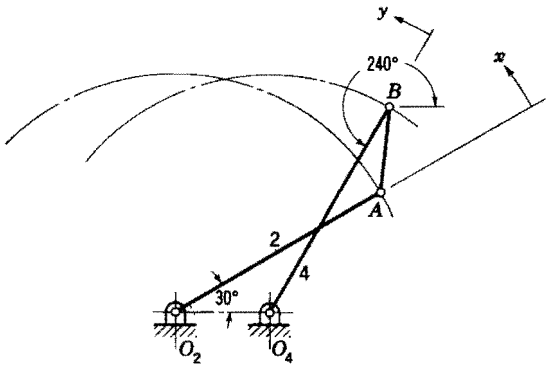


Figura 10-27

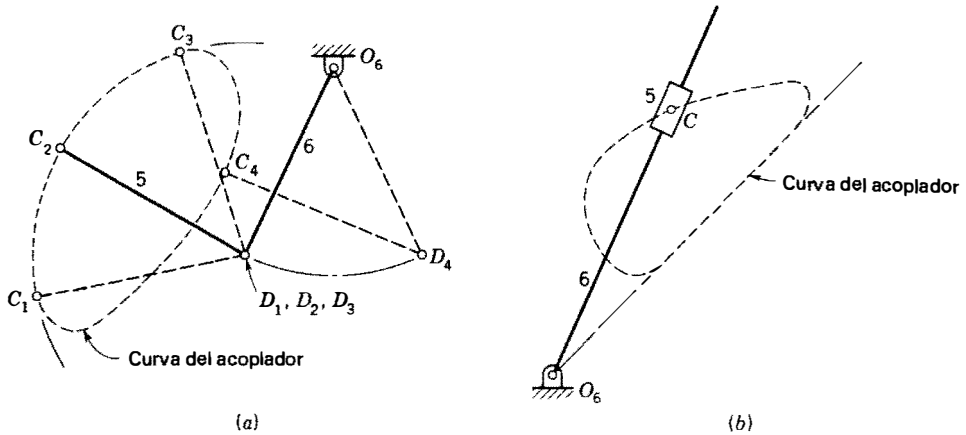


Figura 10-28 Síntesis de mecanismos de detención; en ninguno de los casos se ilustra el eslabonamiento de cuatro barras que genera la curva del acoplador. a) El eslabón 6 se detiene mientras el punto C recorre la trayectoria de arco circular $C_1C_2C_3$; b) el eslabón 6 se detiene mientras el punto C se desplaza a lo largo de la porción recta de la curva del acoplador.

detención, en cualquiera de los extremos de su movimiento o en ambos, o bien, en un punto intermedio.

En la figura 10-28*a* se seleccionó una curva del acoplador que tiene aproximadamente una forma elíptica, del atlas de Hrones y Nelson, de tal modo que una porción sustancial de la curva se aproxima a un arco circular. Conectando el eslabón 5 se le da entonces una longitud igual al radio de este arco. Por tanto, en la figura, los puntos D_1, D_2 y D_3 son estacionarios en tanto que el punto del acoplador C se mueve pasando por las posiciones C_1, C_2 y C_3. La longitud del eslabón de salida 6 y la localización del punto del marco O_6 dependen del ángulo de oscilación deseado de este eslabón. También se debe colocar el punto del marco para obtener un ángulo de transmisión óptimo.

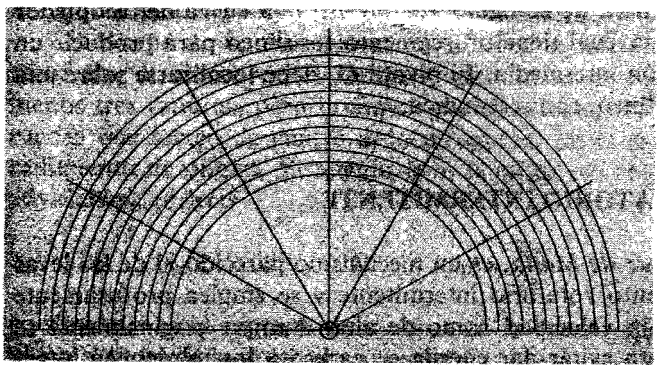


Figura 10-29 Figura para sobreponer que se usa con el atlas de Hrones y Nelson.

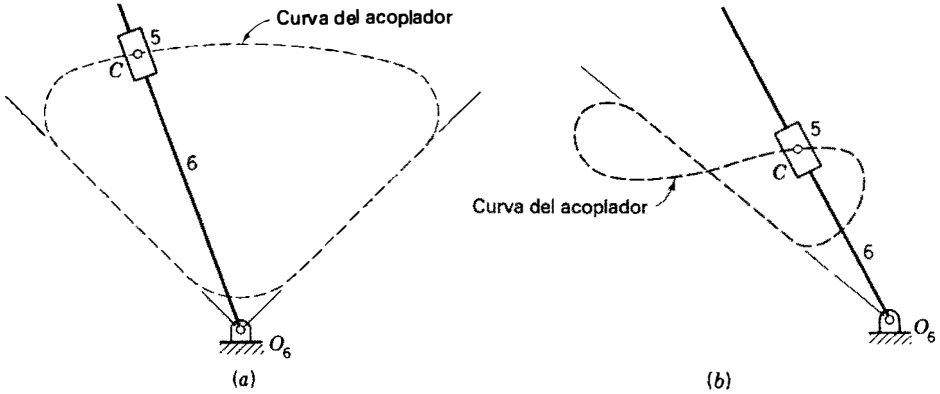


Figura 10-30 a) El eslabón 6 se detiene en cada extremo de su oscilación. b) El eslabón 6 se detiene en la porción central de su oscilación.

Cuando se desean segmentos de arcos circulares para la curva del acoplador, conviene seguir un método organizado de búsqueda en el atlas de Hrones y Nelson. La figura para sobreponer, ilustrada en la figura 10-29, se realiza en un papel delgado y se puede ajustar sobre las trayectorias del atlas con suma rapidez. Esta figura revela inmediatamente el radio de curvatura del segmento, la ubicación del punto pivote D y el ángulo de oscilación del eslabón conectador.

En la figura 10-28*b* se muestra un mecanismo de detención que emplea una corredera. Se usa una curva del acoplador con un segmento rectilíneo, y el punto pivote O_6 se sitúa sobre una extensión de esta recta.

La configuración ilustrada en la figura 10-30*a* tiene una detención en ambos extremos del movimiento. Sin embargo, es un tanto difícil lograr una configuración práctica de este mecanismo, porque el eslabón 6 tiene una velocidad muy elevada cuando la corredera está cerca del pivote O_6.

El mecanismo de corredera de la figura 10-30*b* usa una curva del acoplador con la forma de un ocho, la cual tiene un segmento rectilíneo para producir un eslabonamiento con detención intermedia. El pivote O_6 debe localizarse sobre una extensión del segmento rectilíneo, como se indica.

10-15 MOVIMIENTO ROTATORIO INTERMITENTE

La *rueda de Ginebra*, o *cruz de Malta*, es un mecanismo parecido al de las levas que suministra un movimiento rotatorio intermitente y se emplea profusamente tanto en maquinaria de baja velocidad como de alta. Aunque originalmente se desarrolló como un tope para evitar dar cuerda en exceso a los relojes, en la actualidad se emplea con amplitud en la maquinaria automática, por ejemplo, cuando se deben marcar distancias determinadas en árboles, torretas o mesas de tra-

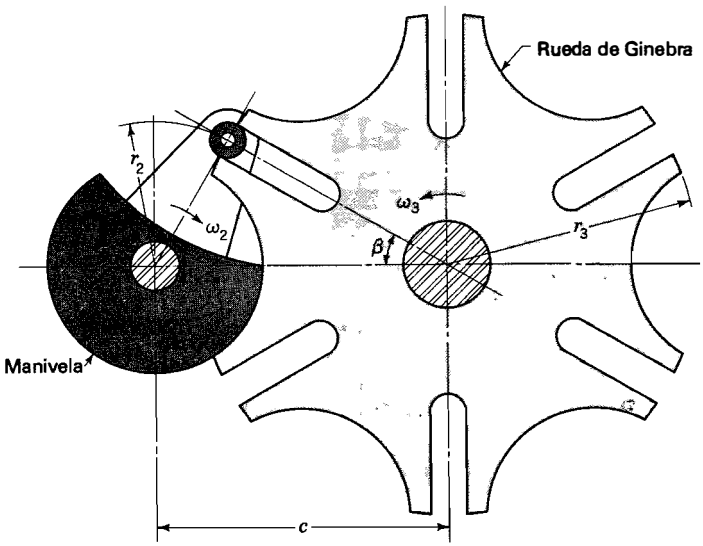


Figura 10-31 Mecanismo de Ginebra.

bajo. También se utiliza en proyectores de películas para proporcionar el avance intermitente de las mismas.

En la figura 10-31 se muestra un dibujo de un mecanismo de Ginebra de seis ranuras. Nótese que las líneas de los centros de la ranura y la manivela son mutuamente perpendiculares al encastrarse y al desencastrarse. La manivela, que casi siempre gira con una velocidad angular uniforme, lleva un rodillo que se encaja en las ranuras. Durante una revolución de la manivela, la rueda de Ginebra gira una fracción de una revolución, cantidad que depende del número de ranuras. El segmento circular que va unido a la manivela realmente evita que la rueda gire cuando el rodillo está desencastrado, y también coloca a la rueda para que se efectúe un encaje correcto del rodillo con la siguiente ranura.

El diseño de un mecanismo de Ginebra se inicia especificando el radio de la manivela, el diámetro del rodillo y el número de ranuras. Se requieren por lo menos tres ranuras, pero la mayor parte de los problemas se pueden resolver con ruedas que tienen de cuatro a doce ranuras. En la figura 10-32 se ilustra el procedimiento de diseño. El ángulo β es la mitad del ángulo subtendido por ranuras adyacentes; es decir

$$\beta = \frac{360}{2n} \qquad (a)$$

en donde n es el número de ranuras en la rueda. En consecuencia, al definir r_2 como el radio de la manivela, se tiene

$$c = \frac{r_2}{\operatorname{sen}\beta} \qquad (b)$$

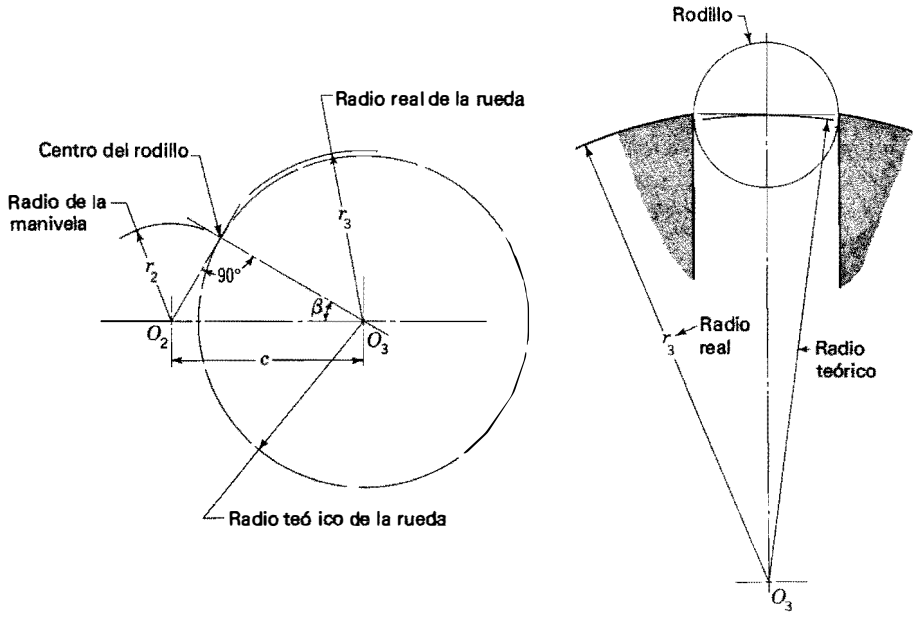


Figura 10-32 Diseño de una rueda de Ginebra.

en donde c es la distancia entre los centros. En la figura 10-32, nótese también que el radio real de la rueda de Ginebra es mayor que el que se obtendría con un rodillo de diámetro cero. Esto se debe a la diferencia entre el seno y la tangente del ángulo subtendido por el rodillo, medido desde el centro de la rueda.

Después de que el rodillo ha entrado en la ranura y está impulsando a la rueda, la geometría es la de la figura 10-33. Aquí, θ_2 es el ángulo de la manivela y θ_3 el de la rueda. Estos ángulos se relacionan trigonométricamente mediante

$$\tan \theta_3 = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{(c/r_2) - \cos \theta_2} \qquad (c)$$

Se puede determinar la velocidad angular de la rueda para cualquier valor de θ_2, derivando la ecuación (c) con respecto al tiempo; lo cual da

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{(c/r_2)\cos \theta_2 - 1}{1 + (c^2/r_2^2) - 2(c/r_2)\cos \theta_2} \qquad (10\text{-}12)$$

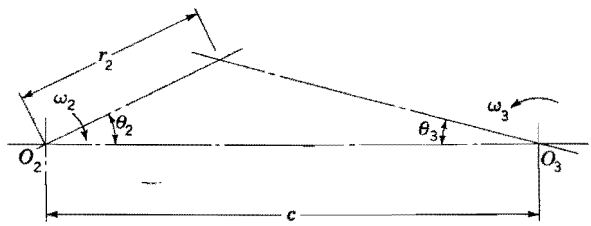


Figura 10-33

La velocidad máxima de la rueda ocurre cuando el ángulo de la manivela es cero. Por consiguiente, cuando se sustituye $\theta_2 = 0$ da

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{c - r_2} \tag{10-13}$$

La aceleración angular se obtiene derivando la (10-12) con respecto al tiempo. Esta aceleración es

$$\alpha_3 = \omega_2^2 \frac{(c/r_2)\operatorname{sen}\theta_2(1 - c^2/r_2^2)}{[1 + (c/r_2)^2 - 2(c/r_2)\cos\theta_2]^2} \tag{10-14}$$

La aceleración angular alcanza un máximo cuando

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left\{ \pm \sqrt{\left[\frac{1 + (c^2/r_2^2)}{4(c/r_2)}\right]^2 + 2} - \frac{1 + (c/r_2)^2}{4(c/r_2)} \right\} \tag{10-15}$$

Esto ocurre cuando el rodillo ha avanzado aproximadamente el 30% dentro de la ranura.

Se han empleado varios métodos para reducir la aceleración con el fin de reducir las fuerzas de inercia y el desgaste consecuente sobre los lados de la ranura. Entre estos se encuentra la idea de usar una ranura curva. Esto reduce la aceleración, pero aumenta la desaceleración y, como consecuencia, el desgaste sobre el otro lado de la ranura.

Otro método utiliza la síntesis de Hrones-Nelson. La idea es colocar el rodillo sobre el eslabón de conexión de un eslabonamiento de cuatro barras. Durante el periodo en el que impulsa a la rueda, la trayectoria del rodillo debe ser curva y tener un valor bajo de la aceleración. En la figura 10-34 se muestra una solución y

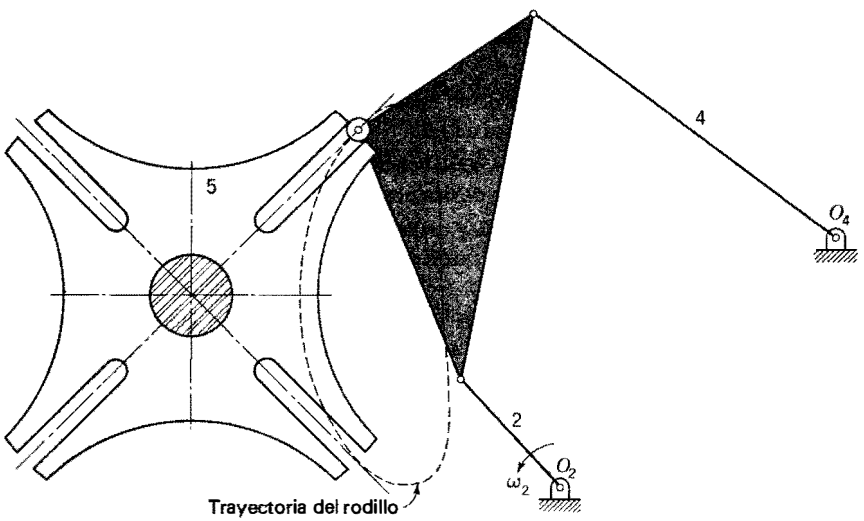


Figura 10-34 Rueda de Ginebra impulsada por un eslabonamiento de cuatro barras sintetizado por el método de Hrones-Nelson. El eslabón 2 es la manivela impulsadora.

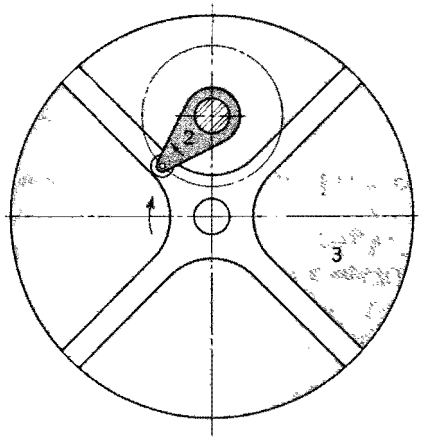


Figura 10-35 Mecanismo de Ginebra inverso.

se incluye la trayectoria tomada por el rodillo. Esta es la trayectoria que se busca al hojear el libro.

El mecanismo inverso de Ginebra de la figura 10-35 permite que la rueda gire en la misma dirección que la manivela y requiere un espacio radial menor. No se muestra el dispositivo de cierre, pero éste puede ser un segmento circular sujeto a la manivela como se mostró antes, que cierra frotándose contra un borde en la periferia de la rueda.

PROBLEMAS

10-1 Una función varía de 0 a 10. Encuéntrese el espaciamiento de Chebychev para dos , tres, cuatro, cinco y seis puntos de precisión.

10-2 Determínense las longitudes de los eslabones de un eslabonamiento de corredera y manivela para tener una carrera de 600 mm y una razón de tiempos de 1.20.

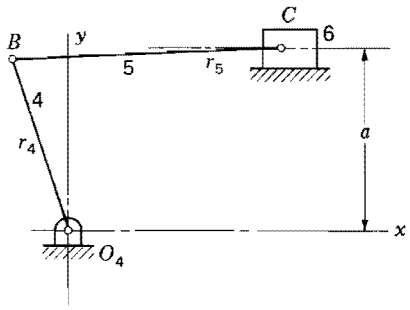
10-3 Determínense un conjunto de longitudes de los eslabones para un eslabonamiento de corredera y manivela tal que la carrera sea de 16 pulg y la razón de tiempos, 1.25.

10-4 El oscilador de un eslabonamiento de manivela y oscilador debe tener una longitud de 500 mm y oscilar recorriendo un ángulo total de 45°, con una razón de tiempo de 1.25. Determínese un conjunto de dimensiones apropiadas para r_1, r_2 y r_3.

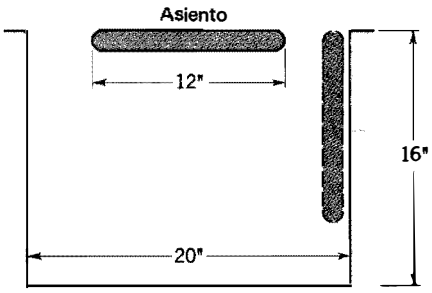
10-5 Un mecanismo de manivela y oscilador debe tener un oscilador con 6 pies de longitud y un ángulo de oscilación de 75°. Si la razón de tiempos debe ser 1.32, ¿cuáles son un conjunto apropiado de longitudes de los eslabones para los tres eslabones restantes?

10-6 Diséñese una manivela y un acoplador para impulsar al oscilador 4 de la figura, de tal manera que la corredera 6 tenga un movimiento alternativo en una distancia de 16 pulg con una razón de tiempos de 1.20. Sea $a = r_4 = 16$ pulg y $r_5 = 24$ pulg, con r_4 vertical a la mitad de la carrera. Regístrese la ubicación de O_2 y las dimensiones r_2 y r_3.

10-7 Diséñese una manivela y un oscilador para un mecanismo de seis eslabones tal que la corredera de la figura correspondiente al problema 10-6 tenga un movimiento alternativo en una distancia de



Problema 10-6



Problema 10-9

800 mm con una razón de tiempos de 1.12. Sea $a = r_4$ = 1 200 mm y r_5 = 1 800 mm. Localícese O_4 de tal manera que el oscilador 4 quede vertical cuando la corredera se encuentra a la mitad de carrera. Encuéntrense coordenadas apropiadas para O_2 y las longitudes para r_2 y r_3.

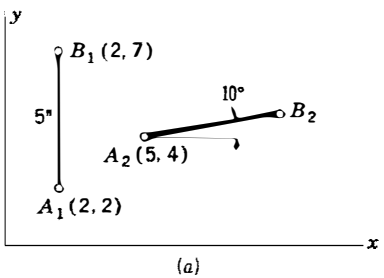
10-8 Diséñese un mecanismo de manivela y oscilador con un ángulo óptimo de transmisión, una razón de tiempos igual a la unidad y un ángulo del oscilador de 45°, con una longitud de éste de 250 mm. Utilícese la gráfica que aparece en la figura 10-6 y sea γ_{min} = 50°. Hágase un dibujo del eslabonamiento para encontrar y verificar γ_{min} $\gamma_{máx}$ ϕ.

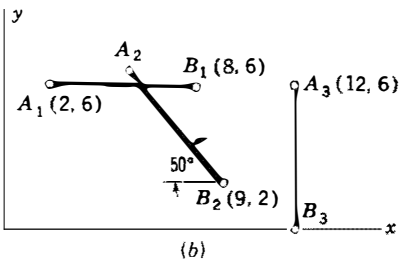
10-9 En la figura se muestran dos posiciones de un asiento plegable de los que se utilizan en los pasillos de los autobuses para dar acomodo a pasajeros adicionales. Diséñese un eslabonamiento de cuatro barras para sostener el asiento de tal modo que se fije con seguridad en la posición de abierto y quede en una posición cerrada estable en el lado del pasillo.

10-10 Diséñese un eslabonamiento de cuatro barras que funcione mediante resortes y sirva para sostener una cubierta pesada como la del cofre de un automóvil. La cubierta debe describir un ángulo de 80°, desde la posición de cerrada hasta la de abierta. Los resortes se montarán de tal modo que la cubierta se mantenga cerrada contra un tope, y también se mantenga en una posición abierta estable sin necesidad de utilizar un tope.

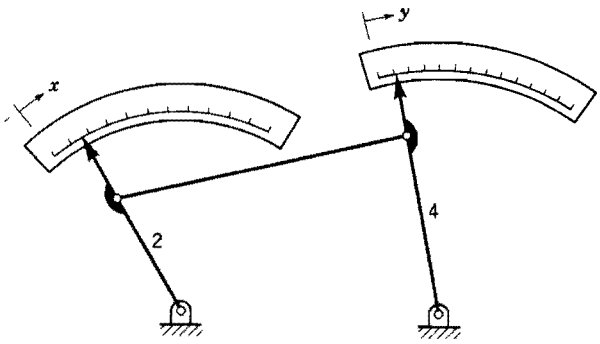
10-11 En la parte (*a*) de la figura, sintetícese un eslabonamiento para mover a *AB* de la posición 1 a la posición 2 y de regreso.

10-12 En la parte (*b*) de la figura, sintetícese un mecanismo para mover a *AB* sucesivamente por las posiciones 1, 2 y 3.

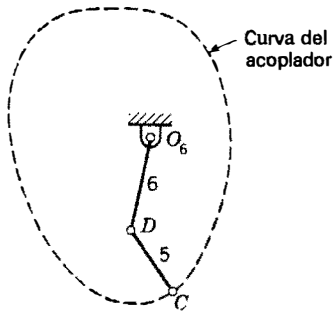




Problemas 10-11 y 10-12



Problemas 10-13 a 10-22



Problema 10-33

10-13 a 10-22 † En la figura se presenta un eslabonamiento generador de función en el que el movimiento del oscilador 2 corresponde a x y el movimiento del oscilador 4 a la función $y = f(x)$. Úsense cuatro puntos de precisión y el espaciamiento de Chebychev, y sintetícese un eslabonamiento para generar las funciones indicadas en la tabla adjunta. Trácese una curva de la función deseada y otra de la función real que genera el eslabonamiento. Calcúlese el error máximo entre ellos, expresándolo con un porcentaje.

Número del problema	Función y	Intervalo de x
10-13, 10-23	$\log_{10} x$	$1 \leq x \leq 2$
10-14, 10-24	sen x	$0 \leq x \leq \pi/2$
10-15, 10-25	tan x	$0 \leq x \leq \pi/4$
10-16, 10-26	e^x	$0 \leq x \leq 1$
10-17, 10-27	$1/x$	$1 \leq x \leq 2$
10-18, 10-28	$x^{1.5}$	$0 \leq x \leq 1$
10-19, 10-29	x^2	$0 \leq x \leq 1$
10-20, 10-30	$x^{2.5}$	$0 \leq x \leq 1$
10-21, 10-31	x^3	$0 \leq x \leq 1$
10-22, 10-32	x^2	$-1 \leq x \leq 1$

10-23 a 10-32 Repítanse los problemas 10-13 a 10-22 utilizando el método de la sobreposición de la figura.

10-33 En la figura se ilustra una curva del acoplador que se puede generar mediante un eslabonamiento de cuatro barras (no ilustrado). El eslabón 5 se debe fijar al punto del acoplador y el 6 será un miembro giratorio cuya conexión sobre el marco es O_6. En este problema se desea encontrar una curva del acoplador en el atlas de Hrones y Nelson, o bien, por reducción de la posición del punto, de tal manera que, para una distancia apreciable, el punto c describa un arco de un círculo. Luego se da una dimensión al eslabón 5 de tal modo que D quede en el centro de curvatura de este arco. El resultado se denomina entonces *movimiento de vacilación* porque el eslabón 6 vacilará en su rotación durante el periodo en que el punto C describe el arco circular aproximado. Hágase un dibujo del eslabonamiento

† F. Freudenstein de la Columbia University obtuvo soluciones en una computadora digital para estos problemas: véase *ibid.*

completo y trácese el diagrama velocidad-desplazamiento para 360° de desplazamiento del eslabón de entrada.

10-34 Sintetícese un eslabonamiento de cuatro barras para obtener una curva del acoplador con un segmento rectilíneo aproximado. Luego, aplicando la sugerencia incluida en la figura 10-28 o la 10-30*b*, sintetícese un movimiento de detención. Con una velocidad angular unitaria de la manivela de entrada, trácese la gráfica de la velocidad del oscilador 6 contra el desplazamiento de la manivela de entrada.

10-35 Sintetícese un mecanismo de detención aplicando la idea sugerida en la figura 10-28*a* y el atlas de Hrones y Nelson. El oscilador 6 debe tener un desplazamiento angular total de 60°. Utilizando este desplazamiento como abscisa, trácese un diagrama de velocidad del movimiento del oscilador para ilustrar el movimiento de detención.

CAPÍTULO

ONCE

MECANISMOS ESPACIALES

11-1 INTRODUCCIÓN A LOS ESLABONAMIENTOS ESPACIALES

Como se vio en la sección 1-5, la gran mayoría de los mecanismos en uso hoy en día son *mecanismos planos*; es decir, los movimientos de todos los puntos producen trayectorias que se encuentran en planos paralelos. Aunque este es el caso usual, no es una necesidad, y los mecanismos que tienen trayectorias tridimensionales, más generales, de los puntos reciben el nombre de *mecanismos espaciales*. Otra categoría especial abarca los *mecanismos esféricos*, en los que todos los puntos quedan sobre superficies esféricas concéntricas.

Aunque estas definiciones se presentaron en el capítulo 1, casi todos los ejemplos de los capítulos anteriores se han ocupado de mecanismos planos. Esto se justifica debido a su uso tan extendido en situaciones prácticas. Aunque unos cuantos mecanismos no planos, como las articulaciones universales
se conocen desde hace varios siglos, no fue sino hasta hace relativamente poco que los especialistas en cinemática se han interesado en desarrollar procedimientos de diseño para otros mecanismos espaciales.

Aunque hasta ahora nos hemos concentrado en ejemplos de movimiento plano, un breve repaso mostrará que la mayor parte de la teoría anterior se ha deducido con la generalidad suficiente como para aplicarla al movimiento plano o al espacial. Se han propuesto ejemplos en el plano ya que se pueden visualizar mejor y requieren cálculos menos tediosos que el caso tridimensional. Con todo, la mayor parte de la teoría antes presentada se extiende directamente hacia los mecanismos espaciales.

En la sección 1-6 se explicó que se puede obtener la *movilidad* de una cadena cinemática partiendo del criterio de Kutzbach. La forma tridimensional del criterio

se dió en la ecuación (1-3),

$$m = 6(n-1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 2j_4 - j_5 \qquad (11\text{-}1)$$

en donde m = movilidad del mecanismo
n = número de eslabones
j_i = número de articulaciones que tienen i grados de libertad

Una de las soluciones de la (11-1) es $n = 7$, $j_1 = 7$, $j_2 = j_3 = j_4 = j_5 = 0$. Harrisberger denomina a esto un *tipo de mecanismo,* † en particular, el tipo $7j_1$. Otras combinaciones de los j_i producen otros tipos de mecanismos. Por ejemplo, el tipo $3j_1 + 2j_2$ tiene cinco eslabones, en tanto que el tipo $1j_1 + 2j_3$ cuentan sólo con tres eslabones.

Cada tipo de mecanismo contiene un número finito de *clases* de mecanismos; existen tantas clases de mecanismos en cada tipo como maneras hay de combinar diferentes clases de articulaciones. En la tabla 1-1 se vio que tres de los seis pares inferiores tienen un grado de libertad. Estos son la revoluta R, el prismático P y el tornillo S. Por ende, si se utilizan 7 de cualesquiera estos pares inferiores se obtienen 36 clases de mecanismos tipo $7j_1$. En conjunto, Harrisberger lista 435 clases que satisfacen el criterio de Kutzbach. Sin embargo, no todos estos tipos, o clases, es probable que tengan valor práctico. Considérese, por ejemplo, el tipo $7j_1$ con todos los pares de revoluta; esto define un eslabonamiento con siete eslabones y siete articulaciones de revoluta.

En el caso de mecanismos que, según el criterio de movilidad, se definen como poseedores de una movilidad de 1, Harrisberger ha seleccionado nueve clases de los tipos que parecen ser útiles; estos se ilustran en la figura 11-1. Todos ellos son eslabonamientos espaciales de cuatro barras que tienen cuatro articulaciones, con elementos de entrada y salida giratorios o deslizantes. Las designaciones en la leyenda, como *RGCS* en la figura 11-1*f*, por ejemplo, identifican los tipos de pares cinemáticos (véase la tabla 1-1), principiando con el eslabón de entrada y pasando por el acoplador y el elemento de salida, para retornar al marco. Por ende, para el *RGCS*, la manivela de entrada gira respecto al marco alrededor de la revoluta R y respecto al acoplador alrededor del par globular G. El acoplador forma un par con el elemento de salida mediante el cilindro C. El movimiento del elemento de salida queda determinado por el par de tornillo S (del inglés *screw*). Según la tabla 1-1, las libertades de estos pares son $R = 1$, $G = 3$, $C = 2$ y $S = 1$.

Los eslabonamientos de las figuras 11-1*a* a *c* fueron descritos por Harrisberger como mecanismos del tipo 1. Cada uno de ellos está compuesto por un par de un solo grado de libertad y tres pares de libertad doble; de donde, es un mecanismo del tipo $1j_1 + 3j_2$. Los demás eslabonamientos de la figura 11-1 son del tipo 2, que tienen dos pares de un grado de libertad, un par de libertad doble y un par de libertad triple. Por ende, pertenecen al tipo $2j_1 + 1j_2 + 1j_3$.

† L. Harrisberger, "A Number Synthesis Survey of Three-Dimensional Mechanisms", *J. Eng. Ind., ASME Trans.*, series B, vol. 87, no. 2, 1965.

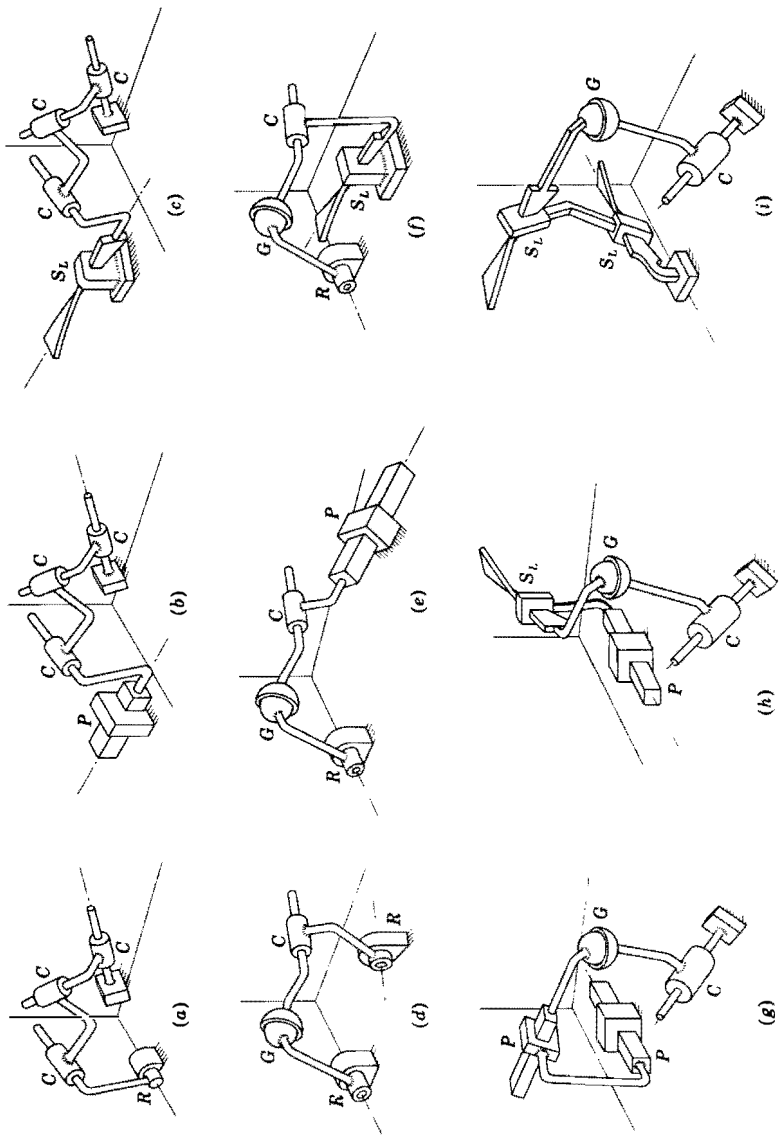


Figura 11-1 Eslabonamientos espaciales de cuatro barras con movilidad de 1: *a*) *RCCC*; *b*) *PCCC*; *c*) S_LCCC; *d*) *RGCR*; *e*) *RGCP*; *f*) $RGCS_L$; *g*) *PPGC*; *h*) PS_LGC; *i*) S_LS_LGC. (*Tomado de L. Harrisberger., A Number Synthesis Survey of Three-Dimensional Mechanisms, J. Eng. Ind. ser. B, vol. 87, no. 2, mayo, 1965, publicado con autorización de la ASME y el autor del artículo.*) En esta obra, un par de tornillos se designa mediante el símbolo *S*; pero Harrisberger utiliza S_L; es probable que el subíndice se refiera al avance (en inglés, *lead*) de un tornillo.

11-2 MECANISMOS ESPECIALES

Curiosamente, los mecanismos espaciales más útiles que se han encontrado son aquellos que *no quedan* definidos como tales según el criterio de movilidad. Debido a ciertas condiciones geométricas, tales como una razón particular de lon-

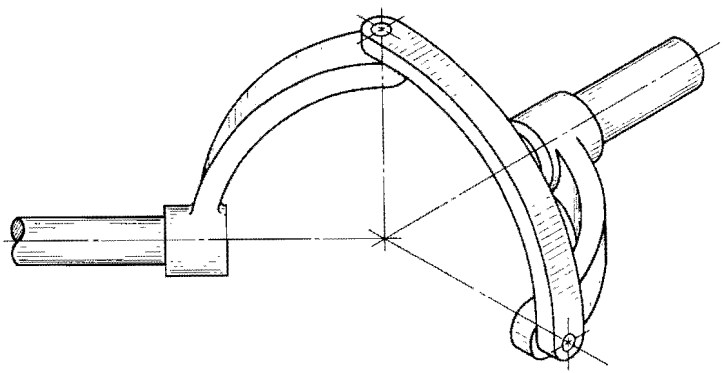


Figura 11-2 Eslabonamiento esférico de cuatro barras.

gitudes de los eslabones, o la orientación de ejes de pares con una sola libertad, es factible introducir libertades no esenciales o restricciones no esenciales.

Por lo menos dos de los eslabonamientos espaciales conocidos que violan el criterio de Kutzbach, son mecanismos RRRR de cuatro eslabones. Así pues, $n = 4$, $j_1 = 4$, y la ecuación (11-1) da $m = -2$, de manera que se llega a la conclusión de que hay tres restricciones no esenciales. Uno de estos mecanismos es el eslabonamiento espacial esférico de cuatro barras ilustrado en la figura 11-2. Los ejes de las cuatro revolutas se intersecan en el centro de una esfera, y los eslabones se pueden considerar como arcos de círculo máximo que existen sobre la superficie de la esfera. Entonces sus longitudes se designan como ángulos esféricos. Dando una proporción adecuada a estos ángulos, se pueden diseñar todos los equivalentes esféricos del mecanismo plano de cuatro barras, como por ejemplo, el eslabonamiento esférico de manivela y oscilador y el eslabonamiento esférico de arrastre. El eslabonamiento esférico de cuatro barras es fácil de diseñar y fabricar y, por ende, es uno de los mecanismos espaciales más útiles. La muy conocida articulación de Hooke, o Cardan, que es la base de la articulación, o unión universal, constituye un caso especial del mecanismo esférico que tiene manivelas de entrada y salida que subtienden el mismo ángulo en el centro de la esfera. El *mecanismo de placa oscilante,* que aparece en la figura 11-3, también es un caso especial.

El mecanismo *RRRR* de Bennett que se muestra en la figura 11-4, es probablemente uno de los más inútiles de los eslabonamientos espaciales conocidos. En este mecanismo, los eslabones opuestos están torcidos la misma cantidad y tienen también longitudes iguales. Los ángulos de torsión α_1 y α_2 deben estar también en proporción a las longitudes de los eslabones, a_1 y a_2, según la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{a_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{a_2} \tag{11-2}$$

El mecanismo espacial RGGR de cuatro eslabones de la figura 11-5 es otro eslabonamiento importante y de gran utilidad. Puesto que para $n = 4$, $j_1 = 2$, y

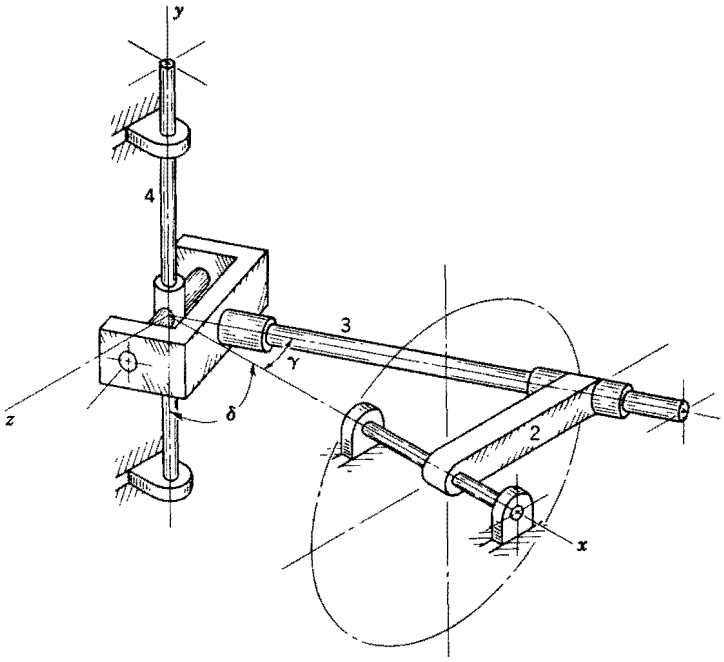


Figura 11-3 Mecanismo de placa oscilante; la manivela de entrada 2 gira y el eje de salida 4 oscila. Cuando $\delta \neq 90°$ el mecanismo se conoce con el nombre de oscilador de deslizamiento esférico. Si $\gamma > \delta$, el eje de salida gira.

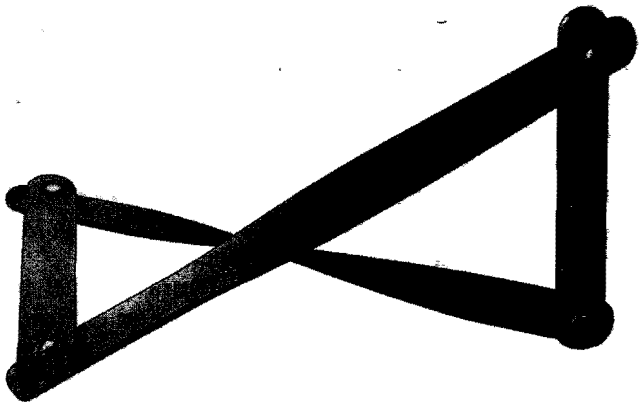


Figura 11-4 Mecanismo de cuatro eslabones de Bennett.

$j_3 = 2$, el criterio de movilidad de la ecuación (11-1) predice que $m = 2$. Aunque, a primera vista ésta podría parecer otra excepción, si se le examina con cuidado se encuentra que en realidad existe el grado adicional de libertad; se trata de la liber-

tad del acoplador para girar alrededor de su propio eje. Ya que esto no afecta la relación cinemática de entrada-salida, se conoce con el nombre de libertad *no esencial*. Esta libertad adicional no perjudica si la masa del acoplador se distribuye a lo largo de su eje; de hecho, puede resultar una ventaja porque es fácil de fabricar y la rotación de acoplador alrededor de su eje debe igualar el desgaste en las dos articulaciones de rótula. No obstante, si el centro de masa del acoplador queda fuera del eje, esta libertad adicional no es dinámicamente no esencial y puede causar un comportamiento bastante errático a gran velocidad.

Todavía otras excepciones al criterio de movilidad son el mecanismo de cinco barras y cinco revolutas de Goldberg (no de Rube) y el eslabonamiento de seis barras y seis revolutas de Bricard. † Una vez más, es dudoso que estos mecanismos tengan algún valor práctico.

Harrisberger y Soni han tratado de identificar todos los eslabonamientos espaciales que tienen una restricción general. ‡ Han identificado 8 tipos y 212 clases y han descubierto 7 nuevos mecanismos que pueden tener cierta utilidad.

11-3 PROBLEMA DE LA POSICIÓN

Al igual que los mecanismos planos, un mecanismo espacial se conecta casi siempre de tal modo que forme un circuito cerrado. Por consiguiente si se siguen métodos similares a los de la sección 2-6, es factible escribir una ecuación de cierre del circuito que defina las relaciones cinemáticas del mecanismo. Hay un cierto número de formas matemáticas diferentes que se pueden usar, incluyendo vectores, números duales y cuaterniones § al igual que matrices ¶. Para seguir la misma tónica en toda la obra, se utilizará la notación vectorial. La condición de cierre del circuito para un eslabonamiento espacial como el mecanismo de la figura 11-5, se puede definir por medio de una ecuación vectorial de la forma

$$\mathbf{r}+\mathbf{s}+\mathbf{t}+\mathbf{C}=0 \qquad (11\text{-}3)$$

Esta expresión se conoce con el nombre de *ecuación vectorial del tetraedro*, debido a que se puede concebir a cada uno de los vectores como si definiera cuatro de las seis aristas de un tetraedro.

La ecuación vectorial del tetraedro es tridimensional y, por ende, se puede resolver para tres incógnitas escalares. Estas pueden existir en cualquier combi-

† Si se desean tener ilustraciones de estos, véase la obra de R.S. Hartenberg y J. Denavit, *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill, New York, 1964, pp. 85-86.

‡ L. Harrisberger y A.H. Soni, "A Survey of Three-Dimensional Mechanisms with One General Constraint", *ASME pap.* 66-MECH-44, October 1966. Esta publicación contiene 45 referencias sobre mecanismos espaciales.

§ A.T. Yang y F. Freudenstein, "Aplication of Dual-Number and Quaternian Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms", *J. Appl, Mech., ASME trans.*, ser. E. vol. 86, pp. 300-308, 1964.

¶ J.J. Uicker, Jr., J. Denavit y R.S. Hartenberg, "An Iterative Method for the Displacement Analysis of Spatial Mechanisms", *J. Appl. Mech., ASME Trans.*, ser . E. vol. 87, pp. 309-314, 1965.

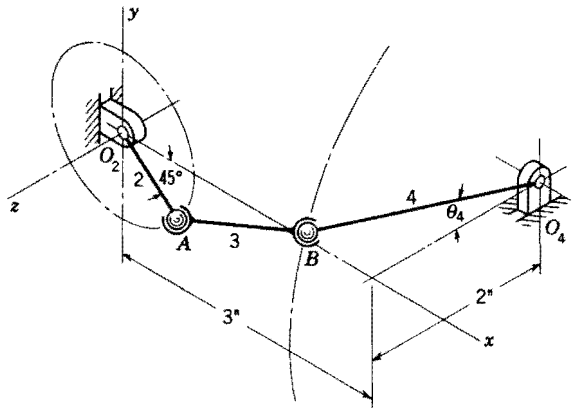


Figura 11-5 El eslabonamiento *RGGR*. $R_{AO_2} = 1$ pulg, $R_{BA} = 3.5$ pulg, $R_{BO_4} = 4$ pulg.

nación en los vectores r, s y t. El vector C es la suma de todos los vectores conocidos en el circuito. Si se usan coordenadas esféricas, cada uno de los vectores **r**, **s** y **t** se puede expresar como una magnitud y dos ángulos. Por ejemplo, el vector **r** se define una vez que se conoce su magnitud r y dos ángulos, θ_r y ϕ_r. Por tanto, en la (11-3), tres cualesquiera de las nueve cantidades r, θ_r, ϕ_r, s, θ_s, ϕ_s, t, θ_t, y ϕ_t pueden ser incógnitas. Cuando estas se resuelvan se obtiene justamente nueve combinaciones de las incógnitas que conducen a soluciones diferentes. Chace† ha resuelto estos nueve casos, reduciendo primero a cada uno de ellos a un polinomio. Chace clasifica las soluciones dependiendo de si las incógnitas se presentan en uno, dos o tres vectores, y tabula las formas de las soluciones como se indica en la tabla 11-1. En esta tabla, los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{\omega}}_r$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}_s$ y $\hat{\boldsymbol{\omega}}_t$ son direcciones *conocidas* de

Tabla 11-1 Clasificación de las soluciones para la ecuación vectorial del tetraedro

Número del caso	Incógnitas	Cantidades conocidas		Grado del polinomio
		Vectoriales	Escalares	
1	r, θ_r, ϕ_r	$\mathbf{C}$		1
2*a*	r, θ_r, s	$\mathbf{C}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}_r$	ϕ_r	2
2*b*	r, θ_r, θ_s	$\mathbf{C}, \hat{\boldsymbol{\omega}}_r, \hat{\boldsymbol{\omega}}_s$	ϕ_r, s, ϕ_s	4
2*c*	θ_r, ϕ_r, s	$\mathbf{C}, \hat{\mathbf{s}}$	r	2
2*d*	$\theta_r, \phi_r, \theta_s$	$\mathbf{C}, \hat{\boldsymbol{\omega}}_s$	r, s, ϕ	2
3*a*	r, s, t	$\mathbf{C}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{t}}$		1
3*b*	r, s, θ_t	$\mathbf{C}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}_t$	t, ϕ_t	2
3*c*	r, θ_s, θ_t	$\mathbf{C}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}_s, \hat{\boldsymbol{\omega}}_t$	s, ϕ_s, t, ϕ_t	4
3*d*	$\theta_r, \theta_s, \theta_t$	$\mathbf{C}, \hat{\boldsymbol{\omega}}_r, \hat{\boldsymbol{\omega}}_s, \hat{\boldsymbol{\omega}}_t$	$r, \phi_r, s, \phi_s, t, \phi_t$	8

† M. A. Chace, "Vector Analysis of Linkages", *J. Eng. Ind., ASME Trans.*, ser. B, vol. 85, no. 3, pp. 289-297, 1963.

los ejes a partir de las cuales se miden los ángulos *conocidos* ϕ_r, ϕ_s y ϕ_t. En el caso 1, los vectores **s** y **t** son completamente conocidos y al sumarse dan el vector $\boldsymbol{C}$. En los casos 2*a*, 2*b*, 2*c* y 2*d* se conoce el vector t y al sumarse $\boldsymbol{C}$. Los casos 3*a*, 3*b*, 3*c* y 3*d* tienen incógnitas en cada uno de los vectores **r**, **s** y **t**.

Una ventaja importante de las soluciones de Chace para las ecuaciones vectoriales del tetraedro es que, puesto que proporcionan formas conocidas para las soluciones de los nueve casos, es fácil escribir una familia de nueve subprogramas para hacer una evaluación por computadora o calculadora. Estos seguirían el mismo procedimiento general que se describió en la sección 5-3 para las ecuaciones equivalentes en el plano. Todos los nueve casos, a excepción del 3*d*, se han reducido a soluciones explícitas de forma cerrada para las incógnitas y, por ende, se pueden evaluar con gran rapidez. Sólo el paso 3*d*, que comprende la solución de un polinomio de octavo orden, se debe resolver mediante técnicas iterativas.

Aunque la ecuación vectorial del tetraedro y sus soluciones de los nueve casos se pueden utilizar para resolver la mayor parte de los mecanismos espaciales prácticos, se recordará, por lo que se dijo en la sección 11-1, que el criterio de Kutzbach predice la existencia hasta de siete articulaciones j_1 en un mecanismo de un solo circuito, con un grado de libertad. Un caso como el mecanismo 7*R*, por ejemplo, tendría seis incógnitas a resolver, a partir de la ecuación de cierre del circuito. Esto no es posible a partir de la forma vectorial de la ecuación de cierre del circuito, por lo que es necesario utilizar en su lugar cuaterniones duales o matrices. Este tipo de problemas conducen también a polinomios de muy alto orden y requieren soluciones iterativas para su evaluación final. Cualquiera que intente resolver este género de ecuaciones por medio de técnicas algebraicas manuales, se percatará inmediatamente de que el análisis de *posición*, y no el de velocidad o aceleración, es el problema más difícil en la cinemática.

11-4 ANÁLISIS DE POSICIÓN DEL MECANISMO *RGGR*

Resolver los polinomios de la ecuación vectorial del tetraedro de Chace resulta ser equivalente a encontrar las intersecciones de rectas o círculos con diversas superficies de revolución. Este género de problemas por lo común se puede resolver rápida y fácilmente aplicando métodos gráficos de la geometría descriptiva. El planteamiento gráfico tiene la ventaja adicional de que no se oculta la naturaleza geométrica del problema en una multiplicidad de operaciones matemáticas.

Usemos un mecanismo *RGGR* de cuatro eslabones, de manivela y oscilador, en el que los elementos conocidos son la posición y el plano de rotación del eslabón de entrada, el plano de rotación del eslabón de salida y las dimensiones de los cuatro eslabones. En la figura 11-5 se ilustra este mecanismo. El problema de la posición consiste en encontrar la posición del acoplador y el oscilador, eslabones 3 y 4. Si el eslabón 4 se trata como un vector, entonces la única incógnita es un ángulo, porque se dan la magnitud y el plano de oscilación. Del mismo modo, si el eslabón 3 es un vector, se conoce su magnitud pero existen dos incógnitas que son

las dos direcciones angulares en coordenadas esféricas. Esta situación se identifica como el caso 2*d* de la tabla 11-1, que exige la resolución de un polinomio de segundo grado y, por ende, produce dos soluciones.

Este problema se resuelve empleando solo dos vistas ortográficas, el frente y el perfil. En la figura 11-5, si se imagina que se desconecta el acoplador *B* y se le permite ocupar todas las posiciones relativas a *A*, luego *B*, debe quedar sobre la superficie de una esfera cuyo centro está en *A*. Con el acoplador aún desconectado, el movimiento de *B* sobre el eslabón 4 es un círculo alrededor de O_4, en un plano paralelo al plano *yz*. Por consiguiente, para resolver este problema sólo se necesita encontrar los dos puntos de intersección de un círculo con una esfera.

La solución aparece en la figura 11-6. Los subíndices *F* y *P* denotan proyecciones en los planos frontal y de perfil, respectivamente. En primer lugar, localícese O_2, radio $O_4B = 4$ pulg en torno a O_{4P}; ésta es la trayectoria del punto *B*. Este círculo aparece como una recta vertical $M_FO_{4F}N_F$ en la vista frontal. A continuación, en la vista frontal, constrúyase el contorno de una esfera con centro en A_F y cuyo radio sea la longitud del acoplador $AB = 3\frac{1}{2}$ pulg. Si se considera que $M_FO_{4F}N_F$ es la traza de un plano normal al plano frontal, la intersección de este plano con la esfera aparece como el círculo sombreado, de diámetro M_PN_P sobre la vista de perfil. El arco de radio O_4B se interseca con el círculo en dos puntos, dando dos soluciones. Uno de estos puntos se elige para B_P y se proyecta nue-

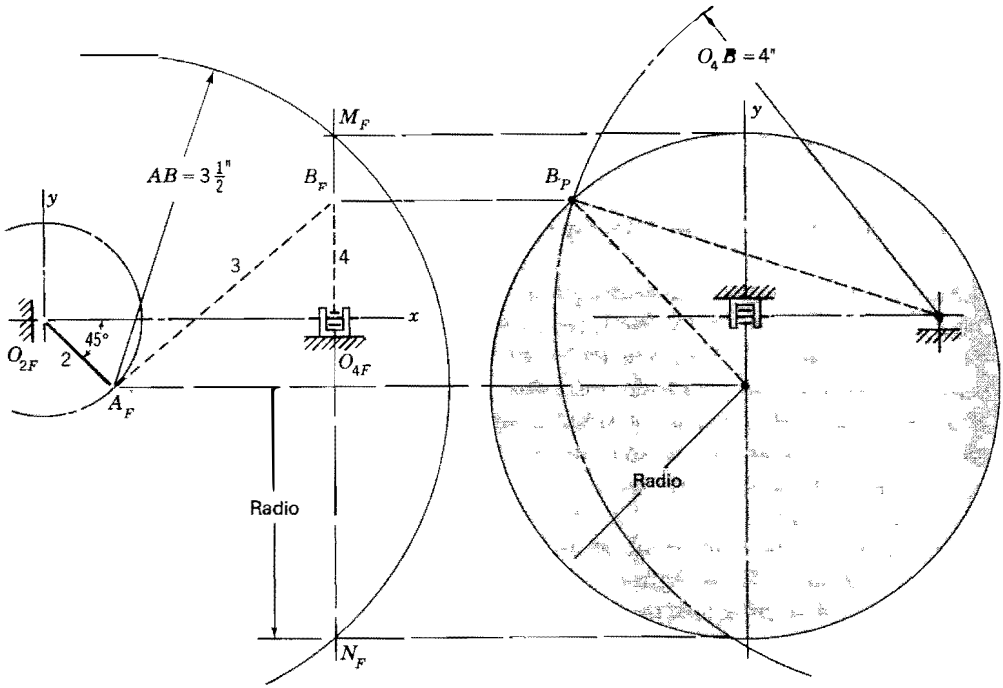


Figura 11-6 Análisis gráfico de posición del mecanismo *RGGR*.

vamente sobre la vista frontal para localizar B_F. Ahora se trazan los eslabones 3 y 4, en este caso mediante líneas a trazos, en las vistas frontal y de perfil.

Mediante la simple medición de las proyecciones x, y y z de la solución gráfica, se pueden escribir las expresiones vectoriales de cada eslabón:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}} \\
\mathbf{r}_2 &= 0.707\hat{\mathbf{i}} - 0.707\hat{\mathbf{j}} \\
\mathbf{r}_3 &= 2.30\hat{\mathbf{i}} + 1.95\hat{\mathbf{j}} + 1.77\hat{\mathbf{k}} \\
\mathbf{r}_4 &= 1.22\hat{\mathbf{j}} + 3.81\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{11-4}$$

en donde $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$ están dirigidos de O_2 a O_4, de O_2 a A, de A a B y de O_4 a B, respectivamente. Las componentes antes mencionadas se obtuvieron de una solución de tamaño natural, por supuesto, se obtendría una mayor exactitud, haciendo los dibujos a 2 ó 4 veces su tamaño real.

El mecanismo esférico de cuatro eslabones y cuatro revolutas ilustrado en la figura 11-2 es el caso 2*d* de la ecuación vectorial del tetraedro, y se puede resolver en la misma forma, cuando se da la posición del eslabón de entrada.

11-5 ANÁLISIS DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN DEL ESLABONAMIENTO RGGR

Una vez que se han encontrado las posiciones de todos los elementos de un mecanismo espacial, se pueden determinar las velocidades y aceleraciones aplicando los métodos de los capítulos 3 y 4. Al analizar los mecanismo planos, las velocidades y aceleraciones angulares fueron siempre perpendiculares al plano del movimiento y, por ende, contaban sólo con una componente vectorial diferente de cero. En el análisis de los eslabonamientos espaciales, estos términos pueden tener tres componentes, pues sus ejes pueden ser oblicuos en el espacio. Por lo demás, los métodos de análisis son los mismos; y el siguiente ejemplo servirá para ilustrar estas diferencias.

Ejemplo 11-1 La velocidad angular del eslabón 2 del eslabonamiento *RGGR* de cuatro barras que aparece en la figura 11-7 es $\boldsymbol{\omega}_2 = 40\hat{\mathbf{k}}$ rad/s. Encuéntrese la velocidad y aceleración angulares de los eslabones 3 y 4, así como la velocidad y aceleración del punto *B*.

SOLUCIÓN Si se aplica la geometría descriptiva para resolver el problema de posición, como se explicó en la sección 11-4, se obtiene el dibujo de tres vistas del eslabonamiento, ilustrado en la figura 11-8. Ahora se sustituyen O_2A, AB y O_4B con los vectores $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$, respectivamente. Los componentes se pueden leer directamente en la figura 11-8:

$$\mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} + 3.46\hat{\mathbf{j}} \qquad \mathbf{r}_3 = 10\hat{\mathbf{i}} + 2.71\hat{\mathbf{j}} + 10.89\hat{\mathbf{k}} \qquad \mathbf{r}_4 = 6.17\hat{\mathbf{j}} + 7.89\hat{\mathbf{k}}$$

Por las restricciones impuestas, se ve que las velocidades y aceleraciones angulares se pueden escribir como

$$\boldsymbol{\omega}_2 = 40\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_3 = \omega_3^x\mathbf{i} + \omega_3^y\mathbf{j} + \omega_3^z\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_4 = \omega_4\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = 0 \qquad \boldsymbol{\alpha}_3 = \alpha_3^x\hat{\mathbf{i}} + \alpha_3^y\hat{\mathbf{j}} + \alpha_3^z\hat{\mathbf{k}} \qquad \boldsymbol{\alpha}_4 = \alpha_4\hat{\mathbf{j}}$$

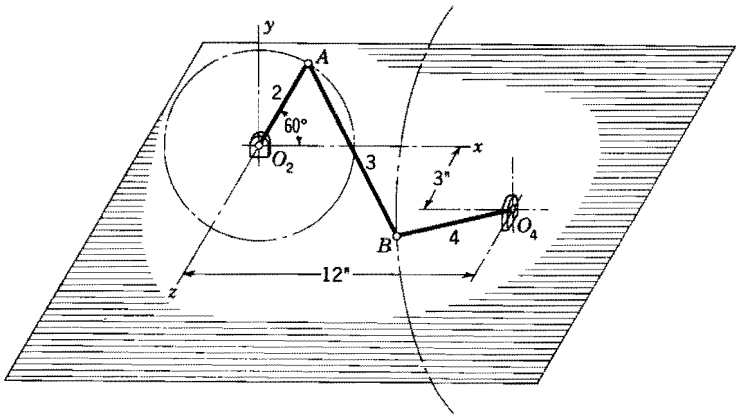


Figura 11-7 $R_{AO_2} = 4$ pulg., $R_{BA} = 15$ pulg., $R_{BO_4} = 10$ pulg.

En primer lugar, se encuentra $\mathbf{V}_A$ como la diferencia de velocidad respecto al punto O_2. Por consiguiente,

$$\mathbf{V}_A = \omega_2 \times \mathbf{r}_2 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 40 \\ 2 & 3.46 & 0 \end{vmatrix} = -11.53\hat{\mathbf{i}} + 6.67\hat{\mathbf{j}} \qquad (1)$$

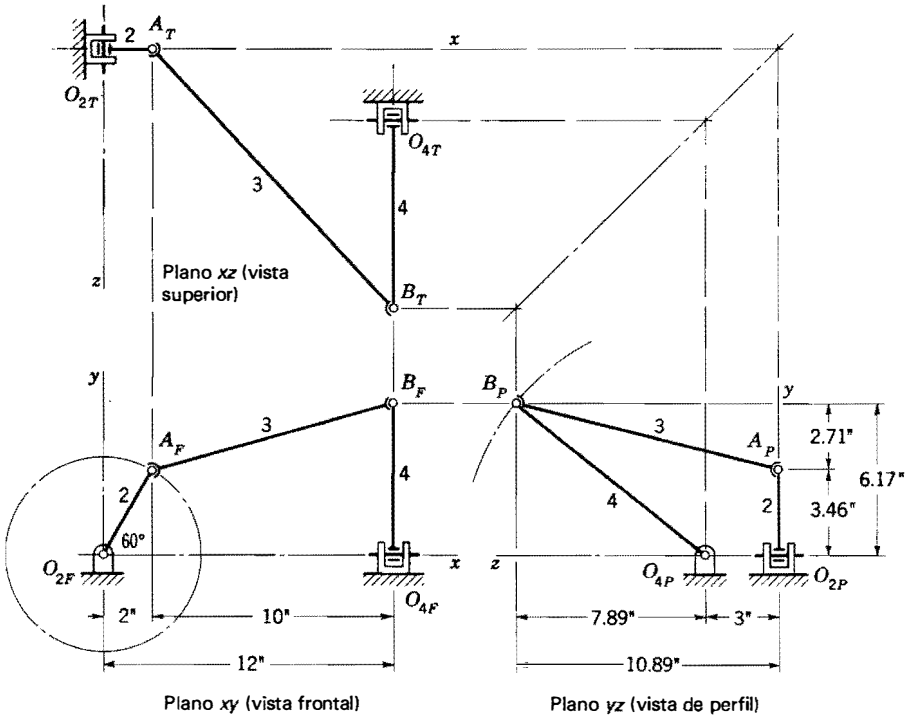


Figura 11-8 Ejemplo 1-1: análisis de posición.

Del mismo modo,

$$\mathbf{V}_{BA} = \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_3 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega_3^x & \omega_3^y & \omega_3^z \\ 10 & 2.71 & 10.89 \end{vmatrix}$$

$$= (0.908\omega_3^y - 0.226\omega_3^z)\hat{\mathbf{i}} + (0.833\omega_3^z - 0.908\omega_3^x)\hat{\mathbf{j}} + (0.226\omega_3^x - 0.833\omega_3^y)\hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

Y, por último,

$$\mathbf{V}_B = \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{r}_4 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega_4 & 0 & 0 \\ 0 & 6.17 & 7.89 \end{vmatrix} = -0.658\omega_4\hat{\mathbf{j}} + 0.514\omega_4\hat{\mathbf{k}} \tag{3}$$

El siguiente paso consiste en sustituir las ecuaciones (1) a (3) en la ecuación de diferencia de velocidad

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{BA} \tag{4}$$

Cuando se hace esto, se pueden reparar las componentes $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ para obtener tres ecuaciones algebraicas

$$0.908\omega_3^y - 0.226\omega_3^z = 11.53 \tag{5}$$

$$-0.908\omega_3^x + 0.833\omega_3^z + 0.658\omega_4 = -6.67 \tag{6}$$

$$0.226\omega_3^x - 0.833\omega_3^y - 0.514\omega_4 = 0 \tag{7}$$

Sin embargo, se observa que hay cuatro incógnitas, ω_3^x, ω_3^y, ω_3^z y ω_4. Esto no ocurriría normalmente en la mayor parte de los problemas, pero aquí sucede debido a la libertad no esencial del acoplador para girar en torno a su propio eje. Puesto que este giro no afectará la relación de entrada-salida, se obtendría el mismo resultado para ω_4, fuera cual fuere esta rotación. Por consiguiente, se puede hacer igual a cero una de las componentes de $\boldsymbol{\omega}_3$ y proseguir. Otro método consiste en hacer que la velocidad del acoplador alrededor de su eje sea cero, requiriendo que

$$\boldsymbol{\omega}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = 0$$

$$0.833\omega_3^x + 0.226\omega_3^y + 0.908\omega_3^z = 0 \tag{8}$$

Ahora se pueden resolver simultáneamente las ecuaciones (5) a (8), para las cuatro incógnitas. El resultado es

$$\boldsymbol{\omega}_3 = -1.72\hat{\mathbf{i}} + 13.6\hat{\mathbf{j}} + 3.70\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\boldsymbol{\omega}_4 = -25.5\hat{\mathbf{i}} \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Sustituyendo en la (3), se obtiene

$$\mathbf{V}_B = 16.8\hat{\mathbf{j}} - 13.1\hat{\mathbf{k}} \text{ pie/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Pasando a continuación al análisis de aceleración, se calculan las siguientes componentes:

$$\mathbf{A}_{AO_2}^n = \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{V}_A$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 40 \\ -11.53 & 6.67 & 0 \end{vmatrix} = -267\hat{\mathbf{i}} - 461\hat{\mathbf{j}} \tag{9}$$

$$\mathbf{A}_{AO_2}^t = \boldsymbol{\alpha}_2 \times \mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{A}_{BA}^n = \boldsymbol{\omega}_3 \times (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_3) = \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{V}_{BA} \tag{10}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -7.72 & 13.6 & 3.70 \\ 11.51 & 10.09 & -13.07 \end{vmatrix} = -215\hat{\mathbf{i}} - 58\hat{\mathbf{j}} - 234\hat{\mathbf{k}} \tag{11}$$

$$\mathbf{A}^t_{BA} = \boldsymbol{\alpha}_3 \times \mathbf{r}_3$$

$$= \tfrac{1}{12} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \alpha_3^x & \alpha_3^y & \alpha_3^z \\ 10 & 2.71 & 10.89 \end{vmatrix}$$

$$= (0.908\alpha_3^y - 0.226\alpha_3^z)\hat{\mathbf{i}} + (0.833\alpha_3^z - 0.908\alpha_3^x)\hat{\mathbf{j}}$$

$$+ (0.226\alpha_3^x - 0.833\alpha_3^y)\hat{\mathbf{k}} \tag{12}$$

$$\mathbf{A}^n_{BO_4} = \boldsymbol{\omega}_4 \times (\boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{r}_4) = \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{V}_B$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & & \\ -2 & & \\ 0 & 16.8 & 13.1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

$$\mathbf{A}^t_{BO_4} = \boldsymbol{\alpha}_4 \times \mathbf{r}_4$$

$$= \tfrac{1}{12} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 6.17 & 7.89 \end{vmatrix} = -0.658\alpha_4\hat{\mathbf{j}} + 0.514\alpha_4\hat{\mathbf{k}} \tag{14}$$

Estas cantidades se sustituyen en la ecuación de diferencia de aceleración

$$\mathbf{A}^n_{BO_4} + \mathbf{A}^t_{BO_4} = \mathbf{A}^n_{AO_2} + \mathbf{A}^t_{AO_2} + \mathbf{A}^n_{BA} + \mathbf{A}^t_{BA} \tag{15}$$

y, junto con la condición $\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = 0$ para el giro de la libertad no esencial, los resultado se pueden obtener exactamente igual que antes:

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = -569\hat{\mathbf{i}} + 623\hat{\mathbf{j}} + 368\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = -937\hat{\mathbf{i}} \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}^n_{BO_4} + \mathbf{A}^t_{BO_4} = 304\hat{\mathbf{j}} - 881\hat{\mathbf{k}} \text{ pie/s} \qquad \textit{Resp.}$$

La determinación de las velocidades y las aceleraciones de un mecanismo espacial por medios gráficos, se conduce en la misma forma que para un mecanismo de movimiento plano. Sin embargo, los vectores velocidad y aceleración que aparecen en las vistas estándar de frente, superior y de perfil, por lo general no se contemplan en su longitud verdadera, es decir, se escorzan. Esto significa que el último paso de la construcción del polígono vectorial se debe completar en una vista auxiliar en la que el vector incógnita aparezca en su longitud verdadera.

Las direcciones de los vectores dependen de las direcciones de los elementos del mecanismo; por esta razón, es necesario proyectar también uno de los eslabones del mecanismo en la vista o vistas auxiliares. Asimismo, por esta razón, se decide conectar los polos de los polígonos vectoriales a un punto sobre uno de los eslabones, de tal modo que la relación entre los vectores y uno de los eslabones sea evidente en todas las vistas.

Una vez que se obtienen el vector o vectores desconocidos en las vistas auxiliares, se pueden proyectar de regreso al sistema ortogonal estándar de tres vistas y se miden directamente las longitudes de las proyecciones x, y y z. El procedimiento quedará mejor ilustrado con un ejemplo.

Ejemplo 11-2 Constrúyanse los polígonos de velocidades y aceleraciones para la solución gráfica del ejemplo 11-1.

SOLUCIÓN La solución de las velocidades aparece en la figura 11-9, y la notación corresponde a la que se utiliza en muchos libros de geometría descriptiva. Las letras *F*, *T* y *P* designan los planos frontal, superior y de perfil, y los números 1 y 2 el primero y segundo planos auxiliares de proyección. Los puntos proyectados sobre estos planos llevan los subíndices *F*, *T*, *P*, etc. Los pasos para obtener la solución de velocidades son como siguen:

1. Constrúyanse las vistas frontal, de perfil y superior del eslabonamiento y desígnese cada punto.
2. Calcúlese $\mathbf{V}_A$ y colóquese este vector en posición, con el origen en *A* sobre las tres vistas. La velocidad de *A* se muestra en su longitud verdadera en la vista frontal. Desígnese el extremo de $\mathbf{V}_A$ como a_F, y proyéctese hacia las vistas superior y de perfil.
3. La velocidad de *B* es desconocida, pero no su dirección. La dirección es perpendicular al eslabón 4 y con el sentido en el que gira éste. Cuando el problema se resuelve, $\mathbf{V}_B$ se verá en su longitud verdadera en la vista de perfil. Trácese una recta en la vista de perfil que corresponda con la dirección conocida de $\mathbf{V}_B$. Localícese cualquier punto d_P de esta recta y proyéctese hacia las vistas frontal y superior.
4. La ecuación que se debe resolver es

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{BA} \tag{16}$$

en donde se conocen tanto $\mathbf{V}_A$ como las direcciones de $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_{BA}$. Nótese que $\mathbf{V}_{BA}$ es perpendicular al eslabón 3; pero se desconoce su magnitud. En el espacio, las rectas perpendiculares al eslabón 3, se asemejan a los rayos de una rueda, y el eslabón 3 es el eje de rotación de esa rueda. Por consiguiente, existe un número infinito de rectas perpendiculares al eslabón 3; pero sólo se tiene interés en una de ellas. La recta que se necesita debe originarse en el extremo de $\mathbf{V}_A$ y terminar intersecándose con la recta *Ad* o su extensión. Para elegir esta recta entre el número infinito de aquéllas de que se dispone, es necesario examinar a *AB* en la dirección en la que aparece como un punto. Por consiguiente, en este paso, se debe proyectar *AB* sobre un plano que la muestre en su longitud verdadera; por tanto, constrúyase la vista lateral del plano 1 paralela a A_TB_T, y proyéctese *AB* sobre este plano. Al hacer esta proyección, nótese que las distancias *k* y *l* en la vista frontal son las mismas en esta primera vista auxiliar. La vista auxiliar de *AB* es A_1B_1 que es su longitud verdadera. Proyéctense también los puntos *a* y *d* hacia esta vista, pero no es necesario proyectar el resto de los eslabones.
5. En este paso, elíjase un segundo plano auxiliar 2, tal que la proyección de *AB* sobre él sea un punto. Luego, todas las rectas trazadas paralelamente al plano serán perpendiculares al eslabón 3. La vista lateral de un plano de esta índole es perpendicular a A_1B_1, extendida. En este ejemplo es conveniente elegir este plano de modo que contenga al punto *a*; por tanto, constrúyase la vista lateral del plano 2 pasando por el punto a_1, perpendicular a A_1B_1 extendida. Ahora proyéctense los puntos *A*, *B*, *a* y *d* sobre este plano. Nótese que las distancias, por ejemplo *m*, de los puntos respecto al plano 1, deben ser las mismas respecto al plano 2.
6. Prolónguese la recta A_1d_1 hasta que se interseque con la vista lateral del plano 2 en b_1, y encuéntrese la proyección b_2 de este punto en el plano 2. Ahora, tanto *a* como *b* quedan en el plano 2; cualquier recta trazada en el plano 2 es perpendicular al eslabón 3. Por ende, la recta *ab* es $\mathbf{V}_{BA}$ y la vista de la misma en el segundo plano auxiliar es su longitud verdadera. La recta A_2B es la proyección de $\mathbf{V}_B$ sobre el segundo plano auxiliar, pero no con su longitud verdadera porque *A* no está en el plano 2.
7. (Para simplificar la lectura del dibujo, se omitió ilustrar el paso 7; si se siguen con sumo cuidado los seis primeros pasos no se tendrá ninguna dificultad con el séptimo.) Proyéctense los tres vectores de regreso hacia las vistas frontal, superior y de perfil. Entonces se puede medir $\mathbf{V}_B$ a partir de su vista de perfil porque ahí aparece en su longitud verdadera. Cuando se hayan proyectado todos los vectores de regreso a estas tres vistas, las proyecciones de *x*, *y* y *z* se pueden medir directamente.

La solución para el problema de las aceleraciones se obtiene en forma idéntica, utilizando los mismos dos planos auxiliares. La ecuación que se debe resolver es

$$\mathbf{A}_B^n + \mathbf{A}_B^t = \mathbf{A}_A^n + \mathbf{A}_A^t + \mathbf{A}_{BA}^n + \mathbf{A}_{BA}^t \tag{17}$$

en donde se conocen los vectores $\mathbf{A}_B^n$, $\mathbf{A}_A^n$, $\mathbf{A}_A^t$ y $\mathbf{A}_{BA}^n$ o se pueden hallar una vez que se completa el polígono de velocidades. Asimismo, al comparar la ecuación (17) con la (16), es evidente que $\mathbf{A}_B^t$ y $\mathbf{A}_{BA}^t$ tienen las mismas direcciones que $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_{BA}$, respectivamente. En consecuencia, la solución puede desarrollarse exactamente igual que para el polígono de velocidades. La única diferencia en el procedimiento es que hay más vectores conocidos.

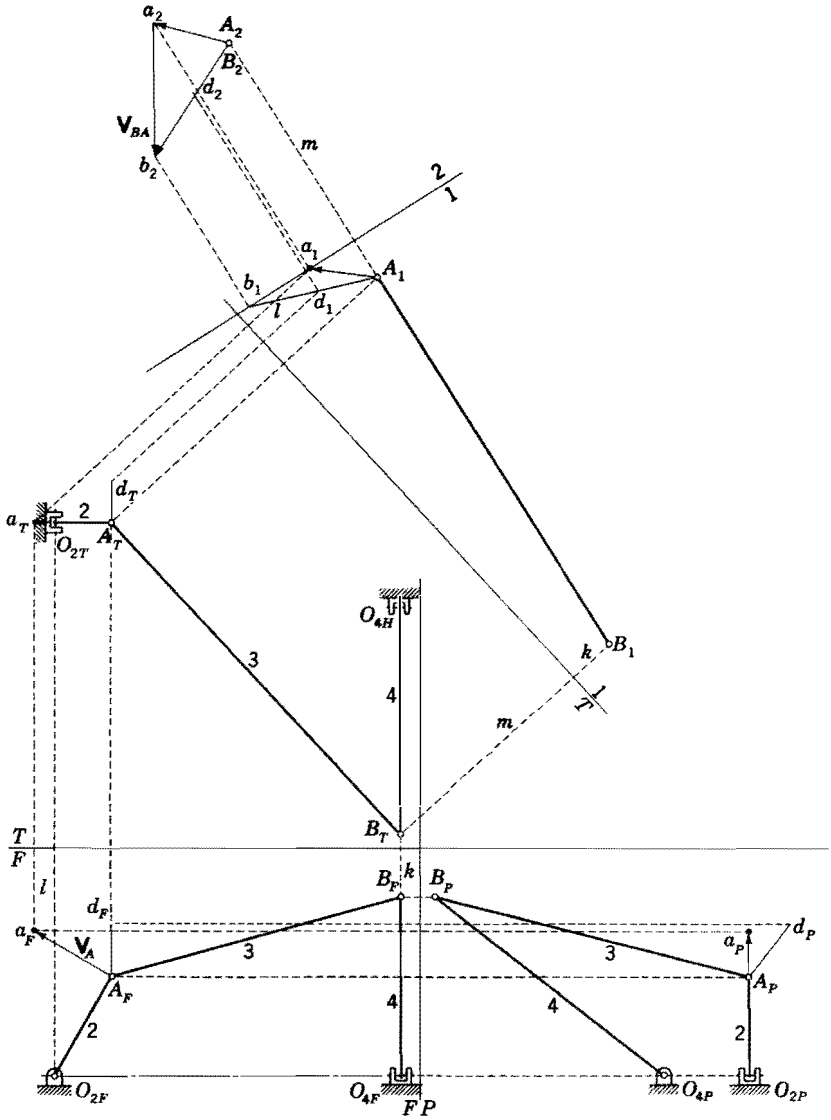


Figura 11-9 Ejemplo 11-2: análisis de velocidad.

11-6 ÁNGULOS EULERIANOS

En la sección 3-2 se explicó que la velocidad angular es una cantidad vectorial: de donde, al igual que todos los vectores, se puede resolver en sus componentes rectangulares

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^x \hat{\mathbf{i}} + \omega^y \hat{\mathbf{j}} + \omega^z \hat{\mathbf{k}} \qquad (a)$$

Por desgracia, también se vio en la figura 3-2 que los desplazamientos angulares tridimensionales no se comportan como vectores. Por consiguiente, no es factible encontrar un conjunto de tres ángulos que especifiquen la orientación de un cuerpo rígido y que tengan también como sus derivadas respecto al tiempo a ω^x, ω^y, y ω^z.

Para aclarar más aún el problema, se concibe un cuerpo rígido que gira en el espacio en torno a un punto fijo O en el origen de un *sistema de referencia absoluto xyz*. Entonces se define un sistema de referencia móvil $x'y'z'$, de tal modo que esté fijo al cuerpo que gira. Los ejes del sistema $x'y'z'$ se denominan *ejes fijos al cuerpo*. Se podría definir la orientación de $x'y'z'$ empleando los cosenos directores; pero se requerirían nueve de ellos y estarían relacionados por medio de seis relaciones de ortogonalidad.

Se pueden usar tres ángulos, llamados ángulos *eulerianos*, para especificar la orientación de los ejes fijos al cuerpo. Para ilustrar los ángulos eulerianos, se principia haciendo coincidir los ejes fijos al cuerpo con los ejes de referencia absolutos. Entonces se especifican tres rotaciones sucesivas, que deben ocurrir en el orden especificado, para llegar a la orientación $x'y'z'$. † Una descripción pictórica tridimensional de esas rotaciones es muy poco satisfactoria; como consecuencia, se utilizarán las tres vistas ortográficas de la figura 11-10. Esas vistas están dispuestas de tal modo que los ejes se encuentran en el plano del papel o están dirigidas positivamente hacia afuera del mismo.

La primera rotación es describiendo el ángulo ϕ, alrededor del eje z y en la dirección positiva, como se ilustra en la vista a. Esta rotación proporciona el sistema $x_1y_1z_1$. Por tanto, x gira describiendo ϕ hasta x_1, y hasta y_1 y z y z_1 coinciden. Se concibe un vector velocidad angular $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ coincidente con z y z_1.

El siguiente paso consiste en construir la vista b, realizando una proyección ortográfica a lo largo del eje y_1 positivo. La segunda rotación se realiza describiendo el ángulo θ en torno al eje y_1 y en la dirección positiva, como se muestra. Esta rotación da lugar al sistema $x_2y_2z_2$, en donde z_1 gira describiendo el ángulo θ hasta z_2, y x_1 hasta x_2. Nótese que y_1 y y_2 son coincidentes y que se puede concebir otro vector velocidad angular $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ dirigido a lo largo del eje positivo y_2. Nótese también que el vector $\boldsymbol{\phi}$ se ha resuelto en sus componentes a lo largo de los ejes x_2 y z_2.

† Los autores no se han puesto completamente de acuerdo en cómo se deben definir estos ángulos. Aquí se empleará la definición dada por H. Yeh y J. I. Abrams, *Principles of Mechanics of Solids and Fluids,* vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1960, pp. 131-133, y por J. L. Synge y B. A. Griffith, *Principles of Mechanics,* 3a ed., McGraw-Hill, New York, 1959, pp. 259-261. En otros libros de referencia se encontrará una gran variedad de otras definiciones, que difieren en los ejes en torno a los cuales se miden las rotaciones sucesivas.

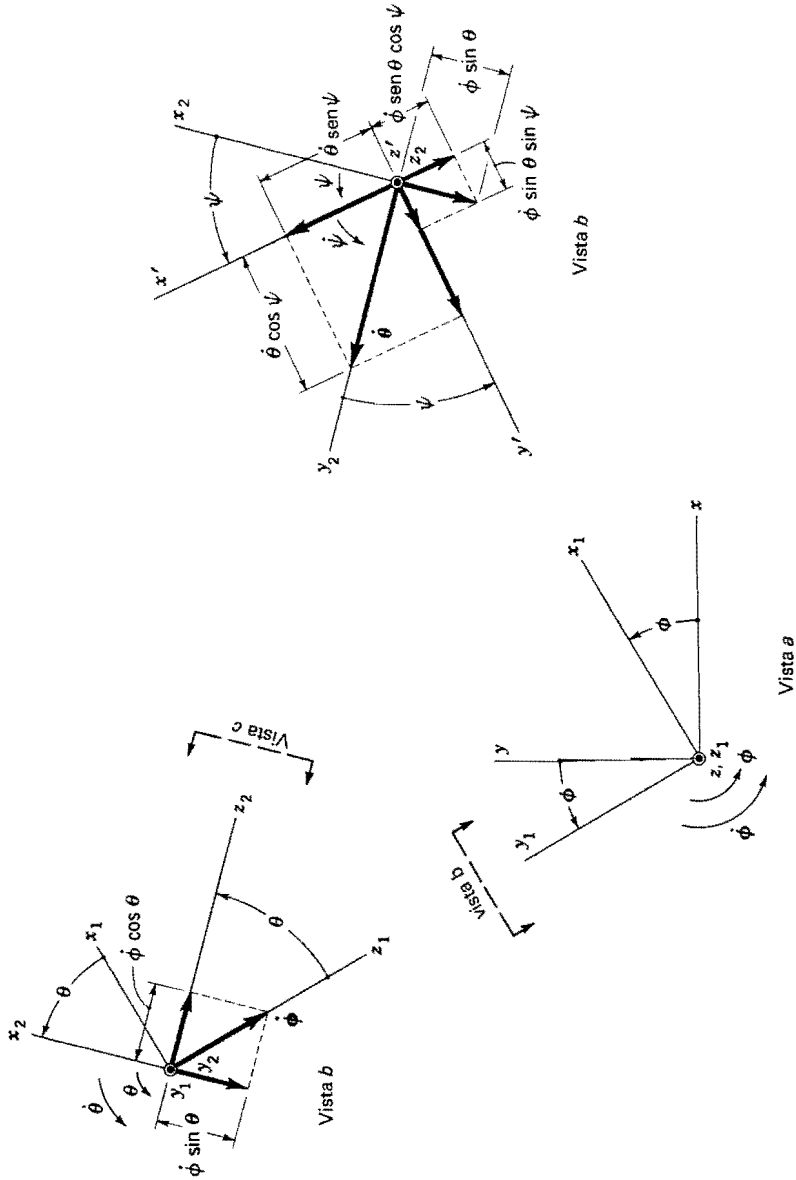


Figura 11-10 Vistas ortográficas de las tres rotaciones sucesivas que definen a los ángulos eulerianos.

El último paso se comienza proyectando ortográficamente a lo largo del eje positivo z_2 de la vista b para obtener la vista c. Esto hace que el vector $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ aparezca sobre el eje positivo y_2 y que el eje z_2 quede dirigido positivamente hacia afuera de la figura. La tercera rotación se hace describiendo el ángulo ψ en torno al eje z_2. Esto da lugar a la orientación deseada y a los ejes $x'y'z'$. Entonces se resuelven las

velocidades angulares una vez más en sus componentes a lo largo de los ejes $x'y'z'$. Si se utilizan las vistas b y c, los componentes se pueden sumar para dar

$$\omega^{x'} = \dot{\theta} \operatorname{sen}\psi - \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \cos\psi \tag{11-5}$$

$$\omega^{y'} = \dot{\theta} \cos\psi + \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi \tag{11-6}$$

$$\omega^{z'} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \tag{11-7}$$

11-7 UN TEOREMA SOBRE VELOCIDADES Y ACELERACIONES ANGULARES

En la figura 11-11 se tiene un dibujo esquemático del mecanismo espacial de siete eslabones y siete revolutas. Las orientaciones de los siete ejes de los pares de revoluta están representados esquemáticamente por medio de los vectores unitarios de velocidad aparente $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ij}$, que están dirigidos a lo largo de los ejes de los pares. Se supone que no hay relaciones geométricas especiales y que, por ende, el eslabonamiento tiene una movilidad de 1.

Para desarrollar el teorema acerca de las velocidades angulares, se observa que

$$\boldsymbol{\omega}_{31} = \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{32} \tag{a}$$

que es la ecuación de velocidad angular aparente (3-11).† Conviene volver a escribir la ecuación (a) como

$$\boldsymbol{\omega}_{21} - \boldsymbol{\omega}_{31} + \boldsymbol{\omega}_{32} = 0 \tag{b}$$

† Para encontrar una demostración rigurosa, véase la obra de L. A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 1965, p. 102.

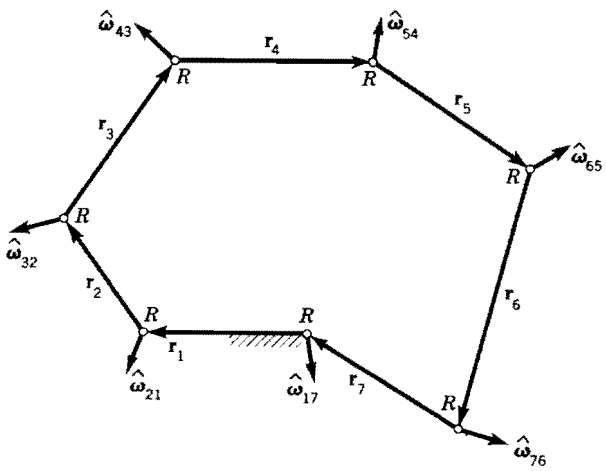


Figura 11-11

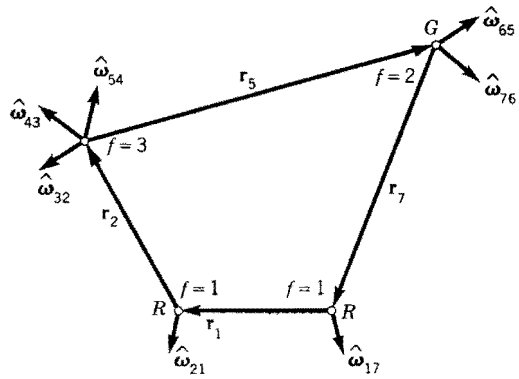


Figura 11-12

y luego, procediendo de manera similar alrededor del circuito, se tiene

$$\omega_{31} - \omega_{41} + \omega_{43} = 0 \qquad (c)$$

$$\omega_{41} - \omega_{51} + \omega_{54} = 0 \qquad (d)$$

$$\omega_{51} - \omega_{61} + \omega_{65} = 0 \qquad (e)$$

$$\omega_{61} - \omega_{71} + \omega_{76} = 0 \qquad (f)$$

$$\omega_{71} - \omega_{11} + \omega_{17} = 0 \qquad (g)$$

Si se observa que $\omega_{11} = 0$, por definición, y se suman las ecuaciones (*b*) a (*g*), se obtiene

$$\omega_{21} + \omega_{32} + \omega_{43} + \omega_{54} + \omega_{65} + \omega_{76} + \omega_{17} = 0 \qquad (h)$$

la cual afirma que la *suma de las velocidades angulares relativas alrededor de un circuito cerrado en un sistema de un solo grado de libertad, es cero*. Expresado matemáticamente, este teorema se escribe

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{i+1,i} = 0 \qquad n + 1 = 1 \qquad (11\text{-}8)$$

Este teorema de la velocidad angular relativa es particularmente útil para eslabonamientos espaciales que tienen pares con dos y tres libertades; véase por ejemplo el problema 11-15. Sin embargo, debe tenerse especial cuidado de eliminar toda libertad no esencial antes de aplicar la (11-8).

En la figura 11-12 se ilustra el método para el eslabonamiento *RGGR*. Obsérvese que el diagrama muestra los ejes múltiples de rotación de las articulaciones globulares como libertades separadas y que se eliminó la libertad no esencial. Las direcciones de $\hat{\omega}_{32}$, $\hat{\omega}_{43}$, y $\hat{\omega}_{54}$, correspondientes a los ejes de rotación del primer par globular, no necesariamente deben ser ortogonales; de hecho, se pueden asignar cualesquiera direcciones convenientes, siempre y cuando sean independientes.

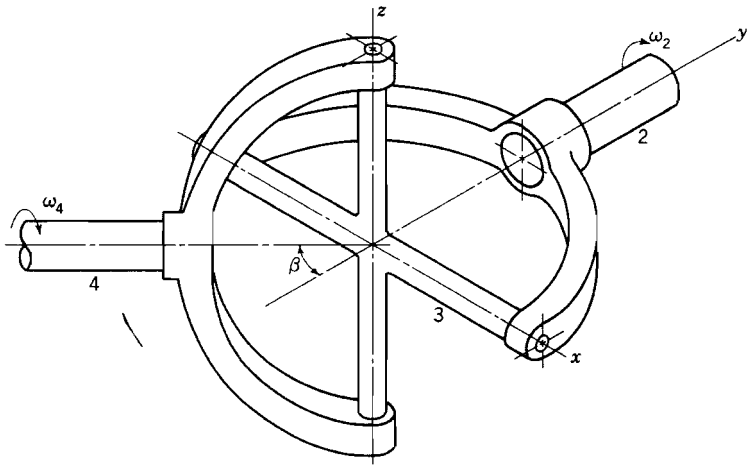


Figura 11-13 Articulación o junta universal de Hooke, o Cardan.

El *teorema de la aceleración angular relativa* se puede desarrollar de la misma manera. Este teorema se escribe

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_{i+1,i} = 0 \qquad n+1=1 \tag{11-9}$$

Puesto que

$$\frac{d}{dt}(\omega\hat{\boldsymbol{\omega}}) = \alpha\hat{\boldsymbol{\omega}} + \omega\dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}}$$

la dirección de $\boldsymbol{\alpha}$ *no* es necesariamente la misma que la de $\hat{\boldsymbol{\omega}}$. Por consiguiente, debe tenerse cuidado al aplicar la ecuación (11-9).

11-8 ARTICULACIÓN UNIVERSAL DE HOOKE

En la figura 11-13 se ilustra la conocida articulación o unión de Hooke, o Cardan. Esta se compone de dos yugos, que son los elementos impulsor e impulsado, y una cruz, que es el eslabón de conexión. Una de las desventajas de esta articulación es que la razón de velocidades no es constante durante la rotación. En la figura 11-14 se presenta un diagrama polar de velocidades angulares que muestra la velocidad angular tanto del impulsor como del elemento impulsado para una revolución completa de la articulación. Puesto que se supone que el elemento impulsor tiene una velocidad angular constante, su diagrama polar es un círculo. No obstante, el diagrama para el elemento impulsado es una elipse que cruza al círculo en cuatro sitios. Esto significa que hay cuatro instantes durante una sola rotación en los que las velocidades angulares de los dos ejes son iguales. Durante el tiempo restante, el

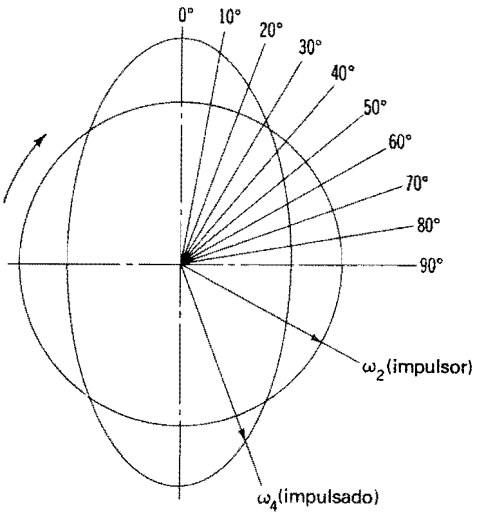


Figura 11-14

eje impulsado gira más rápido durante parte del tiempo y con mayor lentitud en otro lapso.

Se puede considerar al eje impulsor de un automóvil como si tuviera una carga de inercia en cada extremo —el volante y el motor que giran a velocidad constante en uno de los extremos y, en el otro, el peso del automóvil que se desplaza a gran velocidad—. Si en un automóvil se empleara una sola articulación universal que trabajara formando un ángulo finito, la velocidad del motor, o bien, la del automóvil tendrían que variar durante cada revolución del eje impulsor. Ambas inercias se oponen a esto, de modo que el efecto sería que las llantas resbalarían y las piezas que componen la línea de transmisión de potencia estarían sometidas a grandes esfuerzos. En la figura 11-15 se presentan dos configuraciones de articulaciones universales que ofrecen una razón uniforme de velocidades entre los extremos de entrada y de salida.

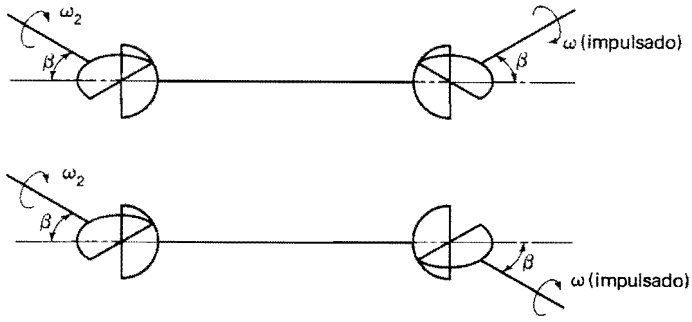


Figura 11-15

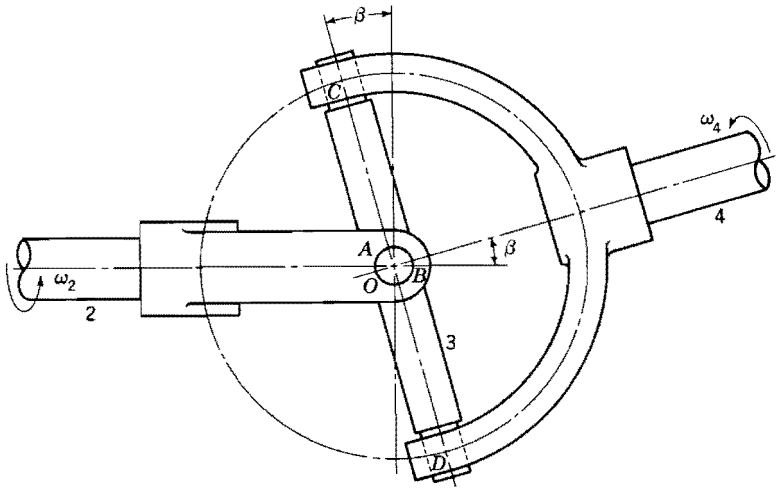


Figura 11-16

Análisis En la figura 11-16, el eje impulsor 2 se conecta con el eje impulsado 4 por medio de la cruz de conexión 3. Las líneas de los centros de los ejes se intersecan en O, produciendo el ángulo entre los ejes β. Los extremos de la cruceta se conectan al yugo impulsor en los puntos A y B, y al yugo impulsado en C y D. Durante el movimiento, la recta AB describe un círculo en un plano vertical perpendicular al dibujo, y la recta CD, otro círculo en un plano que forma un ángulo β con el plano vertical. Estos dos círculos son círculos máximos de la misma esfera, cuyo centro es O. Los puntos A y C permanecen siempre con la misma separación, es decir, a 90° de arco del círculo máximo. La desviación máxima en la razón de velocidades angulares ocurre cuando cualquiera de los puntos A o C se encuentran en la intersección de los círculos máximos.

En la figura 11-17 se ilustran nuevamente los dos círculos máximos en los que A y C se desplazan. Estos círculos se intersecan en D y se muestran separados por el ángulo entre los ejes β. Supóngase que el punto A recorre una distancia θ a partir del punto de intersección. Entonces el punto C quedará localizado sobre el arco de círculo máximo AC, 90° detrás de A. A continuación localícese C' 90°, adelante de C, sobre el círculo máximo que recorre C. Los triángulos $AC'D$ y $AC'C$ son triángulos esféricos. Los dos arcos AC y $C'C$ son de 90° y, por ende, los dos ángulos $C'AC$

† Los lados y ángulos de un triángulo esférico pueden tener cualquier valor desde 0 hasta 360°. Si una o más de las partes es mayor que 180°, entonces recibe el nombre de *triángulo esférico general*. Un triángulo en el que cada parte es menor que 180° se conoce como *triángulo esférico*. El triángulo rectángulo esférico se define como aquél que tiene un ángulo recto. Las otras partes pueden poseer cualquier valor de 0 a 180°.

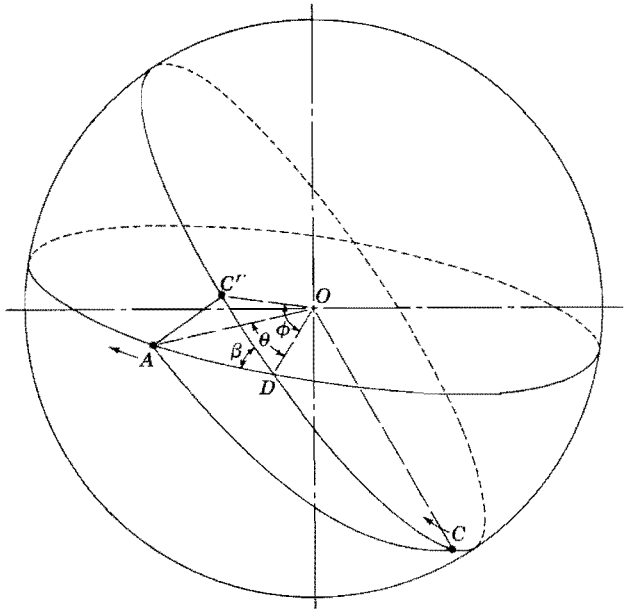


Figura 11-17

triángulo esférico rectángulo $AC'D$ en el que el ángulo $AC'D$ es un ángulo recto, $C'DA$ es el ángulo entre los ejes β, el arco AD es el ángulo que describe el eje al girar y el arco $C'D$, designado como ϕ, es el arco que describe el eje impulsado al girar. Según la fórmula del triángulo rectángulo tomada de la trigonometría esférica.

$$\cos \beta = \tan \phi \cot \theta \tag{11-10}$$

Para obtener la relación entre las velocidades angulares, la ecuación se reordena como

$$\tan \phi = \cos \beta \tan \theta \tag{a}$$

Al derivar se obtiene

$$\dot{\phi} \sec^2 \phi = \dot{\theta} \cos \beta \sec^2 \theta \tag{b}$$

Puesto que $\phi = \omega_4$, la velocidad angular del impulsado, y $\dot{\theta} = \omega_2$, la velocidad angular del impulsor, la razón entre ambas es

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{\cos \beta \sec^2 \theta}{\sec^2 \phi} = \frac{\cos \beta \sec^2 \theta}{1 + \tan^2 \phi} \tag{c}$$

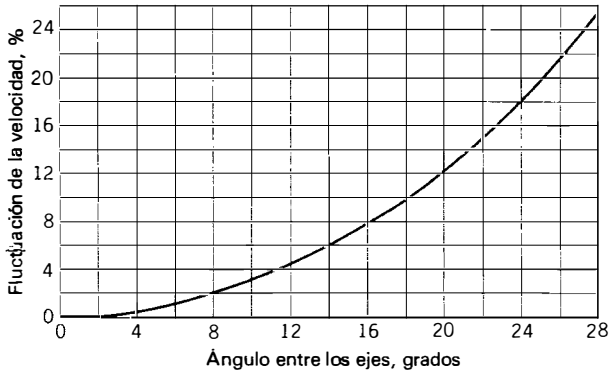


Figura 11-18 Relación entre el ángulo de los ejes y la fluctuación de la velocidad, en una articulación universal de Hooke.

Es conveniente eliminar ϕ; al sustituir la (*a*) en la (*c*) da

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{\cos \beta}{1 - \text{sen}^2 \theta \, \text{sen}^2 \beta} \tag{11-11}$$

Si se supone que el ángulo entre los ejes β es una constante, el valor máximo de la (11-11) ocurre cuando sen $\theta = 1$, es decir, cuando $\theta = 90°, 270°$, etc. El denominador alcanza su valor máximo cuando sen $\theta = 0$, y esta condición da la razón mínima de las velocidades.

Si la diferencia entre las razones máxima y mínima de la ecuación (11-11) se expresa en porcentajes y se representa gráficamente en función del ángulo entre los ejes, se obtiene una curva muy útil para evaluar las articulaciones universales. En la figura 11-18 se obtuvo de esta manera para ángulos entre los ejes con valores hasta de 28°.

PROBLEMAS

11-1 Determínese la movilidad de la cadena *GGC* ilustrada en la figura siguiente. Identifíquese toda libertad no esencial y dígase cómo se pueden eliminar. ¿Cuál es la naturaleza de la trayectoria descrita por el punto *B*?

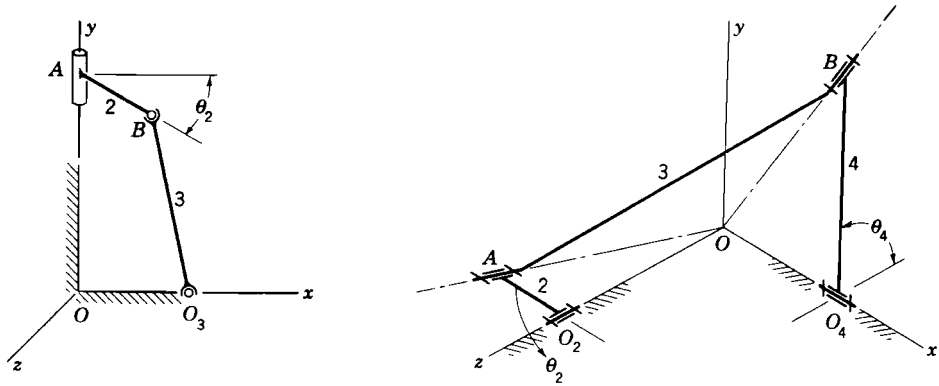
11-2 Con el eslabonamiento del problema 11-1, siendo $R_{BA} = R_{O_3O} = 75$ mm, $R_{BO_3} = 150$ mm, y $\theta_2 = 30°$, exprésese la posición de cada eslabón en forma vectorial.

11-3 Utilizando $\mathbf{V}_A = -50\hat{\mathbf{j}}$ mm/s, encuéntrense las velocidades angulares de los eslabones 2 y 3, y la velocidad del punto *B* del mecanismo correspondiente al problema 11-2. Aplíquese el análisis vectorial.

11-4 Resuélvanse los problemas 11-2 y 11-3 por medio de técnicas gráficas.

11-5 El eslabonamiento esférico 4*R* ilustrado en la figura tiene las siguientes dimensiones: $R_{AO_2} = 3$ pulg, $R_{O_2O} = 7$ pulg, $R_{O_4O} = 2$ pulg y $R_{BO_4} = 9$ pulg. El eslabón 2 se muestra en el plano *xz* y el eslabón 4 en el plano *xy*. Para una mejor representación, la figura no está trazada a escala. Exprésese la posición del eslabón 3 en notación vectorial. Siendo $\boldsymbol{\omega}_2 = -60\hat{\mathbf{k}}$ rad/s úsese álgebra vectorial para realizar un análisis completo de velocidad y aceleración del eslabonamiento en la posición indicada.

11-6 Resuélvase el problema 11-5 por medios gráficos.



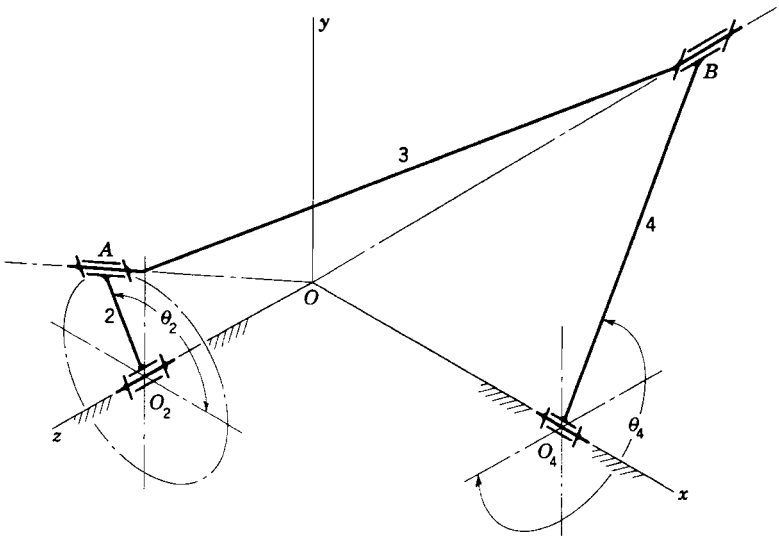
Problemas 11-1 y 11-5

11-7 Determínese la razón del tiempo de avance al de retorno para el problema 11-5. ¿Cuál es el ángulo total de oscilación del eslabón 4?

11-8 Repítase el problema 11-5 excepto con $\theta_2 = 90°$.

11-9 El eslabonamiento esférico de cuatro barras ilustrado tiene $R_{AO_2} = 75$ mm, $R_{O_2O} = 150$ mm, $R_{O_4O} = 225$ mm, $R_{BA} = 412$ mm, y $R_{BO_4} = 262$ mm. La posición que se presenta corresponde a $\theta_2 = 120°$. Determínese si la manivela 2 tiene libertad de girar y describir una vuelta completa. De ser así, hállese el ángulo de oscilación del eslabón 4 y la razón del tiempo avance al de retorno.

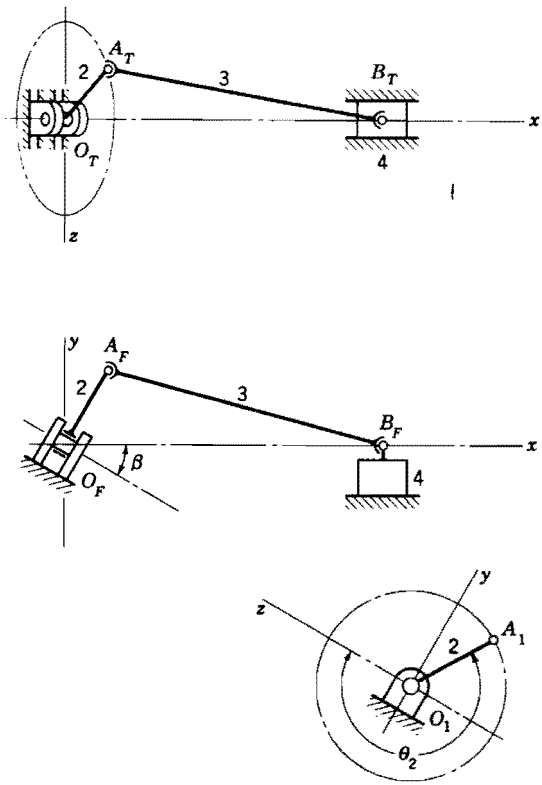
11-10 Con $\boldsymbol{\omega}_2 = 36\hat{\mathbf{k}}$ rad/s, aplíquese el análisis vectorial para hacer un análisis completo de velocidad y aceleración del mecanismo del problema 11-9.



Problema 11-9

11-11 Resuélvase el problema 11-10 aplicando métodos gráficos.

11-12 En la figura se muestran las vistas superior, frontal y auxiliar de un eslabonamiento espacial de corredera y manivela, con dos articulaciones esféricas. Las dimensiones son $R_{AO} = 2$ pulg y $R_{BA} = 6$ pulg. En la construcción de muchos mecanismos se toman medidas para hacer variar el ángulo β. Por consiguiente, la carrera de la corredera 4 se puede ajustar desde cero, cuando $\beta = 0$, al doble de la longitud de la manivela, cuando $\beta = 90°$. En este ejemplo, $\beta = 30°$, $\theta_2 = 240°$ y $\omega_2 = 24$ rad/s. Exprésense los eslabones en forma vectorial y apliquese álgebra vectorial para efectuar un análisis completo de velocidad del eslabonamiento.

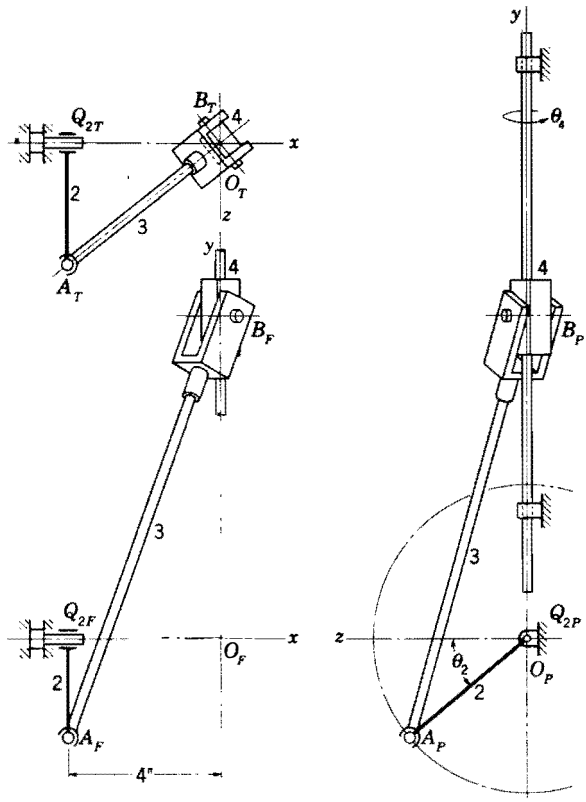


Problema 11-12

11-13 Resuélvase el problema 11-12 por medios gráficos.

11-14 Resuélvase el problema 11-12 con $\beta = 60°$.

11-15 En esta figura se presentan las vistas frontal, superior y de perfil de un eslabonamiento *RGRC* de manivela y corredera oscilante. El eslabón 4, la corredera oscilante, va rígidamente unida a una varilla redonda que gira y se desliza en los dos cojinetes. Las dimensiones son $R_{AO_2} = 4$ pulg y $R_{BA} = 12$ pulg.



Problema 11-15

a) Aplíquese el criterio de Kutzbach para encontrar la mobilidad del eslabonamiento.
b) Con la manivela 2 como impulsor, hállese el recorrido angular y lineal totales del eslabón 4.
c) Con $\theta_2 = 40°$, escríbase la ecuación de cierre del circuito para el mecanismo y úsese álgebra vectorial para resolverlo para todos los datos de posición desconocidos.

11-16 Con $\boldsymbol{\omega}_2 = -48\hat{\mathbf{i}}$ rad/s para el problema 11-15, hállense $\mathbf{V}_B$, $\boldsymbol{\omega}_3$, y $\boldsymbol{\omega}_4$.

CAPÍTULO

DOCE

FUERZAS ESTÁTICAS

Ahora ya se puede iniciar un estudio de la dinámica de las máquinas y los sistemas. Este estudio se simplifica principiando con la estática de dichos sistemas. En los estudios que se hicieron sobre el análisis cinemático, la atención sólo se enfocó a la geometría de los movimientos y a las relaciones entre el desplazamiento y el tiempo. Se pasó completamente por alto las fuerzas que producían el movimiento, o los movimientos que resultarían de la aplicación de un sistema de fuerzas dado.

La consideración de un problema en el diseño de una máquina, en el que sólo intervengan la *longitud* y el *tiempo*, es una simplificación tremenda. Libera a la mente de la influencia complicadora de muchos otros factores que, al final, intervienen en el problema, y permite que se enfoque la atención en el problema fundamental, es decir, el de diseñar un mecanismo para obtener un movimiento deseado.

Las unidades fundamentales en el análisis cinemático son *longitud* y *tiempo* y, en el análisis dinámico, son *longitud, tiempo* y *fuerza.*

Las fuerzas se transmiten hacia los elementos de las máquinas a través de superficies pareadas; por ejemplo, de un engrane hacia un eje, o de un engrane, a través de los dientes endentados, hacia otro engrane; de una biela, a través de un cojinete, hacia una palanca; de una banda en V hacia una polea; de una leva hacia un seguidor, o de un tambor de freno hacia la zapata del freno. Existe una diversidad de razones por las que es necesario conocer las magnitudes de estas fuerzas. La distribución de las mismas en las fronteras, o superficies de contacto, debe ser razonable, y su intensidad debe estar dentro de los límites de trabajo de los materiales que componen las superficies. Por ejemplo, si la fuerza que opera sobre un cojinete de manguito es demasiado grande, expulsará la película de aceite y hará que se establezca un contacto metal contra metal, sobrevenga un calentamiento y se produzca una falla rápida del cojinete. Si las fuerzas entre los dientes de los engranes son demasiado grandes, la película de aceite puede ser expulsada de entre ellos. Esto provocaría que el metal se descascare y astille, ruido, movimiento brusco y la falla final. En el estudio de la dinámica que se va a desarrollar, el interés se

centrará principalmente en la determinación de la magnitud, la dirección y la localización de las fuerzas; pero se dejará a un lado la determinación de las dimensiones de los elementos sobre los que actúan.†

12-1 INTRODUCCIÓN

A continuación se definen algunos de los términos nuevos que se aplican en esta fase del estudio.

Fuerza Las primeras ideas referentes a las fuerzas surgieron en el hombre debido a su deseo de empujar o levantar varios objetos o tirar de ellos. Así, pues, la fuerza es la acción de un cuerpo que actúa sobre otro. El concepto intuitivo de fuerza incluye ideas como *lugar de aplicación, dirección y magnitud,* que se conocen como las *características de una fuerza.*

Materia Materia es cualquier material o sustancia; si está totalmente encerrada, se denomina cuerpo.

Masa Newton definió la masa como *la cantidad de materia de un cuerpo según la miden su volumen y densidad.* Esto no es una definición muy satisfactoria porque densidad *es* la masa de una unidad de volumen. Se puede excusar a Newton conjeturando que tal vez no quiso dar a entender que se trataba de una definición. No obstante, reconoció el hecho de que todos los cuerpos poseen cierta propiedad inherente que no es lo mismo que el peso. Por consiguiente, una roca lunar posee cierta cantidad constante de sustancia, incluso a pesar de que su peso en la luna sea diferente de su peso en la Tierra. Esta cantidad constante de sustancia, o cantidad de materia, recibe el nombre de *masa* de la roca.

Inercia Inercia es la propiedad de la masa que hace que se resista a cualquier esfuerzo por cambiar su movimiento.

Peso Peso es la fuerza de gravedad que actúa sobre una masa. Conviene tener en cuenta la siguiente cita:

> La gran ventaja de las unidades SI es que se tiene una, y solo una, unidad para cada cantidad física: el metro para la longitud, el kilogramo para la masa, el newton para la fuerza, el segundo para el tiempo, etc. Para ser coherente con esta característica única, se deduce que una unidad o palabra dada no se debe emplear como nombre técnico aceptado para dos cantidades físicas. Sin embargo, durante generaciones se ha usado el término "peso", tanto en campos técnicos como no técnicos, para designar tanto a la fuerza de gravedad que actúa sobre un cuerpo, como la masa del cuerpo mismo. La razón de este uso doble del término "peso" para dos cantidades físicas

† La determinación de las dimensiones de los elementos de máquinas es el tema de obras que generalmente lleva el título de diseño de máquinas o diseño mecánico. Véase la obra de Joseph E. Shigley, *Mechanical Engineering Design,* 3d. ed., McGraw-Hill, New York, 1977.

diferentes —fuerza y masa— se atribuye al uso dual de las libras en el sistema gravitacional actual ordinario, en el que con frecuencia se usa peso para significar tanto fuerza como masa. ‡

En esta obra siempre se usará el vocablo *peso* con el significado de *fuerza* gravitacional.

Partícula Una partícula es un cuerpo cuyas dimensiones son tan pequeñas que se pueden despreciar.

Cuerpo rígido Todos los cuerpos son elásticos o plásticos y se deformarán si reciben la acción de fuerzas. Cuando la deformación de tales cuerpos es pequeña, con frecuencia se supondrá que son rígidos, es decir, incapaces de deformarse, para simplificar el análisis.

Cuerpo deformable No se puede aplicar la suposición de cuerpo rígido cuando se deben analizar los esfuerzos y deformaciones internos debidos a las fuerzas aplicadas. Por ende, se considera que el cuerpo es capaz de deformarse. Este tipo de análisis se denomina a menudo *análisis de los cuerpos elásticos,* aplicando la suposición adicional de que el cuerpo se mantiene elástico dentro de la gama de fuerzas aplicadas.

Ley de Newton Las tres leyes de Newton, como las expresa en su obra *Principia*, son:

(Ley 1) Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento uniforme en una recta, excepto hasta que es obligado a cambiar ese estado por las fuerzas aplicadas.

(Ley 2) El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza en movimiento aplicada, y se lleva a cabo en la dirección de la recta en la que se aplica dicha fuerza.

(Ley 3) La reacción siempre es igual y opuesta a la acción; esto equivale a decir que las acciones de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y directamente opuestas.

Para los fines de nuestro estudio, conviene volver a expresar estas leyes de la siguiente manera:

Ley 1 Si todas las fuerzas que actúan sobre una partícula están balanceadas, dicha partícula se mantendrá en reposo, o bien, continuará moviéndose en una recta con una velocidad uniforme.

Ley 2 Si las fuerzas que actúan sobre una partícula no están balanceadas, experimentará una aceleración proporcional a la fuerza resultante y en la dirección de esta última.

Ley 3 Cuando dos partículas reaccionan, se produce un par de fuerzas interactuan-

‡ Tomado de "S. I., The Weight/Mass Controversy", *Mech. Eng.*, vol. 99, no. 9, p. 40, September 1977, y vol. 101, no. 3, p. 42, March 1979.

tes; estas fuerzas tienen magnitudes iguales y sentidos opuestos, y actúan a lo largo de la recta común a las dos partículas.

12-2 SISTEMAS DE UNIDADES

Las dos primeras leyes de Newton se pueden resumir mediante la ecuación

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} \tag{12-1}$$

que se conoce con el nombre de *ecuación del movimiento de las partículas.* En esta ecuación, **A** es la aceleración que experimenta una partícula de masa m cuando recibe la acción de la fuerza **F**. Tanto **F** como **A** son cantidades vectoriales.

Un uso importante de la ecuación (12-1) ocurre en la estandarización de los sistemas de unidades. Los siguientes símbolos se utilizarán para designar unidades:

Fuerza, F
Masa, M
Longitud, L
Tiempo, T

Estos símbolos deben representar cualquier unidad que pueda elegirse. Por consiguiente, las elecciones posibles para L son pulgadas, kilómetros, millas, etc. Los símbolos F, M, L y T no son números; pero se pueden sustituir en la (12-1) como si lo fueran. Así, pues, el signo de igualdad implica que los símbolos que se encuentran en uno de los miembros son equivalentes a los que están en el otro miembro. Entonces, al hacer la sustitución indicada da

$$F = MLT^{-2} \tag{12-2}$$

porque la aceleración A tiene unidades de longitud divididas entre el tiempo al cuadrado. La ecuación (12-2) expresa una equivalencia entre las cuatro unidades de fuerza, masa, longitud y tiempo. La persona tiene la libertad de elegir las unidades para tres de ellas y entonces, las que se utilicen para la cuarta dependen de las tres primeras. Por esta razón, las tres primeras unidades elegidas se conocen como *unidades básicas,* en tanto que la cuarta se califica como *unidad derivada.*

Cuando se eligen como unidades básicas la fuerza, la longitud y el tiempo, la masa es la unidad derivada y el sistema que resulta se conoce como *sistema gravitacional de unidades.*

Cuando se eligen la masa, la longitud, y el tiempo como unidades básicas, la fuerza es la unidad derivada y el sistema resultante es un *sistema absoluto de unidades.*

En los países de habla inglesa, el *sistema común pie-libra-segundo* (*fps-foot-pound-second*) y el *sistema pulgada-libra-segundo* (*ips-inch-pound-second*) son los

dos sistemas gravitacionales estándares más usados por los ingenieros.† En el sistema fps la unidad de masa es

$$M = \frac{FT^2}{L} = \frac{\text{(libra fuerza) (segundo)}^2}{\text{pie}} = \text{lbf} \cdot \text{s}^2/\text{pie} = \text{slug} \qquad (12\text{-}3)$$

Por consiguiente, la longitud, el tiempo y la fuerza son las tres unidades básicas del sistema gravitacional fps.

La unidad de tiempo del sistema fps es el segundo, que se abrevia s.

La unidad de fuerza en el sistema fps es la libra, con mayor propiedad *libra fuerza.* Rara vez se abreviará esta unidad como lbf; la abreviatura lb es permisible, ya que se estarán manejando únicamente sistemas gravitacionales de uso común en Estados Unidos.‡ En algunas ramas de la ingeniería conviene representar 1 000 libras como una kilolibra y abreviarla kip (del inglés, kilopound). Muchos escritores agregan la letra *s* a kip para formar el plural; pero para ser coherentes con la práctica de utilizar sólo unidades en singular, esto no se hará aquí. Por consiguiente, se usan 1 kip y 3 kip para designar, respectivamente, 1 000 y 3 000 lb.

Por último, en la ecuación (12-3) se observa que la unidad derivada de masa en el sistema gravitacional fps es la $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$, llamada *slug;* no existe abreviatura para el término slug.

La unidad de masa en el sistema gravitacional ips es

$$M = \frac{FT^2}{L} = \frac{\text{(libra fuerza) (segundo)}^2}{\text{pulg}} = \text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{pulg} \qquad (12\text{-}4)$$

Nótese que a esta unidad de masa *no* se le ha dado un nombre especial.

El Sistema Internacional de Unidades (SI) es un sistema absoluto. Las unidades básicas son el metro, el kilogramo masa y el segundo. La unidad de fuerza es derivada y se denomina *newton*, para distinguirla del kilogramo que, como se indicó, es la unidad de masa. Las unidades del newton (N) son

$$F = \frac{ML}{T^2} = \frac{\text{(kilogramo) (metro)}}{\text{(segundo)}^2} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N} \qquad (12\text{-}5)$$

El peso de un objeto es la fuerza que la gravedad ejerce sobre él. Si se designa el peso como W y la aceleración debida a la gravedad como g, la (12-1) se convierte en

$$W = mg \qquad (12\text{-}6)$$

En el sistema fps, la gravedad estándar es $g = 32.1740$ pie/s^2. En la mayor parte

† La mayoría de los ingenieros prefieren utilizar sistemas gravitacionales; esto ayuda a explicar parte de la resistencia a utilizar unidades SI, ya el Sistema Internacional (SI) es un sistema absoluto.

‡ La abreviatura lb usada para la palabra libra, proviene de Libra, el séptimo signo del zodiaco, que se representa con una balanza.

de los casos, se redondean a 32.2. Por ende, el peso de una masa de 1 slug en el sistema fps es

$$W = mg = (1 \text{ slug})(32.2 \text{ pie}/\text{s}^2) = 32.2 \text{ lb}$$

En el sistema ips, la gravedad estándar es 386.088, o sea, aproximadamente 386 pulg/s^2. Por tanto, en este sistema, una unidad de masa pesa

$$W = (1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pulg})(386 \text{ pulg}/\text{s}^2) = 386 \text{ lb}$$

Con unidades SI, la gravedad estándar es 9.806 m/s^2 , o sea, aproximadamente 9.80 m/s^2. Así pues, el peso de 1 kg masa es

$$W = (1 \text{ kg})(9.80 \text{ m}/\text{s}^2) = 9.80 \text{ N}$$

Conviene recordar que una manzana grande pesa aproximadamente 1 N.

12-3 FUERZAS APLICADAS Y DE RESTRICCIÓN

Cuando varios cuerpos se conectan entre sí para formar un grupo o sistema, las fuerzas de acción y reacción entre dos cualesquiera de los cuerpos que conectan se denominan *fuerzas de restricción.* Éstas obligan o restringen a los cuerpos a comportarse de un modo específico. Las fuerzas externas a este sistema de cuerpos se llaman *fuerzas aplicadas.*

Las fuerzas eléctricas, magnéticas y gravitacionales son ejemplos de fuerza que pueden aplicarse sin contacto físico real. Una gran mayoría, si no la mayor parte, de las fuerzas de las que nos ocuparemos ocurren a través de un contacto físico o mecánico directo.

Como se indicó antes, las *características de una fuerza* son su *magnitud,* su *dirección* y su *punto de aplicación.* La dirección de una fuerza incluye el concepto de recta a lo largo de la cual se dirige la fuerza, así como un *sentido.* Por ende, una fuerza está dirigida positiva o negativamente a lo largo de una *línea de acción.*

En ocasiones, el punto de aplicación no es importante, por ejemplo, cuando se está estudiando el equilibrio de un cuerpo rígido. De donde, en la figura 12-1*a* no importa si se representa el par de fuerzas $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$, como si comprimieran al eslabón, o si se dibujan como si sometieran al eslabón a una tensión, a condición de que el único interés que se tenga sea el del equilibrio del mismo. Por supuesto, si se está interesado en los esfuerzos internos del eslabón, las fuerzas no se pueden intercambiar.

La notación para los vectores fuerza es la mostrada en la figura 12-1*b*. Se usan negritas para los vectores fuerza y cursivas blancas para sus magnitudes. Por tanto, las componentes de un vector fuerza son

$$\mathbf{F} = F^x\hat{\mathbf{i}} + F^y\hat{\mathbf{j}} + F^z\hat{\mathbf{k}} \qquad (a)$$

Nótese que las direcciones de las componentes en este libro de texto se indican por medio de superíndices y no de subíndices.

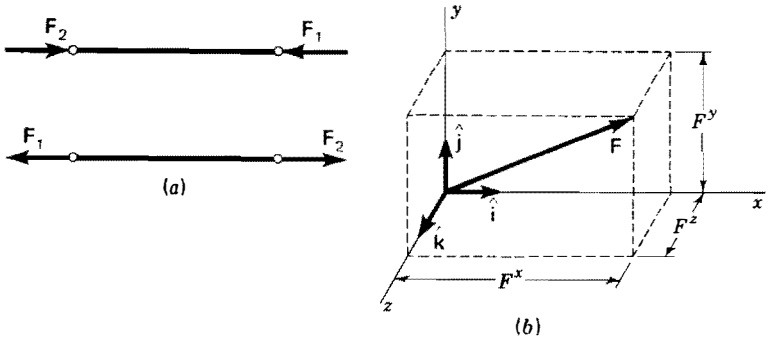


Figura 12-1. *a*) Los puntos de aplicación de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ a un cuerpo rígido pueden tener o no importancia. *b*) Componentes rectangulares de un vector fuerza.

Dos fuerzas iguales y opuestas que actúan a lo largo de dos rectas paralelas no coincidentes en un cuerpo, no se pueden combinar para obtener una sola fuerza resultante. Dos fuerzas cualesquiera de esta índole que actúan en un cuerpo, constituyen un *par*. El *brazo del par* es la distancia perpendicular entre sus líneas de acción, y el *plano del par* es aquél que contiene a ambas líneas de acción.

El *momento de un par* es otro vector **M** dirigido normal al plano del par; el sentido de **M** se determina de acuerdo con la regla de la mano derecha para la rotación. La magnitud del momento es el producto del brazo del par y la magnitud de una de las fuerzas. Por consiguiente,

$$M = hF \tag{12-7}$$

en donde h es el brazo del momento.

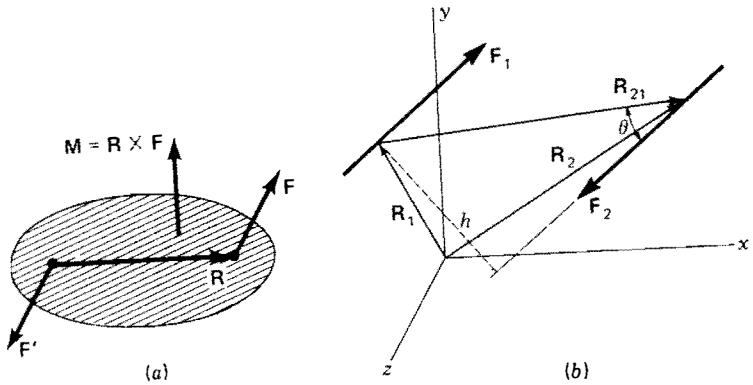


Figura 12-2. *a*) R es un vector de posición, pero **F** y **F'** son vectores fuerza; el vector libre **M** es el momento del par formado por **F** y **F'**. *b*) Par de fuerza constituido por $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.

Como se ilustra en la figura 12-2*a*, el vector momento es el producto vectorial del vector de posición relativa **R** y el vector fuerza **F** y, por tanto, se define mediante la ecuación

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} \tag{12-8}$$

Al examinar la figura 12-2*b* se pueden determinar algunas de las propiedades interesantes de los pares. Aquí $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son dos fuerzas iguales, opuestas y paralelas. Elíjase cualquier punto sobre cada línea de acción y defínanse estos puntos por medio de los vectores de posición $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$. Luego, el vector de posición relativa, o vector de diferencia de posición, es

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \tag{a}$$

El momento del par es la suma de los momentos de cada fuerza y es

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2 \tag{b}$$

Pero $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, y, en consecuencia, la ecuación (*b*) se puede escribir

$$\mathbf{M} = (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_2 \tag{c}$$

La ecuación (*c*) demuestra que:

1. El valor del momento del par es independiente de la elección del centro en torno al cual se tomen los momentos, debido a que el vector $\mathbf{R}_{21}$ es el mismo para todas las posiciones del origen.
2. Puesto que $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ definen cualquier conjunto de puntos sobre las líneas de acción, el vector $\mathbf{R}_{21}$ no se restringe a la perpendicularidad con $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Este es un resultado muy importante del producto vectorial porque significa que el valor del momento es independiente de cómo se elija $\mathbf{R}_{21}$. Se puede obtener la magnitud del momento como sigue: Resuélvase $\mathbf{R}_{21}$ en las dos componentes $\mathbf{R}'_{21}$ y $\mathbf{R}''_{21}$ paralela y perpendicular, respectivamente, a $\mathbf{F}_2$. Entonces

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}'_{21} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}''_{21} \times \mathbf{F}_2 \tag{d}$$

   Pero $\mathbf{R}''_{21}$ es la distancia perpendicular entre las líneas de acción y $\mathbf{R}'_{21}$ es paralela a $\mathbf{F}_2$. Por ende, $\mathbf{R}'_{21} \times \mathbf{F}_2 = 0$ y

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}''_{21} \times \mathbf{F}_2$$

   es el momento del par. Puesto que $R''_{21} = R_{21}$ sen θ, en donde θ es el ángulo entre $\mathbf{R}_{21}$ y $\mathbf{F}_2$, la magnitud del momento es

$$M = (R_{21} \operatorname{sen} \theta) F_2 \tag{e}$$

3. El vector momento **M** es independiente de cualquier origen o línea de aplicación y, por consiguiente, es un *vector libre.*
4. Se pueden hacer girar las fuerzas de un par juntas dentro de su plano, manteniendo constantes sus magnitudes y la distancia entre sus líneas de acción, o bien, se pueden trasladar hacia cualquier plano paralelo sin cambiar la mag-

nitud o el sentido del vector momento. Asimismo, dos pares son iguales si tienen los mismos vectores momento, sean cuales fueren las fuerzas o los brazos del momento. Esto significa que lo que importa es el producto vectorial de los dos y no sus valores por separado.

12-4 CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO

Un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio estático si:

1. *La suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero.*
2. *La suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan en torno a cualquier eje único es cero.*

Matemáticamente, estas dos proposiciones se expresan como

$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad \sum \mathbf{M} = 0 \tag{12-9}$$

Obsérvese cómo estas proposiciones son un resultado de la primera y tercera leyes de Newton, sobreentendiéndose que un cuerpo constituye una colección de partículas.

Muchos problemas tienen fuerzas que actúan en un solo plano. Cuando esto sucede, conviene trabajar en el plano xy. En tal caso, las ecuaciones (12-9) se pueden simplificar como

$$\sum F^x = 0 \qquad \sum F^y = 0 \qquad \sum M = 0$$

en donde la dirección z para el momento M queda implícita en el hecho de que las fuerzas sólo existen en xy.

12-5 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

El término "cuerpo", como se usa aquí, puede ser un máquina completa, varias piezas conectadas de una máquina, una sola o una porción de una pieza. Un *diagrama de cuerpo libre* es un esquema o dibujo del cuerpo, aislado de la máquina, en el que las fuerzas y los momentos se muestran en acción. Por lo común, conviene incluir en el diagrama las magnitudes y direcciones conocidas, así como cualquier otra información pertinente.

El diagrama obtenido de esta manera se clasifica como "libre" porque se ha liberado la parte o porción del cuerpo del resto de los elementos de la máquina y se han reemplazado sus efectos por fuerzas y momentos. Si el diagrama de cuerpo libre es de una pieza completa de la máquina, las fuerzas señaladas en él son las fuerzas externas (fuerzas aplicadas) y los momentos ejercidos por piezas adyacentes o conectadas. Si el diagrama es una porción de una pieza, las fuerzas y los momentos que actúan sobre la porción cortada son las fuerzas *internas* y los momentos ejercidos por la parte que se ha cortado.

La construcción y presentación de diagramas de cuerpo libre trazados con claridad representan el meollo de la comunicación en la ingeniería. Esto es cierto porque representan una parte del proceso de reflexión, ya sea que se plasmen realmente en el papel o no, y porque la construcción de tales diagramas es la *única* manera en la que los resultados de la reflexión se pueden comunicar a otros. El estudiante debe adquirir el hábito de hacer diagramas de cuerpo libre sin importar qué tan simple pueda parecerle el problema. Constituyen medios para almacenar un pensamiento mientras se concentra en el siguiente paso del problema. La construcción de los diagramas acelera el proceso de resolución de problemas y reduce enormemente la posibilidad de cometer errores.

Las ventajas de utilizar diagramas de cuerpo libre se puede resumir como sigue:

1. Facilitan la tarea de trasladar las palabras, pensamientos e ideas a modelos físicos.
2. Contribuyen para que se vean con claridad y comprendan todas las facetas de un problema.
3. Ayudan a planear el planteamiento del problema.
4. Permiten que las relaciones matemáticas sean más fáciles de ver o encontrar.
5. Su aplicación facilita el control del avance y ayuda a establecer suposiciones simplificadoras.
6. Los métodos utilizados en la resolución se pueden conservar para consultas futuras.
7. Son ayudas para la memoria y facilitan la explicación y presentación del trabajo a otros.

Al analizar las fuerzas en las máquinas, casi siempre será necesario separar la máquina en sus componentes individuales y construir diagramas de cuerpo libre en los que se muestren las fuerzas que actúan sobre cada componente. Muchas de estas piezas estarán conectadas entre sí por medio de pares cinemáticos. En consecuencia, se ha preparado la figura 12-3 para mostrar las fuerzas de restricción entre los elementos de los pares inferiores, cuando se supone que las fuerzas de fricción son cero.

En el caso de pares superiores, las fuerzas de restricción son siempre normales a las superficies de contacto cuando se desprecia la fricción.

La notación mostrada en la figura 12-3 se aplicará en el curso del resto de este libro. Por ejemplo, $\mathbf{F}_{21}$ es la fuerza que el eslabón 2 ejerce sobre el 1; por tanto, $\mathbf{F}_{12}$ es la reacción a esta fuerza, y es la fuerza del eslabón 1 que actúa sobre el eslabón 2.

12-6 PROGRAMAS DE CÁLCULO

Si el lector tiene acceso a cualquier tipo de instalación de computación programable, debe crear los siguientes programas para utilizarlos, sobre todo en varios

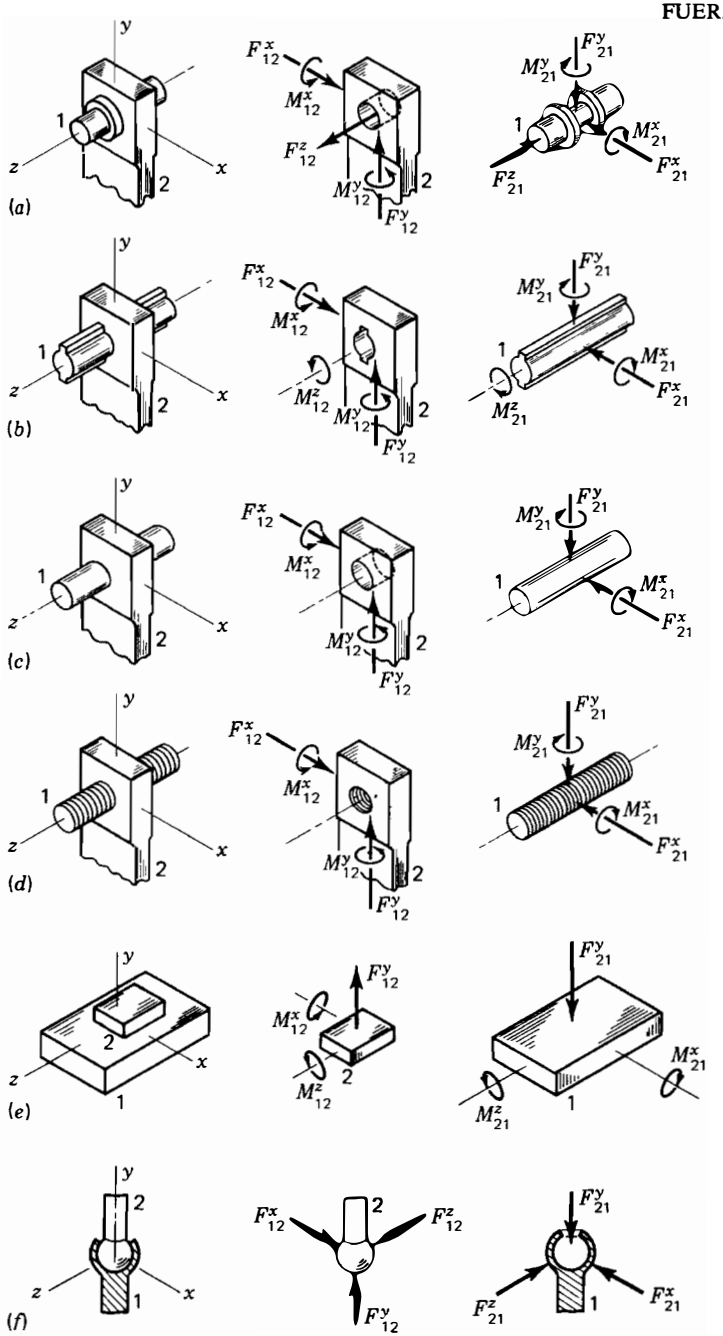


Figura 12-3. Todos los pares inferiores y sus fuerzas de restricción: *a*) par de revoluta o rotatorio; variable del par, θ ; *b*) par prismático, variable del par, z; *c*) par cilíndrico, variables del par, z, θ ; *d*) par de tornillo, variables del par z o θ ; *e*) par plano, variables del par x, z, θ ; *f*) par globular, variables del par, θ, ϕ, ψ.

de los siguientes capítulos. Puesto que estos problemas son breves, todos ellos se pueden formar como subrutinas y almacenarse en una sola tarjeta magnética o cualquier otro medio de almacenamiento. Los indicadores de programa o las transferencias condicionales facilitan la introducción de las diversas subrutinas. Se sugiere que se incluyan los siguientes problemas:

1. Dado $R\angle\theta$; encuéntrese $x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$.
2. Dado $x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$; encuéntrese $R\angle\theta$.
3. Dado θ; encuéntrese $\hat{\mathbf{R}} = \bar{x}\hat{\mathbf{i}} + \bar{y}\hat{\mathbf{j}}$,, en donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son los cosenos directores.
4. Dados $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots$ en sus componentes x, y y z; encuéntrese $\Sigma\,\mathbf{F}$.
5. Dados C y $\mathbf{C}'$ en sus componentes x, y y z; encuéntrese $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$.

Estos programas se deben plantear de tal manera que las componentes cero se introduzcan automáticamente sin necesidad de que se tome una acción positiva.

12-7 ELEMENTOS DE DOS Y TRES FUERZAS

El equilibrio o falta de equilibrio de un elemento de dos fuerzas aparece ilustrado en las figuras 12-4*a* y *b*. Si se aplica la primera de las ecuaciones (12-9), da

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = 0 \qquad (a)$$

Esto exige que $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ tengan las *magnitudes iguales* y *direcciones opuestas*. La segunda de las ecuaciones (12-9), $\Sigma\,\mathbf{M} = 0$, requiere que $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ tengan la *misma línea de acción*; de otra manera, los dos momentos no darían una suma cero. En la figura 12-4*c* y *d* se ilustra el equilibrio o falta de equilibrio de un elemento de tres fuerzas. Supóngase que dos de las fuerzas, por ejemplo $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$, se intersecan en algún punto O. Estas fuerzas se suman para formar el vector único $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$. Como que la línea de acción de esta suma pasa por el punto O, causa que su momento respecto a O es cero. La aplicación de $\Sigma\,\mathbf{M} = 0$ a las tres fuerzas, muestra que el

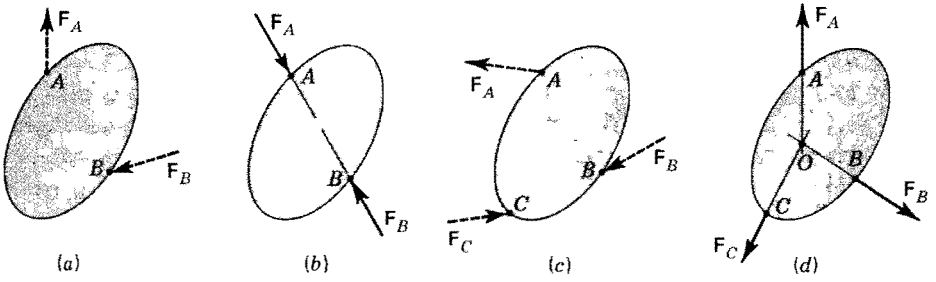


Figura 12-4. *a*) Elemento de dos fuerzas que no está en equilibrio; *b*) elemento de dos fuerzas que está en equilibrio si $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ son iguales, opuestas y tienen la misma línea de acción; *c*) elemento de tres fuerzas que no está en equilibrio; *d*) elemento de tres fuerzas que está en equilibrio si $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_C$ son coplanares, si sus líneas de acción se intersecan en un punto común O y si su suma vectorial es cero.

momento de $\mathbf{F}_C$ alrededor de O también debe ser cero. Por ende, las líneas de acción de las tres fuerzas se intersecan en un punto común; es decir, las fuerzas son concurrentes. Esto explica por qué un elemento de tres fuerzas se puede resolver sólo para dos magnitudes de las fuerzas, aunque se tengan tres ecuaciones: ya se ha usado la ecuación de momentos para hallar las direcciones de las líneas de acción.

El caso se presenta con mucha frecuencia, por ejemplo, en las vigas, en donde las tres fuerzas son paralelas; éste es el caso límite, y el punto común de intersección de las tres líneas de acción queda en el infinito.

La ecuación $\Sigma \mathbf{F} = 0$ para un elemento de tres fuerzas requiere que las mismas sean coplanares y que su suma vectorial sea cero.

Ejemplo 12-1 El eslabonamiento de cuatro barras de la figura 12-5*a* tiene la manivela 2 impulsada por un momento de torsión de entrada $\mathbf{M}_{12}$; una carga externa $\mathbf{P} = 120\angle 220°$ lb actúa en Q sobre el eslabón 4. Para la posición particular del eslabonamiento que se indica, encuéntrense todas las fuerzas en los eslabones y sus reacciones.

SOLUCIÓN GRÁFICA

1. Selecciónese una escala espacial S. La escala espacial correspondiente para la figura 12-5 es aproximadamente $S = 9$ pulg/pulg. Eso significa que 1 pulg del dibujo representa 9 pulg del eslabonamiento.
2. Selecciónese una escala para las fuerzas S_F. La escala para las fuerzas para la figura 12-5 es aproximadamente 80 lb/pulg. Por consiguiente, un vector de 1 pulg de largo representa una fuerza de 80 lb.
3. Trácese el mecanismo y la fuerza o fuerzas dadas a las escalas apropiadas, como se indica en la figura 12-5*a*.
4. Selecciónese un eslabón o varios eslabones en los que se pueda iniciar el análisis y constrúyase el diagrama de cuerpo libre. En este ejemplo se principia con el eslabón 4, como se señala en la figura 12-5*b*, porque se da P. Puesto que el eslabón 3 es un elemento de dos fuerzas, sólo puede soportar tensión o compresión. Por ende, la línea de acción de $\mathbf{F}_{34}$ actúa a lo largo del eslabón 3. El eslabón 4 es un elemento de tres fuerzas. No se conoce la dirección ni la magnitud de la reacción del marco $\mathbf{F}_{14}$. Un método para determinar las fuerzas vectoriales desconocidas que actúan sobre el eslabón 4 consiste en aplicar las ecuaciones (12-9). Por consiguiente, en la figura 12-5*b* trácense y mídanse los brazos de momento $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}_{34}$ en torno a O_4. Se encuentra que éstos son, respectivamente, 2.38 y 8.63 pulg. Sumando los momentos de estas dos fuerzas en torno a O_4 da la magnitud de $\mathbf{F}_{34}$.

$$\sum M_{O_4} = 2.38(120) + 8.63F_{34} = 0$$

Una solución de $F_{34} = -33.1$ lb, en donde el signo menos indica que el momento de $\mathbf{F}_{34}$ en torno a O_4 es en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj, como se indica.

5. El eslabón 4 es un elemento de tres fuerzas y, por tanto, se puede hallar la dirección de $\mathbf{F}_{14}$ utilizando el punto de concurrencia. Cuando se prolongan las líneas de acción de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}_{34}$ se intersecan en C, el punto de concurrencia, como se ilustra en la figura 12-5*c*.
6. El polígono de fuerzas, ilustrado en la figura 12-5*d*, es la solución gráfica de la ecuación

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_{34} + \mathbf{F}_{14} = 0$$

Nótese que los pasos 4 y 5 no son necesarios. Se puede utilizar el polígono de fuerzas con el fin de resolver para las incógnitas, empleando primero el paso 4, o bien, el 5.

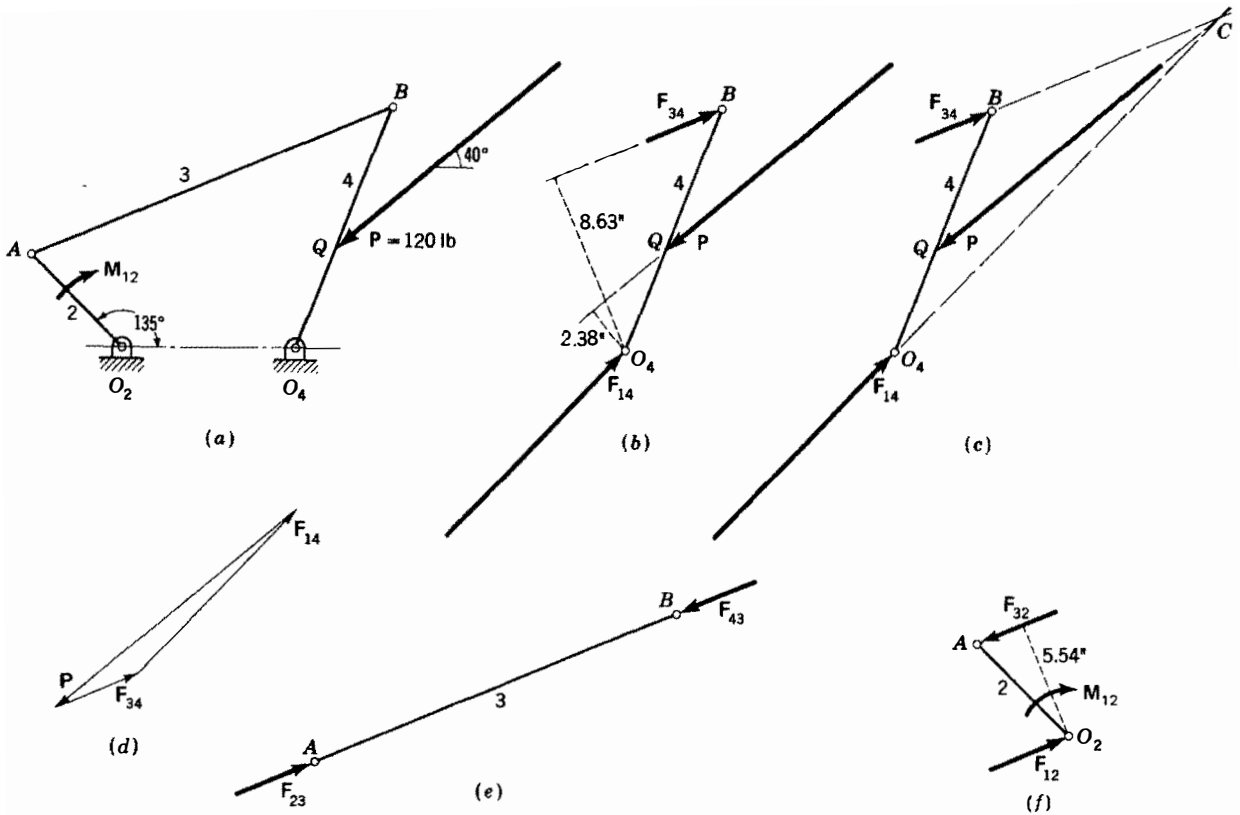


Figura 12-5. $O_2A = 6$ pulg, $AB = 18$ pulg, $O_4B = 12$ pulg, $O_2O_4 = 8$ pulg, $O_4Q = 5$ pulg.

7. En la figura 12-5*e* se construyó el diagrama de cuerpo libre del eslabón 3, observando que $\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{43} = \mathbf{F}_{34}$.
8. El diagrama de cuerpo libre del eslabón 2 se muestra en la figura 12-5*f*. En este caso, se tiene $\mathbf{F}_{32} = -\mathbf{F}_{23}$ y $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{32}$. Cuando se mide el brazo de momento de F_{32} alrededor de O_2 se obtienen 5.54 pulg; de donde,

$$M_{12} = -33.1(5.54) = -183 \text{ lb} \cdot \text{pulg} \quad \textit{Resp.}$$

en donde el signo negativo indica que el momento es en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj.
9. En la ilustración no se incluye un diagrama de cuerpo libre del marco, eslabón 1. Si se trazara, se mostrarían una fuerza $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ en O_2, una fuerza $\mathbf{F}_{41} = -\mathbf{F}_{14}$ en O_4, y un momento $\mathbf{M}_{21} = -\mathbf{M}_{12}$.

SOLUCIÓN ANALÍTICA Se hace primero un análisis de posición del eslabonamiento con el fin de determinar la ubicación angular de cada eslabón. En la figura 12-6*a* se muestran los resultados. Con referencia a la figura 12-6*b*, se principia por sumar momentos en torno a un eje que pase por O_4. Por consiguiente,

$$\sum \mathbf{M}_{O_4}^z = \mathbf{R}_Q \times \mathbf{P} + \mathbf{R}_B \times \mathbf{F}_{34} = 0 \tag{1}$$

Los vectores en la (1) son

$$\mathbf{R}_Q = 5\angle 68.4^\circ = 1.84\hat{\mathbf{i}} + 4.65\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{P} = 120\angle 220^\circ = -91.9\hat{\mathbf{i}} - 77.1\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{R}_B = 12\angle 68.4^\circ = 4.42\hat{\mathbf{i}} + 11.16\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{F}_{34} = F_{34}\angle 22.4^\circ = (0.924\hat{\mathbf{i}} + 0.381\hat{\mathbf{j}})F_{34}$$

Al realizar la operación de producto vectorial, se encuentra que el primer término de (1) es $\mathbf{R}_Q \times \mathbf{P} = 285.5\hat{\mathbf{k}}$. El segundo término es $\mathbf{R}_B \times \mathbf{F}_{34} = -8.63F_{34}\hat{\mathbf{k}}$. Al sustituir estos términos en (1) y despejar, se obtiene $F_{34} = 33.1$ lb; de manera que

$$\mathbf{F}_{34} = 33.1\angle 22.4^\circ = 30.6\hat{\mathbf{i}} + 12.6\hat{\mathbf{j}} \text{ lb} \quad \textit{Resp.}$$

La reacción del marco se encuentra entonces partiendo de la ecuación

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{34} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_{14} = (30.6\hat{\mathbf{i}} + 12.6\hat{\mathbf{j}}) + (-91.9\hat{\mathbf{i}} - 77.1\hat{\mathbf{j}}) + \mathbf{F}_{14} = 0$$

La solución da

$$\mathbf{F}_{14} = 61.3\hat{\mathbf{i}} + 64.5\hat{\mathbf{j}} = 89.0\angle 46.5^\circ \text{ lb} \quad \textit{Resp.}$$

A continuación, partiendo de la figura 12-6*c*, para el eslabón 2 se escribe

$$\sum \mathbf{M}_{O_2}^z = \mathbf{M}_{12} + \mathbf{R}_A \times \mathbf{F}_{32} = 0 \tag{2}$$

Puesto que $\mathbf{R}_A = 6\angle 135^\circ = -4.24\hat{\mathbf{i}} + 4.24\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{F}_{32} = -\mathbf{F}_{34} = -30.6\hat{\mathbf{i}} - 12.6\hat{\mathbf{j}}$, se encuentra $\mathbf{R}_A \times \mathbf{F}_{32} = 183.2\hat{\mathbf{k}}$ lb·pulg.
Por tanto

$$\mathbf{M}_{12} = -183.2\hat{\mathbf{k}} \text{ lb} \cdot \text{pulg} \quad \textit{Resp.}$$

En el ejemplo anterior se supuso que todas las fuerzas actúan en el mismo plano. Para el eslabón de conexión 3 se supuso también que la línea de acción de las fuerzas y la línea de los centros del eslabón coincidían. Un diseñador de máquinas

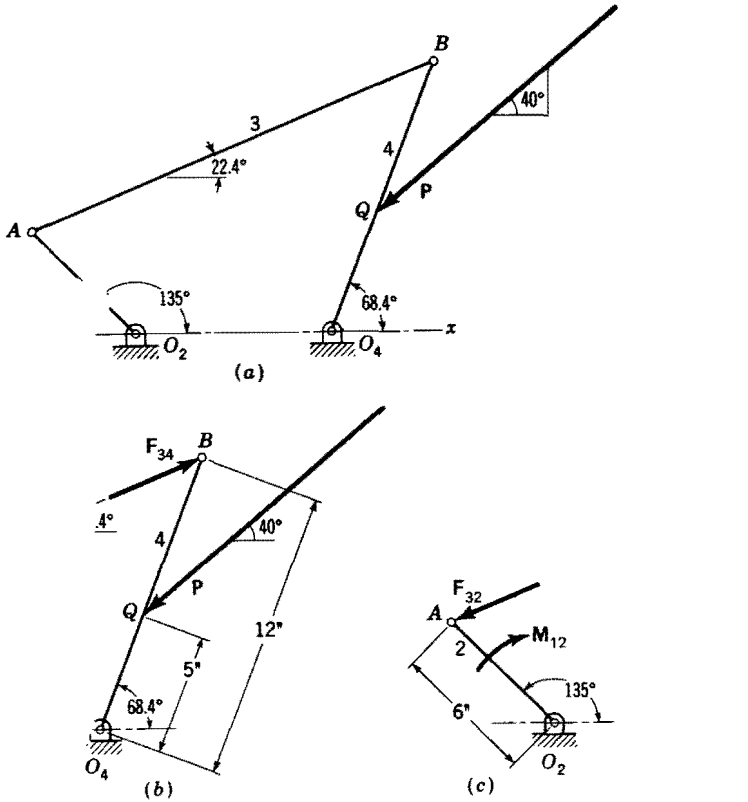


Figura 12-6

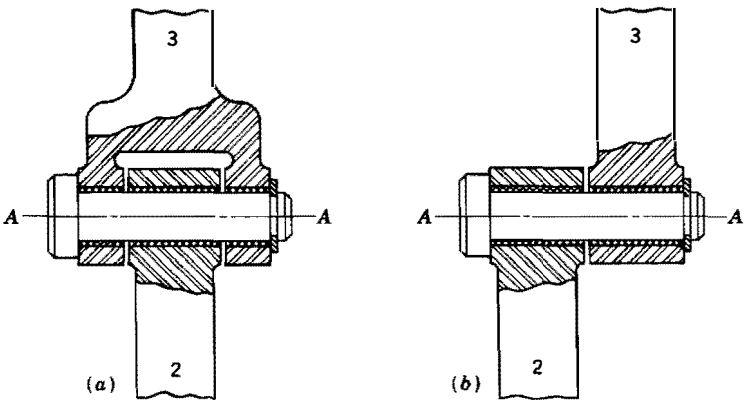


Figura 12-7. *a*) Conexión balanceada. *b*) esta conexión produce un momento de giro sobre el pasador y sobre cada eslabón.

cuidadoso tomará a veces medidas extremas para acercarse a estas condiciones tanto como sea posible. Nótese que si las conexiones de pasador se disponen como se indican en la figura 12-7*a*, estas condiciones se obtienen teóricamente. Por otro lado, si la conexión es como la de la figura 12-7*b*, el pasador mismo, al igual que cada eslabón, tendrán pares giratorios que actúan sobre ellos. Si las fuerzas no se encuentran en el mismo plano, existen pares cuyos momentos son proporcionales a la distancia entre los planos de las fuerzas.

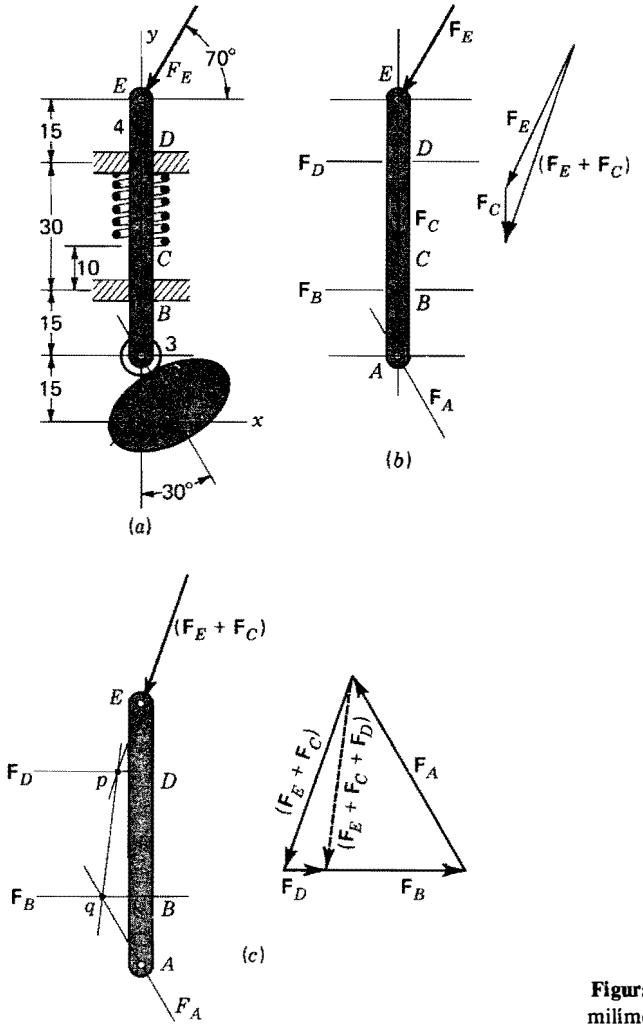


Figura 12-8 Las dimensiones están en milímetros.

12-8 ELEMENTOS DE CUATRO FUERZAS

El caso más general de un sistema de fuerzas es aquél en el que éstas no son concurrentes ni paralelas. Un sistema de esta índole se puede sustituir siempre por una sola fuerza resultante que actúa en un punto arbitrario y un par resultante. Un cuerpo sobre el que actúa un sistema general de fuerzas de este tipo se encuentra en equilibrio sólo si tanto el par resultante como la fuerza resultante son cero. La ecuación (12-9) expresa estas condiciones en forma matemática.

Ejemplo 12-2 En la figura 12-8*a* se ilustra una leva y un seguidor de movimiento alternativo. El seguidor se mantiene en contacto con la leva por medio de un resorte que empuja hacia abajo en C, con una fuerza de resorte $F_C = 12$ N para esta posición en particular. Asimismo, una carga externa $F_E = 35$ N actúa en E sobre el seguidor, en la dirección señalada. Determínese la fuerza en el pasador del seguidor en A y las reacciones en el cojinete en B y D. Supóngase que no hay fricción y que el seguidor carece de peso

SOLUCIÓN En la figura 12-8*b* se tiene un diagrama de cuerpo libre del seguidor. Las fuerzas $\mathbf{F}_C$ y $\mathbf{F}_E$ se conocen y en esta figura, se obtiene su suma $\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_C$ gráficamente. El diagrama muestra las líneas de acción de las tres incógnitas $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_D$. Por consiguiente, el problema se reduce a una fuerza conocida, la resultante $\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_C$ y las tres fuerzas de magnitudes conocidas.

En la figura 12-8*c* se muestra la resultante $\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_C$ con su punto de aplicación en E. Esto es permisible deslizando $\mathbf{F}_C$ a lo largo de su línea de acción. Si se conociera $\mathbf{F}_D$, se podría sumar a $\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_C$ para producir la resultante $\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D$, que luego actuaría pasando por el punto p.

Considérese ahora la ecuación de momentos. Si se escribe $\Sigma \mathbf{M}_q = 0$, es evidente que sólo se puede satisfacer la ecuación si la resultante $\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D$ tiene como su línea de acción a pq. Así que, ésta es la base para la solución gráfica. Como se ilustra en el polígono de fuerzas de la figura 12-8*c*, la resultante $\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D$ que actúa a lo largo de la línea pq se utiliza primero para encontrar la fuerza $\mathbf{F}_D$. El polígono se completa encontrando $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$, puesto que se conocen sus líneas de acción.

Nótese que este procedimiento define un concepto general, útil en el enfoque analítico también: cuando hay tres incógnitas, elíjase un punto como q en donde se crucen las líneas de acción de dos de las fuerzas desconocidas, y escríbase la ecuación de momentos $\Sigma \mathbf{M}_q = 0$. Esta ecuación tendrá una sola incógnita que, para este ejemplo, es $\mathbf{F}_D$ y se puede resolver directamente. Sólo entonces se debe escribir la $\Sigma \mathbf{F} = 0$, puesto que el problema se ha reducido ahora a dos incógnitas.

Una solución analítica para este problema da $F_A = 51.8$ N, $F_B = 32.8$ N, y $F_D = 5.05$ N, redondeados a tres cifras.

12-9 ANÁLISIS DE FUERZAS EN ENGRANES RECTOS Y HELICOIDALES†

En la figura 12-9*a* se muestra un piñón con centro en O_2 que gira en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj, a n_2 rpm, y que impulsa un engrane con centro en O_3, a n_3 rpm. Las reacciones entre los dientes ocurren a lo largo de la línea de presión AB. En la figura 12-9*b* se presentan los diagramas de

†Puesto que las normas para los engranes se basan por completo en las unidades de uso común en Estados Unidos, rara vez se encontrarán unidades SI para los engranes en esta obra.

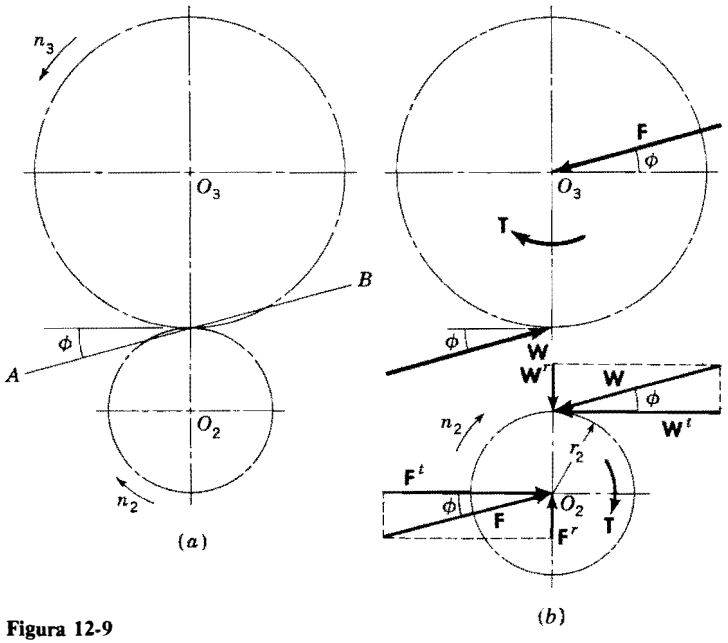


Figura 12-9

cuerpo libre del piñón y el engrane. La acción del piñón sobre el engrane se ha reemplazado por la fuerza **W** que actúa en el punto de paso, en la dirección de la línea de presión. Puesto que el engrane está sostenido por su eje, debe actuar una fuerza **F** igual y opuesta, en la línea de los centros del eje. Un análisis similar del piñón muestra que las mismas observaciones son válidas. En cada caso, las fuerzas tienen la misma magnitud y dirección opuesta, son paralelas y se encuentran en el mismo plano. Por consiguiente, constituyen un par.

Nótese que el diagrama de cuerpo libre del piñón tiene las fuerzas resueltas en sus componentes. En este caso se emplean los superíndices r y t para indicar las direcciones radial y tangencial con respecto al círculo de paso. Es más rápido usar los mismos superíndices para las componentes de la fuerza **F** que ejerce el eje sobre el engrane. El momento del par $\mathbf{W}^t$ y $\mathbf{F}^t$ es el momento de torsión que se debe aplicar para impulsar al juego de engranes. Cuando el radio de paso del piñón se designa como r_2, el momento de torsión es

$$T = r_2 W^t \tag{12-11}$$

en donde T es el momento de torsión aplicado, positivo para la dirección opuesta a la del movimiento de las manecillas del reloj y W^t es la magnitud del vector fuerza $\mathbf{W}^t$.

Se observará que la fuerza radial W^r no tiene finalidad por lo que respecta a la transmisión de potencia. Por esta razón, $\mathbf{W}^t$ se denomina con frecuencia fuerza *transmitida*.

Si se dan los caballos de potencia y la velocidad del piñón, se puede obtener la fuerza tangencial W^t a partir de la ecuación

$$W^t = \frac{(33\,000)(12)\,\text{hp}}{2\pi r_2 n_2} \tag{12-12}$$

en donde r_2 es el radio de paso en pulgadas y n_2 la velocidad en revoluciones por minuto. Así, pues, las siguientes relaciones son evidentes en la figura 12-9:

$$W^r = W^t \tan \phi \qquad W = \frac{W^t}{\cos \phi} \tag{12-13}$$

en donde ϕ es el ángulo de presión.

En el manejo de las fuerzas sobre engranes helicoidales, conviene determinar la fuerza axial, trabajar con ella independientemente y tratar el resto de las componentes de las fuerzas de la misma manera que como se hace con los engranes rectos. En la figura 12-10 se tiene el dibujo de un engrane helicoidal en el que se eliminó la mitad de la cara para mostrar las fuerzas que actúan en el punto de paso. Se supone que el engrane gira en el mismo sentido que el movimiento de las manecillas del reloj. Se ha suprimido el engrane impulsor y se ha reemplazado su efecto por las fuerzas señaladas que actúan sobre los dientes. La fuerza resultante **W** se divide en las tres componentes $\mathbf{W}^a$, $\mathbf{W}^r$, $\mathbf{W}^t$, que son respectivamente las fuerzas axial, radial y tangencial. La fuerza tangencial es la transmitida y la que es efectiva en la transmisión del momento de torsión. Cuando el ángulo de presión transversal se designa como ϕ_t y el ángulo de hélice como ψ, las siguientes relaciones resultan evidentes en la figura 12-10:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^a + \mathbf{W}^r + \mathbf{W}^t \tag{12-14}$$

$$W^a = W^t \tan \psi \tag{12-15}$$

$$W^r = W^t \tan \phi_t \tag{12-16}$$

También es oportuno utilizar la resultante de $\mathbf{W}^r$ y $\mathbf{W}^t$. Esta fuerza se designará como $\mathbf{W}^\phi$; y se define mediante la ecuación

$$\mathbf{W}^\phi = \mathbf{W}^r + \mathbf{W}^t \tag{12-17}$$

Ejemplo 12-3 Un tren de engranes se compone de tres engranes helicoidales con los centros de los ejes en línea. El impulsor es un engrane helicoidal de mano derecha que tiene un radio de paso de 2 pulg, un ángulo de presión transversal de 20° y un ángulo de hélice de 30°. Un engrane loco en el tren tiene los dientes cortados de mano izquierda y un radio de paso de 3.25 pulg. El engrane loco no transmite potencia a su eje. El engrane impulsado en el tren tiene los dientes cortados de mano derecha y un radio de paso de 2.50 pulg. Si la fuerza transmitida es de 600 lb, determínense las fuerzas en el eje que actúan sobre cada engrane.

SOLUCIÓN En primer lugar, se considerarán sólo las componentes axiales, como se sugirió previamente. Para cada endentamiento la componente axial de reacción es, según la (12-15),

$$W^a = W^t \tan \psi = 600 \tan 30° = 347 \text{ lb}$$

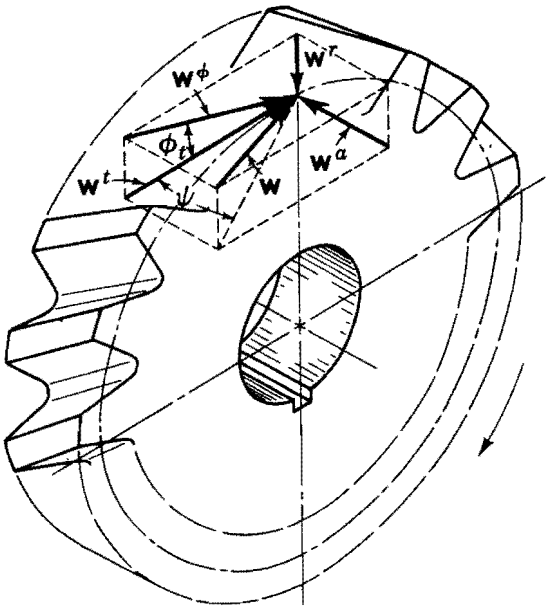


Figura 12-10

La figura 12-11*a* es una vista superior de los tres engranes, viéndolos hacia abajo sobre el plano formado por los tres ejes de rotación. Para cada engrane, se considera que la rotación se lleva a cabo en torno al eje *z*, para este problema. En la figura 12-11*b* se trazaron en perspectiva los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los tres engranes, y se muestran los tres ejes de coordenadas. Como se indica, el engrane loco ejerce una fuerza $\mathbf{W}^a_{32}$ sobre el impulsor. Ésta es resistida por la fuerza axial en el eje, $\mathbf{F}^a_{12}$. Las fuerzas $\mathbf{F}^a_{12}$ y $\mathbf{W}^a_{32}$ forman un par que es resistido por el momento $\mathbf{T}^a_{12}$. Nótese que este momento es negativo en torno al eje *y* y, en consecuencia, es un momento que tiende a voltear el eje impulsor. La magnitud de este momento es

$$T^a_{12} = W^a_{32} r_2 = (347)(2) = 694 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

Pasando después al engrane loco, se ve en las figuras 12-11*a* y *b* que la fuerza axial del eje sobre dicho engrane es cero. La componente axial del impulsor sobre el engrane loco es $\mathbf{W}^a_{23}$ y la del engrane impulsado sobre el engrane loco es $\mathbf{W}^a_{43}$. Estas dos fuerzas son iguales y forman un par, que tiende a hacer girar al eje extremo sobre extremo y es resistido por el momento $\mathbf{T}^a_{13}$ de magnitud

$$T^a_{13} = W^a_{23}(2r_3) = (347)(2)(3.25) = 2\,260 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

El engrane impulsado tiene la componente axial de fuerza $\mathbf{W}^a_{34}$, debida al engrane loco que actúa en su línea de paso, la cual es resistida por la reacción axial del eje $\mathbf{F}^a_{14}$. Como se ilustra, estas fuerzas son iguales y forman un par que tiende a voltear el eje, a lo que se opone el momento $\mathbf{T}^a_{14}$. Puesto que $W^a_{34} = 347$ lb, la magnitud de este momento, que es negativo en torno al eje *y*, es

$$T^a_{14} = W^a_{34} r_4 = (347)(2.5) = 867 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

Una vez más se hace hincapié en que los tres momentos de resistencia $\mathbf{T}^a_{12}$, $\mathbf{T}^a_{13}$, $\mathbf{T}^a_{14}$ se deben exclusivamente a las componentes axiales de las reacciones entre los dientes de los engranes. Se producen reacciones estáticas en los cojinetes y no tienen efecto alguno sobre la cantidad de potencia transmitida.

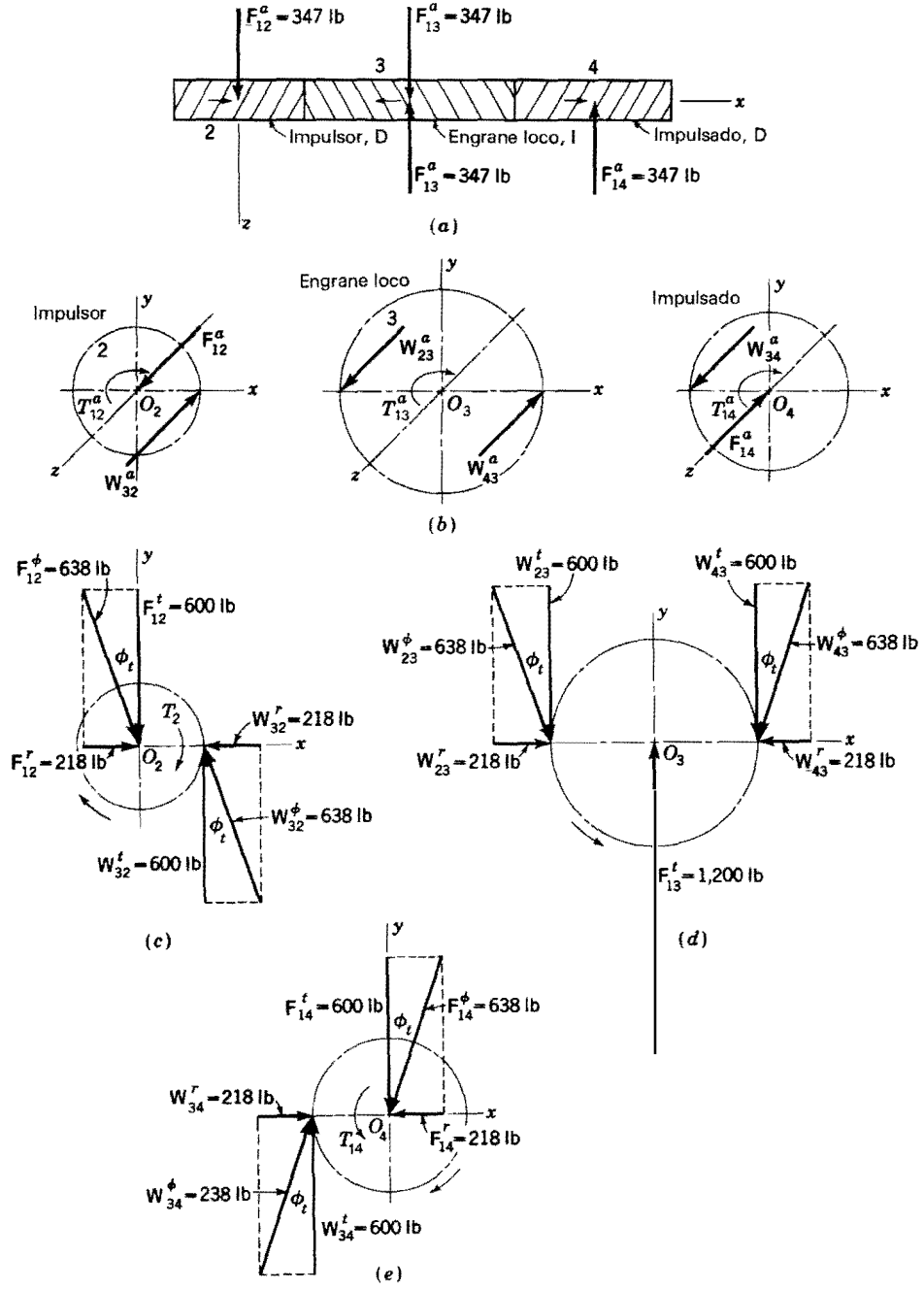


Figura 12-11. *a*) y *b*) Fuerzas axiales, *c*) impulsor, *d*) engrane loco, *e*) impulsado.

Ahora que se han hallado todas las reacciones debidas a las componentes axiales, la atención se centra en el resto de las componentes de las fuerzas y se examina su efecto como si operaran independientemente de las fuerzas axiales.

En las figuras 12-11*c*, *d* y *e* se dan los diagramas de cuerpo libre que muestran las fuerzas en el plano de rotación para los engranes impulsor, loco e impulsado, respectivamente. Se pueden obtener las fuerzas gráficamente como se indica, o aplicando las ecuaciones (12-11) y (12-12). No es necesario combinar las componentes para encontrar las fuerzas resultantes porque, en el diseño de máquinas, las fuerzas componentes son exactamente las que se desean.

Ejemplo 12-4 El tren de engranes planetario de la figura 12-12*a* tiene el eje *a* impulsado por un momento de torsión de entrada de $-100\hat{k}$ lb·pulg. Nótese que el eje *a* está conectado directamente al engrane 2 y que el brazo planetario 3 está conectado directamente al eje *b* y que está separado del eje *a*, pero con una holgura mínima. El engrane 6 está fijo en el marco estacionario 1 (que no se ilustra). Todos los engranes tienen un paso diametral de 10 dientes por pulgada y un ángulo de presión de 20°. Suponiendo que las fuerzas actúan en un solo plano y que se pueden despreciar las fuerzas centrífugas sobre los engranes planetarios, hágase un análisis com-

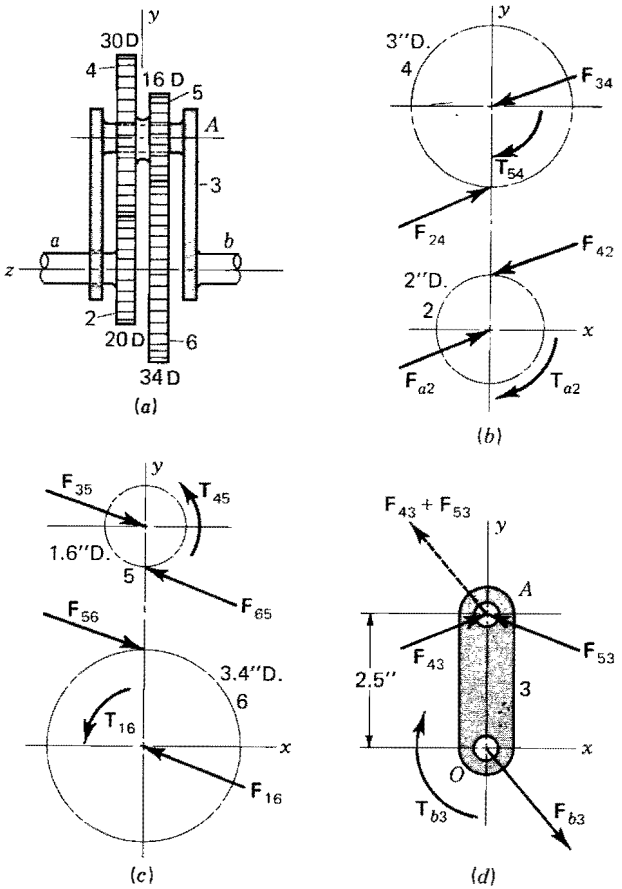


Figura 12-12

pleto de fuerzas para las piezas del tren y calcúlese la magnitud y dirección del momento de torsión de salida entregado por el eje *b*.

SOLUCIÓN Los diámetros de paso de los engranes son $d_2 = 20/10 = 2$ pulg, $d_4 = 3$ pulg, $d_5 = 1.6$ pulg y $d_6 = 3.4$ pulg. Las distancias entre los centros de los engranes endentados es $(N_5 + N_6)/2P = (16 + 34)/(2)(10) = 2.5$ pulg. Puesto que el momento de torsión que ejerce el eje *a* contra el engrane 2 es $T_{a2} = 100$ lb · pulg, la carga transmitida es $W^t = 100/1 = 100$ lb. Por consiguiente, $F_{42} = W^t/(\cos\phi) = 100/(\cos 20°) = 106$ lb. El diagrama de cuerpo libre del engrane 2 se muestra en la figura 12-12*b*. En forma vectorial, los resultados son

$$\mathbf{F}_{a2} = -\mathbf{F}_{42} = 106\angle 20° \text{ lb}$$

En la figura 12-12*b* se ilustra también el diagrama de cuerpo libre del engrane 4. Las fuerzas son

$$\mathbf{F}_{24} = -\mathbf{F}_{34} = 106\angle 20° \text{ lb}$$

en donde $\mathbf{F}_{34}$ es la fuerza del eje sobre el brazo planetario 3 que actúa contra el engrane 4. Los engranes 4 y 5 están conectados entre sí; pero giran libremente sobre el eje del brazo planetario. Por consiguiente, $\mathbf{T}_{54}$ es el momento de torsión ejercido por el engrane 5 sobre el engrane 4. Este momento de torsión es $T_{54} = W^t r_4 = 100(\frac{3}{2}) = 150$ lb · pulg.

Considerando a continuación el diagrama de cuerpo libre del engrane 5 de la figura 12-12*c*, primero se encuentra $F_{65}^t = T_{45}/r_5 = 150/0.8 = 187.5$ lb. De donde, $F_{65} = 187.5/\cos 20° = 200$ lb. En forma vectorial, los resultados correspondientes al engrane 5 se resumen como

$$\mathbf{F}_{65} = -\mathbf{F}_{35} = 200\angle 160° \text{ lb} \qquad \mathbf{T}_{45} = 150\hat{\mathbf{k}} \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

Para el engrane 6 de la figura 12-12*c*, se tiene

$$\mathbf{F}_{16} = -\mathbf{F}_{56} = 200\angle 160° \text{ lb}$$

$$\mathbf{T}_{16} = \frac{d_6}{2} F_{56} \cos\phi\, \hat{\mathbf{k}} = \frac{3.4(200)(\cos 20°)\hat{\mathbf{k}}}{2} = 319\hat{\mathbf{k}} \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

Nótese que $\mathbf{F}_{16}$ y $\mathbf{T}_{16}$ son, respectivamente, la fuerza y el momento de torsión que ejerce el marco sobre el engrane 6.

El diagrama de cuerpo libre del brazo 3 es el que aparece en la figura 12-12*d*. Como se indicó antes, se supone que las fuerzas actúan en un solo plano; de donde, se pueden sumar las dos fuerzas $\mathbf{F}_{43}$ y $\mathbf{F}_{53}$ y son

$$\mathbf{F}_{43} = -\mathbf{F}_{34} = 106\angle 20° \text{ lb} \qquad \mathbf{F}_{53} = -\mathbf{F}_{35} = 200\angle 160° \text{ lb}$$

Luego, la suma resulta ser

$$\mathbf{F}_{43} + \mathbf{F}_{53} = 137\angle 130.2° \text{ lb}$$

Ahora se encuentra que la reacción del eje es

$$\mathbf{F}_{b3} = -\mathbf{F}_{43} - \mathbf{F}_{53} = 137\angle -49.8° \text{ lb}$$

Utilizando $\mathbf{r}_{AO} = 2.5\hat{\mathbf{j}}$ y la ecuación

$$\sum \mathbf{M}_O = \mathbf{T}_{b3} + \mathbf{r}_{AO} \times (\mathbf{F}_{43} + \mathbf{F}_{53}) = 0$$

se encuentra $\mathbf{T}_{b3} = -221\hat{\mathbf{k}}$ lb · pulg. Por consiguiente, el momento de torsión del eje de salida es $\mathbf{T}_b = +221\hat{\mathbf{k}}$ lb · pulg.

12-10 ENGRANES CÓNICOS RECTOS

Al determinar las fuerzas sobre los dientes en los engranes cónicos, se acostumbra utilizar las fuerzas que ocurrirían en el punto medio del diente sobre el cono de paso. La fuerza tangencial resultante ocurre probablemente en algún punto entre el punto medio y el extremo grande del diente, pero sólo se tendrá un error pequeño al hacer esta suposición. La fuerza tangencial o transmitida está dada por

$$W^t = \frac{T}{r} \tag{12-18}$$

en donde r es el radio promedio del cono de paso, como se ilustra en la figura 12-13, y T es el momento de torsión.

En la figura 12-13 se muestran también todas las componentes de la fuerza resultante que actúa en el punto medio del diente. Por observación de la figura se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^a + \mathbf{W}^r + \mathbf{W}^t \tag{12-19}$$

$$W^r = W^t \tan \phi \cos \gamma \tag{12-20}$$

$$W^a = W^t \tan \phi \operatorname{sen} \gamma \tag{12-21}$$

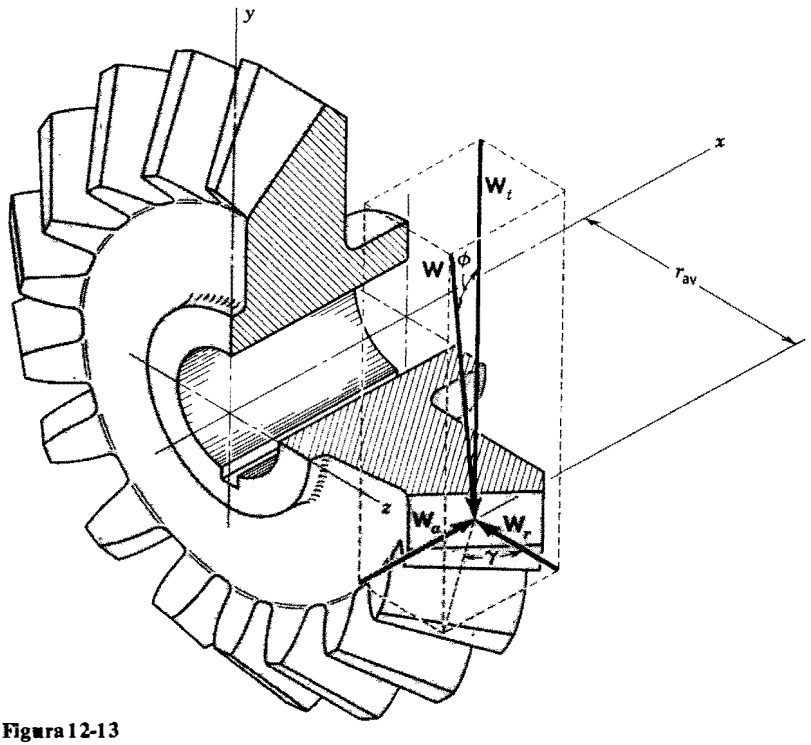


Figura 12-13

Como en el caso de los engranes helicoidales, obsérvese que la fuerza axial $\mathbf{W}^a$ conduce a un par sobre el eje que tiende a voltearlo.

Ejemplo 12-5 El piñón cónico que se ilustra en la figura 12-14 gira a 600 rpm en la dirección señalada y transmite 5 hp al engrane. Se muestran las distancias de montaje, junto con la ubicación de los cojinetes en cada eje. Los cojinetes A y C son capaces de admitir tanto cargas radiales como axiales, en tanto que los cojinetes B y D están construidos para recibir sólo cargas radiales puras. Los dientes de los engranes tienen un ángulo de presión de 20°. Encuéntrense las componentes de las fuerzas que ejercen los cojinetes sobre los ejes en las direcciones x, y y z.

SOLUCIÓN Los ángulos de paso para el piñón y el engrane son

$$\gamma = \tan^{-1}\tfrac{3}{9} = 18.4° \qquad \Gamma = \tan^{-1}\tfrac{9}{3} = 71.6°$$

Los radios hasta el punto medio de los dientes se indican en el dibujo y son $r_2 = 1.293$ pulg y $r_3 = 3.88$ pulg para el piñón y el engrane, respectivamente.

En primer lugar determinemos las fuerzas que actúan sobre el piñón. La fuerza tangencial es

$$W^t = \frac{(33\,000)(12)\,\text{hp}}{2\pi r_2 n_2} = \frac{(33\,000)(12)(5)}{2\pi(1.293)(600)} = 406\,\text{lb}$$

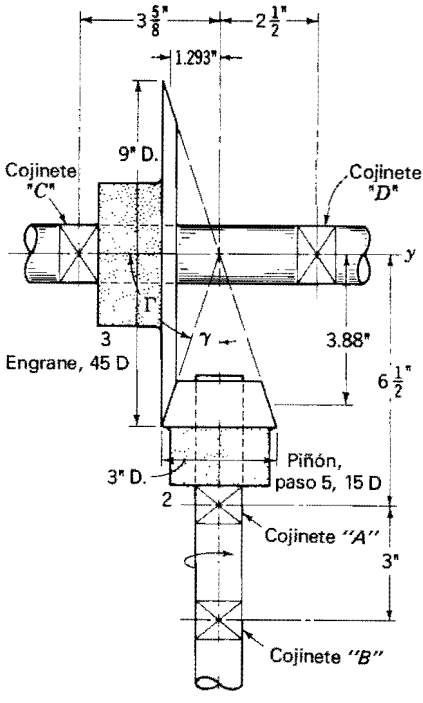


Figura 12-14

Esta fuerza actúa en la dirección z negativa. (En la figura 12-14 el eje z es positivo hacia afuera del papel, para un sistema derecho.) Las componentes radial y axial se obtienen a partir de las ecuaciones (12-20) y (12-21),

$$W^r = W^t \tan\phi \cos\gamma = 406 \tan 20° \cos 18.4° = 140 \text{ lb}$$
$$W^a = W^t \tan\phi \operatorname{sen}\gamma = 406 \tan 20° \operatorname{sen} 18.4° = 46.6 \text{ lb}$$

En este caso, W^r actúa en la dirección y positiva y W^a lo hace en la de x positiva.

Estas tres fuerzas son las componentes de la fuerza **W**. Por consiguiente,

$$\mathbf{W} = 46.6\hat{\mathbf{i}} + 140\hat{\mathbf{j}} - 406\hat{\mathbf{k}}$$

El momento de torsión aplicado al eje del piñón debe ser

$$\mathbf{T}_2 = -406(1.293)\hat{\mathbf{i}} = -525\hat{\mathbf{i}} \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

En la figura 12-15*a* se presenta esquemáticamente un diagrama de cuerpo libre del piñón y el eje. Se deben determinar las reacciones en los cojinetes $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$, las dimensiones, el momento de torsión $\mathbf{T}_2$, y la fuerza **W** son los elementos dados del problema. Para encontrar $\mathbf{F}_B$, se sumarán los momentos en torno a **A**. Esto requiere dos vectores de posición relativa, que se definen como

$$\mathbf{R}_{PA} = -2.62\hat{\mathbf{i}} - 1.293\hat{\mathbf{j}} \qquad \mathbf{R}_{BA} = 3\hat{\mathbf{i}}$$

Después de sumar los momentos en torno a A da

$$\sum \mathbf{M}_A = \mathbf{T}_2 + \mathbf{R}_{BA} \times \mathbf{F}_B + \mathbf{R}_{PA} \times \mathbf{W} = 0 \tag{1}$$

Los términos segundo y tercero para la (1) son, respectivamente,

$$\mathbf{R}_{BA} \times \mathbf{F}_B = 3\hat{\mathbf{i}} \times (F_B^y\hat{\mathbf{j}} + F_B^z\hat{\mathbf{k}}) = -3F_B^z\hat{\mathbf{j}} + 3F_B^y\hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

$$\mathbf{R}_{PA} \times \mathbf{W} = (-2.62\hat{\mathbf{i}} - 1.293\hat{\mathbf{j}}) \times (46.6\hat{\mathbf{i}} + 140\hat{\mathbf{j}} - 406\hat{\mathbf{k}})$$
$$= 525\hat{\mathbf{i}} - 1064\hat{\mathbf{j}} - 308\hat{\mathbf{k}} \tag{3}$$

Sustituyendo el valor de $\mathbf{T}_2$ y las ecuaciones (2) y (3) en (1), y resolviendo, la

$$\mathbf{F}_B = 102\hat{\mathbf{j}} - 355\hat{\mathbf{k}} \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

La magnitud de $\mathbf{F}_B$ es 370 lb.

A continuación, para determinar $\mathbf{F}_A$, se escribe

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = 0 \tag{4}$$

Cuando **W** y $\mathbf{F}_B$ se sustituyen en esta ecuación, se puede despejar $\mathbf{F}_A$, y el resultado es

$$\mathbf{F}_A = -46.6\hat{\mathbf{i}} - 242\hat{\mathbf{j}} + 761\hat{\mathbf{k}} \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

La magnitud es $F_A = 798$ lb. Los resultados aparecen ilustrados en la figura 12-15*b*. Para el eje del engrane se sigue un procedimiento similar. Los resultados se presentan en la figura 12-15*c*.

12-11 MODELOS DE LA FUERZA DE FRICCIÓN*

En años recientes se ha despertado un enorme interés por el tema de la fricción y el desgaste, y se han dedicado muchos artículos de investigación y libros de texto a este tema. El propósito que nos ocupa aquí no es analizar con profundidad la

*N. del R.T. También llamada *de rozamiento*.

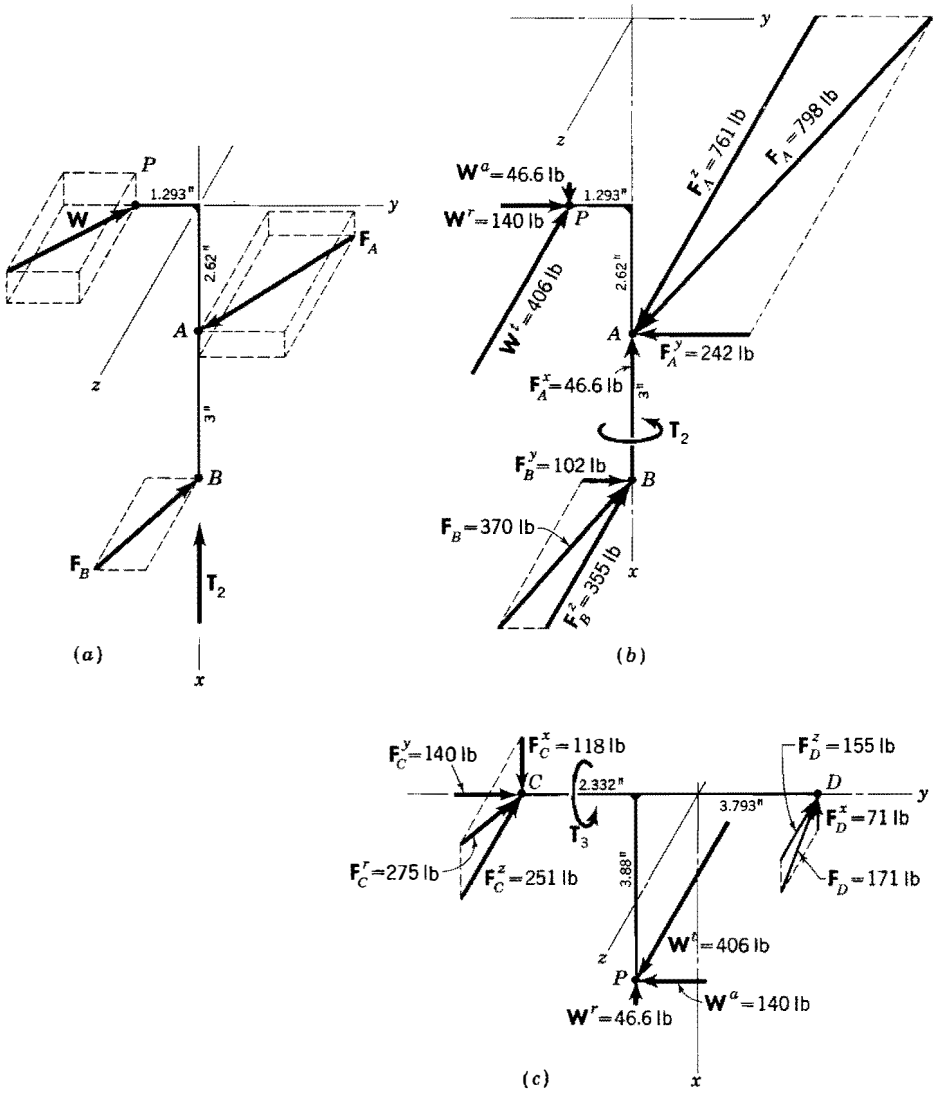


Figura 12-15

mecánica del tema en lo absoluto, sino presentar simplificaciones matemáticas muy conocidas que se pueden utilizar para analizar el comportamiento de las máquinas. Los resultados de este tipo de análisis no serán teóricamente exactos, pero corresponden muy aproximadamente al comportamiento experimental, de modo que es factible tomar decisiones seguras respecto a un diseño y sus características de operación.

Considérense dos cuerpos que se ven forzados a estar en contacto el uno con el otro, con o sin movimiento relativo entre ellos, como por ejemplo, el bloque 3 y

la superficie del eslabón 2 que aparecen en la figura 12-16*a*. El eslabón 4 ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{43}$ sobre el bloque 3, que tiende a obligarlo a deslizarse en relación con la ranura 2. Sin la presencia de la fricción dentro en la superficie entre los eslabones 2 y 3, el bloque se deslizaría en la dirección de la componente horizontal de $\mathbf{F}_{43}$ y el equilibrio no sería posible a menos que $\mathbf{F}_{43}$ fuera perpendicular a la ranura. Sin embargo, con fricción, se desarrolla una fuerza resistente $\mathbf{F}_{23}^t$ en la superficie de contacto, como se ilustra en los diagramas de cuerpo libre de la figura 12-16*b*. Es ta fuerza de fricción $\mathbf{F}_{23}^t$ actúa además de la fuerza de restricción usual $\mathbf{F}_{23}^n$ a través de la superficie de la junta deslizante, y junto con las fuerzas $\mathbf{F}_{23}^n$ y $\mathbf{F}_{23}^t$ forman una fuerza total $\mathbf{F}_{23}$ que se balancea con $\mathbf{F}_{43}$ para mantener al bloque en equilibrio. Por supuesto, las fuerzas de reacción $\mathbf{F}_{32}^n$ y $\mathbf{F}_{32}^t$, están actuando también simultáneamente sobre el eslabón 2, como se muestra en el otro diagrama de cuerpo libre de la figura 12-16*b*. La fuerza $\mathbf{F}_{23}^t$ y su reacción $\mathbf{F}_{32}^t$ se conocen como *fuerzas de fricción*.

Dependiendo de los materiales de los eslabones 2 y 3, existe un límite para la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_{23}^t$, que puede ser desarrollada por la fricción mientras se mantiene todavía el equilibrio. Este límite está dado por la relación

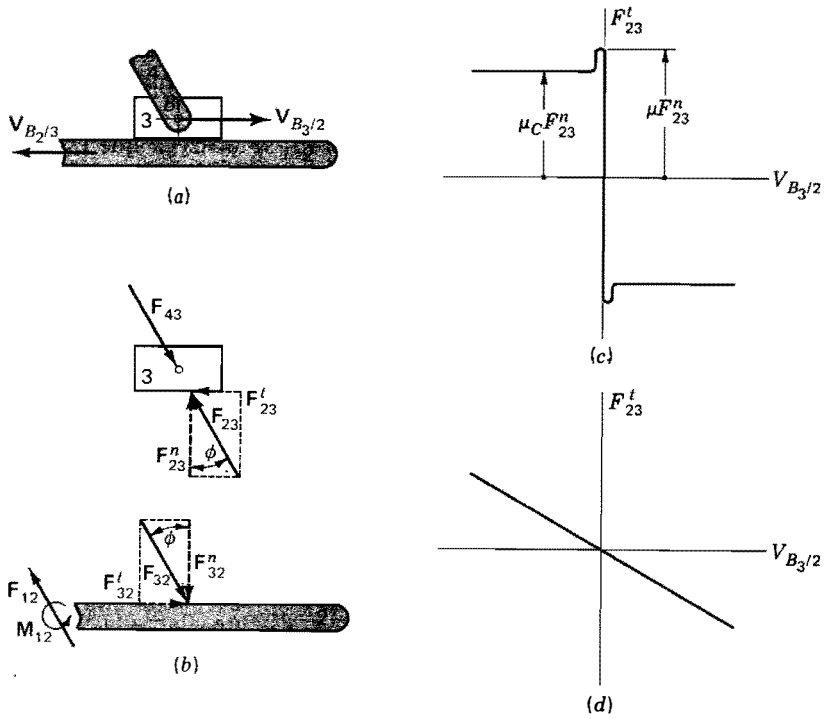


Figura 12-16. Representación matemática de las fuerzas de fricción: *a*) sistema físico; *b*) diagramas de cuerpo libre; *c*) fricción estática y de Coulomb; *d*) fricción viscosa.

$$F_{23}^t \leq \mu F_{23}^n \tag{12-22}$$

en donde μ, que se define como el *coeficiente de fricción estática,* es una propiedad característica de los materiales en contacto. Se han determinado experimentalmente valores del coeficiente μ para muchos materiales, y estos se pueden encontrar en la mayor parte de los manuales de ingeniería.†

Si la fuerza $\mathbf{F}_{43}$ se inclina demasiado, de tal manera que su componente horizontal y, por ende, $\mathbf{F}_{23}^t$ son demasiado grandes para satisfacer la ecuación (12-22), el equilibrio no es posible y el bloque se deslizará en relación con el eslabón 2, con una velocidad aparente $\mathbf{V}_{B_3/2}$. Cuando se produce el deslizamiento, la fuerza de fricción toma el valor

$$F_{23}^t = \mu_c F_{23}^n \tag{12-23}$$

en donde μ_c es el *coeficiente de fricción de deslizamiento.* La fricción de deslizamiento se denomina muy a menudo *fricción de Coulomb*, y ese término se utilizará aquí con frecuencia. También se puede hallar experimentalmente el coeficiente μ_c y es un poco menor que μ para la mayor parte de los materiales.

En la figura 12-16*c* se presenta una gráfica de la fuerza de fricción F_{23}^t contra la velocidad aparente $V_{B_3/2}$. Aquí se puede ver que cuando la velocidad de deslizamiento es cero, la fuerza de fricción $\mathbf{F}_{23}^t$ puede tener cualquier magnitud entre μF_{23}^n y $-\mu F_{23}^n$. Cuando la velocidad no es cero, la fuerza de fricción $\mathbf{F}_{23}^t$ desciende ligeramente en magnitud hasta el valor $\mu_c F_{23}^n$, y tiene una dirección que se opone al movimiento de deslizamiento, $\mathbf{V}_{B_3/2}$.

Se se examina la fuerza total $\mathbf{F}_{23}$ en la figura 12-16*b*, se observa que está inclinada formando un ángulo ϕ para ser igual y opuesta a $\mathbf{F}_{43}$, siempre que el sistema esté en equilibrio. Cuando $\mathbf{F}_{43}$ está inclinada de tal modo que el bloque está justo a punto de deslizarse, el ángulo ϕ está dado por

$$\tan \phi = \frac{F_{23}^t}{F_{23}^n} = \mu \frac{F_{23}^n}{F_{23}^n} = \mu$$

o bien,

$$\phi = \tan^{-1} \mu \tag{12-24}$$

En ángulo ϕ, conocido como *ángulo de fricción,* define el ángulo máximo hasta el cual se puede inclinar $\mathbf{F}_{23}$ en relación con la normal a la superficie, antes de que se pierda el equilibrio y ocurra el deslizamiento. Nótese que ϕ no depende de la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_{23}$, sino sólo del coeficiente de fricción para los materiales.

Aunque las fuerzas de resistencia en una máquina pueden ser predominantemente fricción de Coulomb, a veces es más conveniente analizar el comportamiento de la máquina empleando otra clase de fuerza resistente, llamada *fricción viscosa* o *amortiguamiento viscoso.* La situación es prácticamente la misma por lo

†Véase, por ejemplo, D.B. Dallas (ed.), *Tool and Manufacturing Engineers Handbook,* 3d ed., McGraw-Hill, New York, 1976, pp. 41-12.

que respecta a los diagramas de cuerpo libre de la figura 12-16*b*. No obstante, en el caso de fricción viscosa, se supone que la fuerza de fricción $\mathbf{F}'_{23}$ está dada por

$$\mathbf{F}'_{23} = -c\mathbf{V}_{B_3/2} \tag{12-25}$$

en donde c es el *coeficiente de amortiguamiento viscoso,* llamado en ocasiones *factor de amortiguamiento o constante de amortiguamiento viscoso.* Como se ve en la gráfica de la figura 12-16*d*, esta fuerza de fricción tiene una relación lineal con la velocidad. Esto es particularmente útil cuando el análisis de la respuesta dinámica de una máquina o un sistema conduce a una o más ecuaciones diferenciales. La relación no lineal de la fricción de Coulomb, que se muestra en la figura 12-16*c*, lleva a una ecuación diferencial no lineal que es más difícil de manejar.

Ya sea que el efecto de fricción provenga de una fricción viscosa, de Coulomb o estática, es importante reconocer el sentido de la fuerza de fricción. Como recurso nemoténico, la regla se expresa a menudo como sigue: "la fuerza de fricción se opone al movimiento", como lo muestra el diagrama de cuerpo libre del eslabón 3, figura 12-16*b*, en donde el sentido de $\mathbf{F}'_{23}$ es opuesto al de $\mathbf{V}_{B_3/2}$. Esta regla práctica no es errónea si se aplica con cuidado; pero puede ser peligrosa. Se observará en la figura 12-16*a* que hay *dos* movimientos que se podrían considerar, $\mathbf{V}_{B_3/2}$ y $\mathbf{V}_{B_2/3}$; se tienen también dos fuerzas de fricción $\mathbf{F}_{23}$ y $\mathbf{F}'_{32}$. Si se examina con cuidado la figura 12-16*b*, se verá que $\mathbf{F}'_{23}$ se opone al sentido de $\mathbf{V}_{B_3/2}$, mientras que $\mathbf{F}'_{32}$ se opone al sentido de $\mathbf{V}_{B_2/3}$. En sistemas de máquinas, en donde, con frecuencia, los dos lados de una junta deslizante están en movimiento, es importante comprender cuál fuerza de fricción se opone a cuál movimiento.

12-12 ANÁLISIS DE FUERZAS ESTÁTICAS CON FRICCIÓN

A continuación se mostrará el efecto de incluir la fricción en los métodos antes vistos de análisis de fuerzas estáticas, presentando un ejemplo.

Ejemplo 12-6 Repítase el análisis de fuerzas estáticas del sistema de leva y seguidor que se analizó en el ejemplo 12-2, figura 12-8, suponiendo que se tiene un coeficiente de fricción estática de 0.15 entre los eslabones 1 y 4, en los dos cojinetes de deslizamientos B y D. La fricción en todas las demás articulaciones se considera despreciable. Determínese la fuerza mínima necesaria en A para mantener el sistema en equilibrio.

SOLUCIÓN Como siempre que se inicia un análisis de fuerzas con fricción, es necesario resolver primero todo el problema sin fricción. El propósito es hallar la dirección de cada fuerza normal, en este caso $\mathbf{F}_B^n$ y $\mathbf{F}_D^n$. Esto se hizo en el ejemplo 12-2, en donde se encontró que tanto $\mathbf{F}_B$ como $\mathbf{F}_D$ actúan hacia la derecha en la figura 12-8*c*.

El siguiente paso en la solución es examinar con cuidado el enunciado del problema y determinar la dirección del movimiento inminente. Como se expresa, el problema pide la fuerza mínima en A para mantener el equilibrio; es decir, si $\mathbf{F}_A$ fuera de cualquier magnitud menor, el sistema se movería hacia abajo. Por consiguiente, el movimiento inminente es hacia abajo con las velocidades $\mathbf{V}_{D_4/1}$ y $\mathbf{V}_{B_4/1}$, por ende, las dos fuerzas de fricción en B y D deben actuar hacia arriba sobre el eslabón 4. Nótese que si el enunciado del problema hubiera pedido la fuerza máxima en

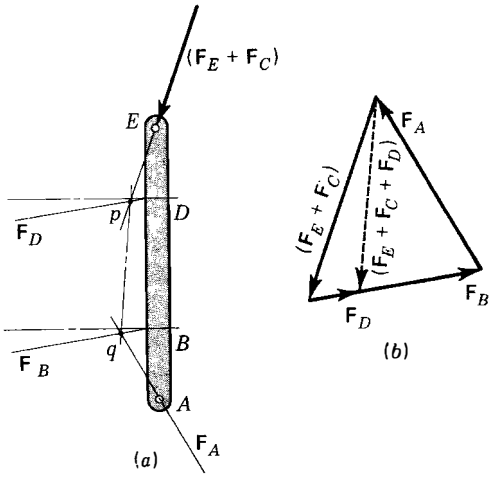


Figura 12-17. Ejemplo 12-6.

A, el movimiento inminente del eslabón 4 sería hacia arriba y las fuerzas de fricción, hacia abajo sobre el eslabón 4.

A continuación se vuelve a dibujar el diagrama de cuerpo libre del eslabón 4, figura 12-8*c*, y se incluyen las fuerzas de fricción, como se indica en la figura 12-17*a*. En este caso, debido a la fricción estática, las líneas de acción de $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_D$ se muestran inclinadas formando el ángulo ϕ, que se puede calcular aplicando la (12-24)

$$\phi = \tan^{-1} 0.15 = 8.5° \tag{1}$$

Al decidir la dirección de inclinación de los ángulos ϕ, fue necesario conocer tanto la dirección de las fuerzas de fricción (hacia arriba) como la de las fuerzas normales (hacia la derecha) en *B* y *D*. Esto explica por qué se debe realizar primero la resolución sin fricción.

Ahora que se conocen las nuevas líneas de acción de las fuerzas $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_D$, se puede desarrollar la solución exactamente como se hizo en el ejemplo 12-2. En la figura 12-17*b* se tiene la solución gráfica con fricción, en donde se encuentra que

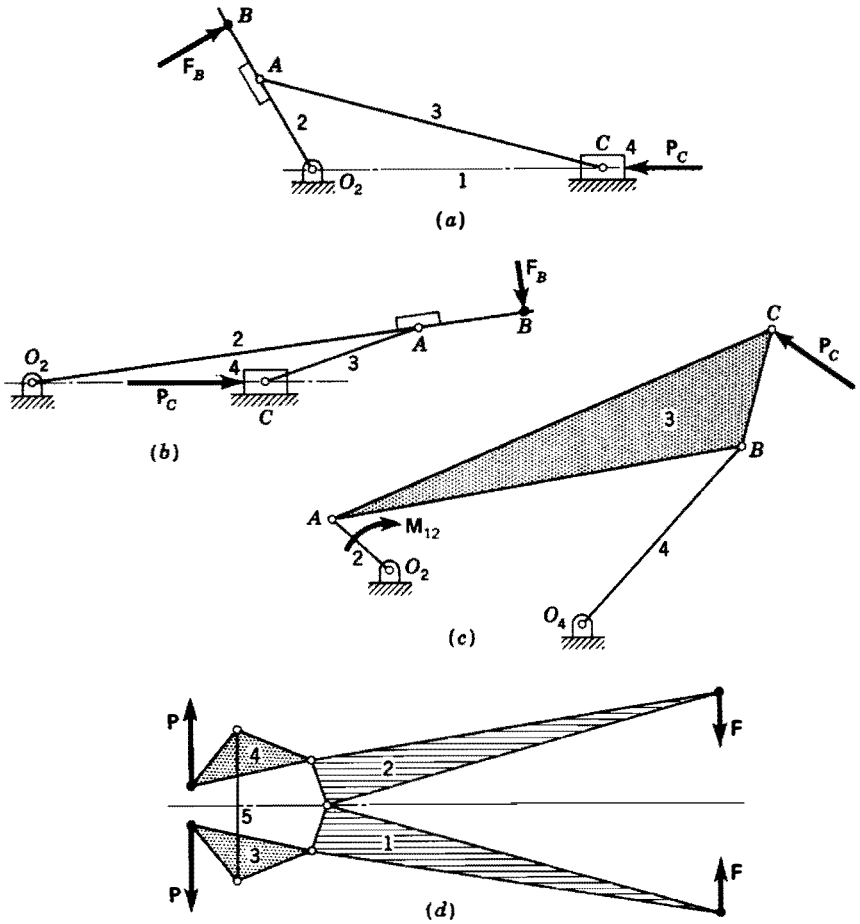
$$F_A = 45.8 \text{ N} \quad \textit{Resp.} \quad F_B = 28.7 \text{ N} \quad \text{y} \quad F_D = 6.57 \text{ N}$$

Nótese que las componentes normales de las dos fuerzas en *B* y *D* son ahora $F'_B = 28.4$ y $F'_B = 6.50$, y son diferentes de los valores que se tienen sin fricción. Por ende, ya sea que se esté resolviendo un problema de fuerzas de fricción gráfica o analíticamente, es incorrecto limitarse a multiplicar las fuerzas normales sin fricción por el coeficiente de fricción, para determinar las fuerzas de fricción. Todas las fuerzas pueden cambiar en magnitud cuando se incluye la fricción, y el problema se debe resolver por completo desde el principio, incluyendo este nuevo factor. El efecto de la fricción *no se puede* agregar por superposición en una etapa posterior.

PROBLEMAS †

12-1 En la figura se muestran cuatro mecanismos y las fuerzas o momentos de torsión externos ejercidos sobre los mecanismos o por éstos. Hágase un esquema del diagrama de cuerpo libre de cada pieza de cada mecanismo, incluyendo el marco. No se intente mostrar las magnitudes de las fuerzas, excepto en forma aproximada, pero trácense en las direcciones apropiadas.

† A menos que se indique lo contrario, resuélvanse todos los problemas sin fricción.



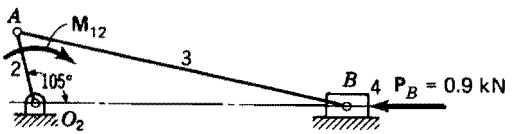
Problema 12-1

12-2 ¿Qué momento $\mathbf{M}_{12}$ se debe aplicar a la manivela del mecanismo de la figura, si $P_B = 900$ N?

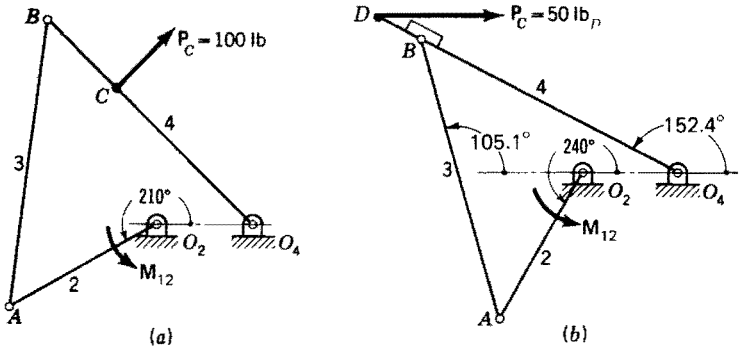
12-3 Si $M_{12} = 100\,\mathbf{N} \cdot \mathrm{m}$ para el mecanismo ilustrado, ¿qué fuerza P_B es necesaria para mantener el equilibrio estático?

12-4 (*a*) Encuéntrense las reacciones del marco y el momento de torsión $\mathbf{M}_{12}$ necesarios para mantener el equilibrio del eslabonamiento de cuatro barras que se ve en la figura.

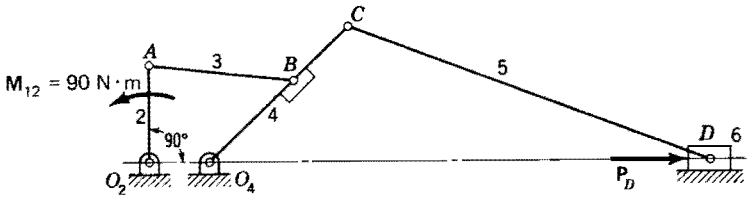
(*b*) ¿Qué momento de torsión se debe aplicar al eslabón 2 del mecanismo ilustrado con el fin de mantener el equilibrio estático? Trácense diagramas completos de cuerpo libre de los eslabones 1 y 4.



Problemas 12-2 y 12-3 $O_2A = 75$ mm; $AB = 350$ mm.



Problema 12-4 *a*) y *b*) O_2A = 3.5 pulg; $AB = O_4B$ = 6 pulg; O_4C = 4 pulg; O_4D = 7 pulg; O_2O_4 = 2 pulg.



Problema 12-5 O_2A = 100 mm; AB = 150 mm; O_4B = 125 mm; O_4C = 200 mm; CD = 400 mm; O_2O_4 = 60 mm.

12-5 ¿Qué fuerza P es necesaria para el equilibrio del eslabonamiento que se muestra? Hágase el esquema de un diagrama completo de cuerpo libre de cada eslabón.

12-6 (*a*) Determínese el momento de torsión $\mathbf{M}_{12}$ que se requiere para impulsar la corredera 6 de la figura, contra una carga P = 100 lb, para un ángulo de la manivela de $\theta = 30°$, o según el que indique el profesor.

(*b*) ¿Qué momento de torsión $\mathbf{M}_{12}$ se debe aplicar al eslabón 2 del eslabonamiento de cuatro barras ilustrado para conservar el equilibrio estático? Háganse esquemas de los diagramas de cuerpo libre de los eslabones 1 y 3, y hállense las fuerzas que actúan.

12-7 Encuéntrense la magnitud y la dirección del momento que se debe aplicar al eslabón 2 para impulsar el eslabonamiento contra las fuerzas indicadas. Hágase el esquema de un diagrama de cuerpo libre de cada eslabón y muéstrense todas las fuerzas que actúan.

12-8 En la figura se muestra un eslabonamiento de cuatro barras con las fuerzas externas aplicadas en los puntos B y C. Hállese el par que es preciso aplicar al eslabón 2 con el fin de mantener el equilibrio. Trácese un diagrama de cuerpo libre de cada eslabón, incluyendo el marco, y muéstrense todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de ellos.

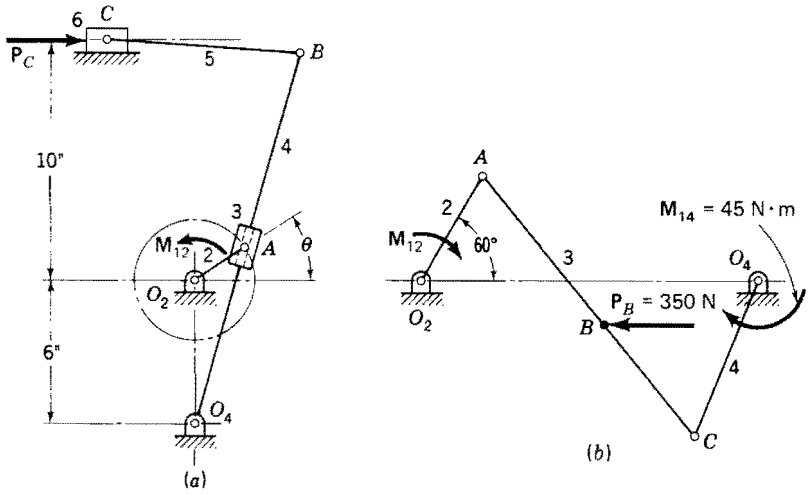
12-9 Trácese un diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos del mecanismo que se ve en la figura y encuéntrense la magnitud y dirección de todas las fuerzas y todos los momentos. Calcúlense la magnitud y dirección del par que es preciso aplicar al eslabón 2 para conservar el equilibrio estático.

12-10 Determínense la magnitud y dirección de las fuerzas que se deben aplicar al eslabón 2 para mantener el equilibrio estático.

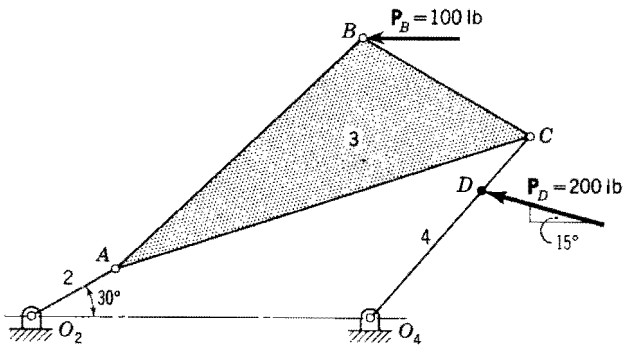
12-11 En cada caso ilustrado, el piñón 2 es el impulsor, el engrane 3 es loco, los engranes tienen pasos diametrales de 6 y ángulos de presión de 20°. Para cada caso hágase el esquema de un diagrama de cuerpo libre del engrane 3 y muéstrense todas las fuerzas que actúan.

a) El piñón 2 gira a 600 rpm y transmite 18 hp al juego de engranes.

b) y *c*) El piñón 2 gira a 900 rpm y transmite 25 hp al juego de engranes.

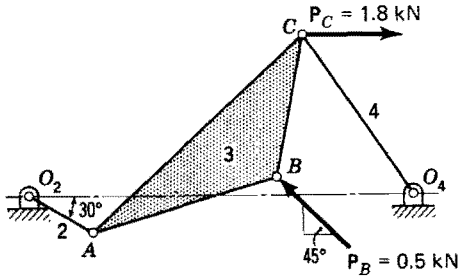


Problema 12-6 *a*) O_2A = 2.5 pulg; O_4B = 16 pulg; BC = 8 pulg. *b*) O_2A = 250 mm; AB = 400 mm; AC = O_2O_4 = 700 mm; O_4C = 350 mm.

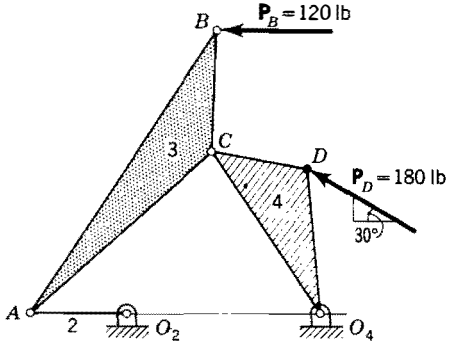


Problema 12-7 O_2A = 4 pulg; AB = 14 pulg; AC = 18 pulg; BC = 8 pulg; O_4D = 7 pulg; O_4C = 10 pulg; O_2O_4 = 14 pulg.

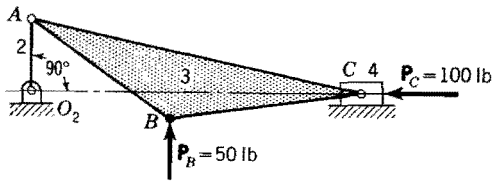
12-12 Un piñón recto de 15 dientes tiene un paso diametral de 5 y un ángulo de presión de 20°, gira a 600 rpm e impulsa a un engrane de 60 dientes. Se transmiten 25 hp. Trácese un diagrama de cuerpo libre de cada engrane, mostrando en él las componentes tangencial y radial de las fuerzas, así como sus direcciones apropiadas.



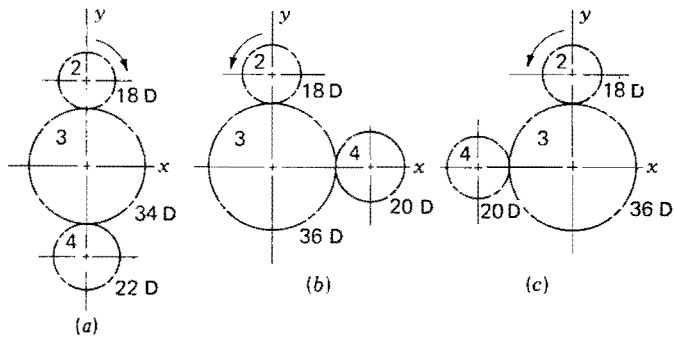
Problema 12-8 O_2A = 75 mm; AB = O_4C = 200 mm; AC = 300 mm; BC = 150 mm; O_2O_4 = 400 mm.



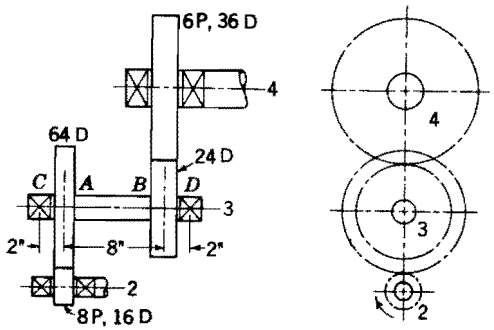
Problema 12-9 O_2A = 4 pulg; AB = 14 pulg; AC = 10 pulg; BC = 5 pulg; O_4C = O_2O_4 = 8 pulg; CD = 4 pulg; O_4D = 6 pulg.



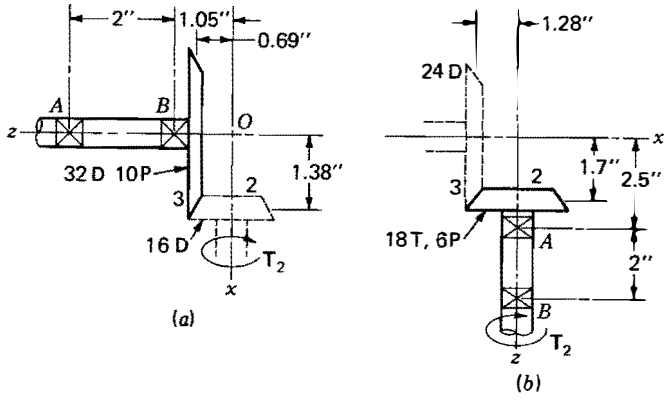
Problema 12-10 O_2A = 3 pulg; AB = 7 pulg; AC = 14 pulg; BC = 8 pulg.



Problema 12-11



Problem 12-13



Problema 12-16

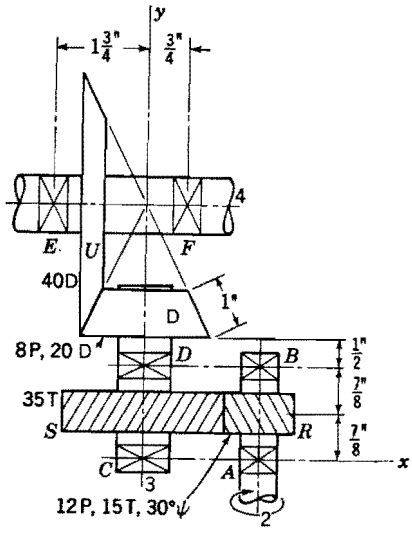
12-13 El piñón de 16 dientes montado en el eje 2 gira a 1 720 rpm y transmite 5 hp al tren de engranes de doble reducción. Todos los engranes tienen un ángulo de presión de 20°. En la figura se dan las distancias entre los centros de los cojinetes y los engranes para el eje 3. Encuéntrense la magnitud y dirección de la fuerza radial que cada cojinete ejerce contra este eje.

12-14 Resuélvase el problema 12-11 suponiendo que cada piñón tiene dientes helicoidales de mano derecha con un ángulo de hélice de 30° y un ángulo de presión normal de 20°. Por supuesto, todos los engranes en el tren son helicoidales y el paso diametral normal es de 6 dientes por pulgada, en cada caso.

12-15 Analícese el eje de engrane del ejemplo 12-5 y calcúlense las reacciones en los cojinetes $\mathbf{F}_C$ y $\mathbf{F}_D$.

12-16 En cada una de las transmisiones de engranes cónicos ilustradas en la figura, el cojinete A soporta tanto una carga de empuje como una carga radial, mientras que B sólo admite una componente radial pura. Calcúlense estas cargas sobre los cojinetes. Los dientes están cortados con un ángulo de presión de 20°.

(*a*) $\mathbf{T}_2 = -180\hat{\mathbf{i}}$ lb · pulg.
(*b*) $\mathbf{T}_2 = -240\hat{\mathbf{k}}$ lb · pulg.

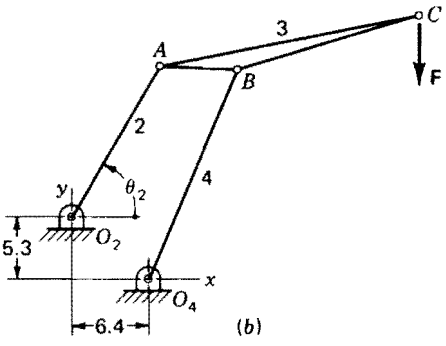


Problema 12-17

12-17 En la figura se muestra un tren de engranes compuesto de un par de engranes helicoidales y un par de engranes cónicos rectos. El eje 4 es la salida del tren y entrega 6 hp a la carga a una velocidad de 370 rpm. Los engranes cónicos tienen un ángulo de presión de 20°. Si el cojinete E debe soportar tanto una carga de empuje como radial, mientras que el cojinete F sólo admite una carga radial, determínese la fuerza que estos cojinetes ejercen contra el eje 4.

12-18 Con los datos del problema 12-17, calcúlense las fuerzas ejercidas por los cojinetes C y D sobre el eje 3. ¿Cuál de estos cojinetes debe absorber la carga de empuje si el eje se va a cargar en compresión? Los engranes helicoidales tienen un ángulo de presión transversal de 20°.

12-19 La fotografía muestra la nueva grúa flotante Figee que tiene una configuración de lemniscata en la pluma. También se muestra un diagrama esquemático de la grúa. La capacidad de levantamiento es de 16 t (1 t = 1 tonelada métrica = 1 000 kg) incluyendo el cucharón; el contenido de las tenazas es alrededor de 10 t. El alcance máximo es de 30 m que corresponde a $\theta_2 = 49°$. El alcance mínimo es de 10.5 m con $\theta_2 = 132°$. En el pie de la figura se dan otras dimensiones. Para la posición de alcance máximo y una carga en el cucharón de 10 t, calcúlense las reacciones en los cojinetes en A, B, O_2, y O_4 así como el momento M_{12} requerido. Nótese que la fotografía muestra un contrapeso en el eslabón 2. Hágase caso omiso de este peso así como del peso de los elementos.



Problema 12-19 (*cont.*)

12-20 Repítase el problema 12-19 para la posición de alcance mínimo.

12-21 Repítase el problema 12-6*a* suponiendo los coeficientes de fricción de Coulomb $\mu_c = 0.20$ entre los eslabones 1 y 6, y $\mu_c = 0.10$ entre los eslabones 3 y 4. Determínese el momento de torsión $\mathbf{M}_{12}$ necesario para impulsar el sistema, incluyendo la fricción contra la carga P.

12-22 Repítase el problema 12-10 suponiendo un coeficiente de fricción estática $\mu = 0.15$ entre los eslabones 1 y 4. Determínese el momento de torsión $\mathbf{M}_{12}$ necesario para vencer la fricción.

(*a*)

Problema 12-19 *a*) Grúa flotante Figee con configuración de lemniscata en la pluma; *b*) diagrama esmático (véase la página 446). Las dimensiones en metros son $O_2A = 14.7$, $O_4B = 19.3$, $AB = 6.5$, $AC = 22.3$, $BC = 16$. (La fotografía y los detalles acerca de las dimensiones se publican con autorización de *B. V. Machinefabriek Figee, Haarlem, Holanda.*)

CAPÍTULO

TRECE

FUERZAS DINÁMICAS

13-1 ANÀLISIS DE FUERZAS EN CUERPOS RÍGIDOS Y ELÀSTICOS

Cuando un badajo golpea una campana, ésta suena. Las características del tañido, tales como la frecuencia, la sonoridad, la duración y el tono dependen de la geometría de la campana y el material con que se fabricó. Cuando se fabrican con un material inelástico, como el plomo o la masilla, no sonarán; por consiguiente, las campanas se hacen con materiales muy elásticos, como el vidrio o el acero duro. El análisis del tañido de una campana y otros sistemas vibrantes se conoce con el nombre de *análisis de los cuerpos elásticos*. Se aplica este análisis cuando se desean conocer aspectos tales como la deflexión, deformación, extensión, o bien los movimientos de diversas partículas del cuerpo.

Por el contrario se emplea el *análisis de los cuerpos rígidos* cuando se tiene interés en el movimiento global de un cuerpo. Se supone que todo el cuerpo es absolutamente rígido e incapaz de deformarse de alguna manera. El estudio de este capítulo se refiere únicamente al análisis de los cuerpos rígidos.

13-2 CENTROIDES Y CENTRO DE MASA

Al resolver problemas de ingeniería, se encuentra con frecuencia que las fuerzas se distribuyen de alguna manera sobre una línea, un área o un volumen. Por lo común, no es muy difícil encontrar la resultante de estas fuerzas distribuidas. Para tener el mismo efecto, esta resultante debe actuar en el *centroide* del sistema; de donde, *el centroide de un sistema es un punto en el que se puede considerar que un sistema de fuerzas distribuidas está concentrado, con el mismo efecto exactamente.*

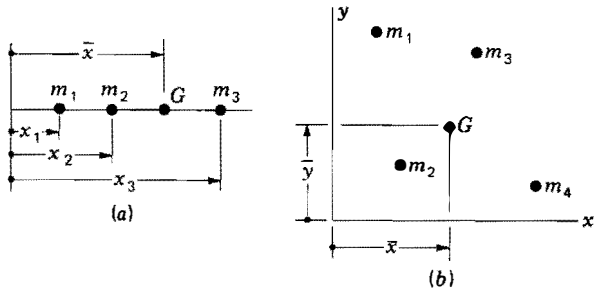


Figura 13-1 *a*) Masas concentradas sobre una recta, *b*) masas concentradas en un plano.

En lugar de un sistema de fuerzas distribuidas, se puede tener una masa distribuida. En este caso, el término *centro de masa* se refiere al *punto en el que se puede considerar que está concentrada la masa, de tal modo que se obtenga el mismo efecto.*

En la figura 13-1*a* una serie de masas concentradas están localizadas sobre una recta. El centro de masa G o centroide está ubicado en

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=N} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{13-1}$$

En la figura 13-1*b*, las masas se localizan sobre un plano. Se puede obtener la coordenada x del centro de masa G a partir de la ecuación 13-1. La coordenada y se escribe como

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=N} m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \tag{13-2}$$

Este procedimiento puede extenderse hacia masas concentradas en un volumen, escribiendo sencillamente una ecuación como la (13-1) para el eje z.

Cuando la masa está distribuida en un plano, a menudo se puede encontrar el centro de masa por simetría. En la figura 13-2 se muestra la ubicación para un

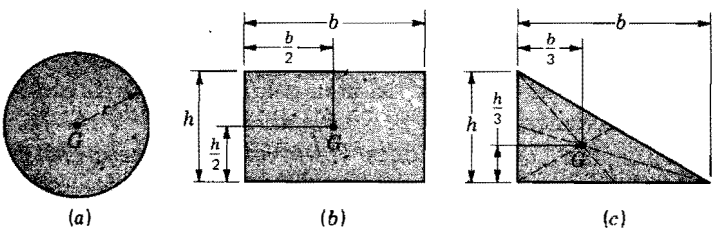


Figura 13-2

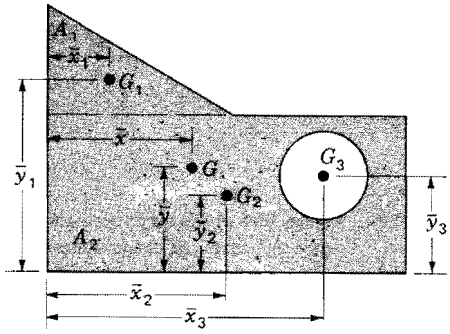


Figura 13-3 Forma compuesta.

círculo, un rectángulo y un triángulo. Nótese que la intersección de las medianas ubican a G para el triángulo.

El área plana de la figura 13-3 tiene una forma compuesta constituida por un área rectangular más un área triangular menos un área circular. Se puede hallar la ubicación de los centroides de las partes G_1, G_2 y G_3 con la ayuda de la figura 13-2. Entonces se localiza el centro de masa G del área compuesta aplicando la ecuación

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} A_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=N} A_i} = \frac{A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 - A_3\bar{x}_3}{A_1 + A_2 - A_3} \tag{13-3}$$

en donde la expresión correspondiente para $\bar{y}$ es similar.

Se puede obtener un conjunto más general de relaciones para la localización de un centroide en un plano, utilizandó la integración en lugar de la suma. Así, pues, las relaciones se convierten en

$$\bar{x} = \frac{\int x'\,dA}{\int dA} = \frac{1}{A}\int x'\,dA$$
$$\bar{y} = \frac{\int y'\,dA}{\int dA} = \frac{1}{A}\int y'\,dA \tag{13-4}$$

en donde x' y y' son las distancias al centroide del área dA, medidas en dirección paralela a los ejes x y y, respectivamente.

Para cuerpos tridimensionales, las ecuaciones (13-4) se pueden escribir en términos de masas en lugar de áreas; en tal caso, las ecuaciones quedan

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int x'\,dm \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int y'\,dm \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\int z'\,dm \tag{13-5}$$

13-3 MOMENTO DE INERCIA

Otro problema que se presenta a menudo cuando las fuerzas están distribuidas sobre un área, es el que consiste en calcular su momento en torno a un eje especificado. En ocasiones, la intensidad de la fuerza varía de acuerdo con su distancia al eje del momento. Un análisis matemático de este tipo de problema siempre conduce a una integral de la forma $\int$ (distancia)^2 $\times$ área diferencial. Esta integral se conoce con el nombre de *momento de inercia del área*. Algunas autoridades en la materia prefieren denominar a esta integral *segundo momento del área*, afirmando que un área no puede poseer inercia y, por ende, el término "momento de inercia" para una integral de esta naturaleza es un error. Sin embargo, el término se utiliza con amplitud y es preciso aprender a vivir con él.

Las fórmulas para los segundos momentos de área en torno a los ejes x y y son, respectivamente,

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad \text{y} \qquad I_y = \int x^2\, dA \tag{13-6}$$

En este caso, I_y e I_x reciben el nombre de *momentos rectangulares de inercia*; y la integral

$$J_z = \int r^2\, dA \tag{13-7}$$

se conoce como *momento polar de inercia del área*. Una relación entre las ecuaciones (13-6) y (13-7) es

$$J_z = I_x + I_y \tag{13-8}$$

En ocasiones, el momento de inercia se expresa en la forma

$$I = k^2 A \tag{13-9}$$

en donde, por supuesto,

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{13-10}$$

Aquí, k se conoce como *radio de giro*; es una medida cuantitativa de la distribución del área respecto a los ejes del momento.

Se han resuelto las ecuaciones (13-6) a (13-10) para las formas más comunes, y en la tabla 4 del apéndice se dan los resultados. Para obtener un momento de inercia a cualquier distancia especificada d al eje centroidal, úsense las *fórmulas de transferencia:*

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2 \qquad I_y = \bar{I}_y + Ad_y^2 \qquad J_z = \bar{J}_z + Ad^2 \tag{13-11}$$

El momento de inercia de un volumen es un momento de inercia verdadero porque un volumen tiene masa. Sin embargo, para distinguirlo del correspondiente a un área se denomina muy a menudo *momento de inercia de masa*. En el caso de un volumen, las integrales de inercia son

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm \qquad I_y = \int (x^2 + z^2)\, dm \qquad I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm \tag{13-12}$$

Otro conjunto de integrales que pueden aparecer también en los análisis matemáticos son los llamados *productos de inercia*:

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \tag{13-13}$$

Las ecuaciones (13-13) son útiles porque, cuando estas integrales se hacen cero, definen los tres ejes coordenados de un cuerpo llamados *ejes principales*. Entonces los valores correspondientes de las ecuaciones (13-12) reciben el nombre de *momentos principales de inercia de masa.* La tabla 5 del apéndice se ha obtenido resolviendo las ecuaciones (13-12) para una diversidad de sólidos geométricos. Todos estos momentos de inercia se dan en torno a los ejes principales y, por ende, los productos de inercia se anulan.

La forma general de la fórmula de *transferencia,* o del *eje paralelo* para el momento de inercia de masa se escribe

$$I = I_G + md^2 \tag{13-14}$$

en donde I_G es el momento principal de inercia e I es el momento de inercia en torno a un eje paralelo que está a una distancia d del eje original. La ecuación (13-14) sólo debe usarse cuando se trasladan los ejes de inercia. La rotación de estos ejes conduce a la introducción de términos de producto.

También se usa el término *radio de giro* con el momento de inercia de masa; las relaciones son

$$I_G = k^2 m \qquad k = \sqrt{\frac{I_G}{m}} \tag{13-15}$$

Ejemplo 13-1 En la figura 13-4 se muestra un prisma de acero soldado a una varilla delgada para formar un péndulo. Suponiendo que la varilla carece de peso, calcúlese el momento de inercia del péndulo en torno a *O*. Úsese $\rho = 7.80$ Mg/m^3 como la densidad de masa del acero.

SOLUCIÓN La masa del prisma se calcula como sigue:

$$m = abc\rho = 75(100)(12)(7.8)\frac{1\,000 \text{ kg/Mg}}{(1\,000 \text{ mm/m})^3} = 0.702 \text{ kg}$$

Entonces, según la tabla 5 del apéndice, se encuentra que el momento de inercia de masa del prisma en torno a su propio centro de masa es

$$I_G = \frac{m}{12}(a^2 + c^2) = \frac{0.702}{12}[(75)^2 + (100)^2] = 914 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

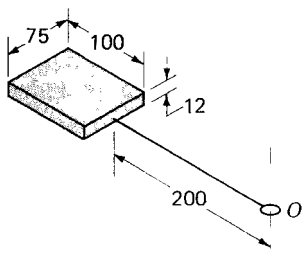


Figura 13-4 Dimensiones en milímetros.

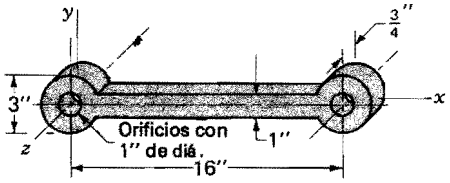


Figura 13-5

Ahora se usa la ecuación (13-14) para hacer la transferencia al eje que pasa por *O*. Así, pues,

$$I_O = I_G + md^2 = 914 + (0.702)(250)^2 = 44\,800 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

o bien, en unidades básicas,

$$I_O = (44\,800)\frac{1}{(1\,000 \text{ mm/m})^2} = 0.0448 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 13-2 En la figura 13-5 se presenta una biela de fundición hierro. Encuéntrese el momento de inercia de masa de la biela en torno al eje z en unidades gravitacionales ips. Úsese $w = 0.260$ lb/pulg^3 como unidad de peso de la fundición de hierro.

SOLUCIÓN El problema se resuelve hallando el momento de inercia de cada uno de los cilindros de los extremos y del prisma central en torno a sus propios centros de masa. Luego se aplican las fórmulas de transferencia para pasarlos al eje z.

La masa de cada cilindro es

$$m_{cyl} = \frac{\pi l w}{4g}(d_o^2 - d_i^2) = \frac{\pi(0.75)(0.260)}{4(386)}[(3)^2 - (1)^2]$$
$$= 0.003\,17 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pulg}$$

Según la tabla 5 del apéndice, se encuentra que el momento de inercia de cada cilindro es

$$I_{G,cyl} = \frac{m}{8}(d_o^2 + d_i^2) = \frac{0.003\,17}{8}[(3)^2 + (1)^2] = 0.003\,96 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg}$$

La masa del prisma central es

$$m_{pr} = \frac{abcw}{g} = \frac{0.75(1)(13)(0.260)}{386} = 0.006\,57 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pulg}$$

Luego, el momento de inercia del prisma en torno a su centro de masa es

$$I_{G,pr} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2) = \frac{0.006\,57}{12}[(1)^2 + (3)^2] = 0.005\,48 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg}$$

Al aplicar la fórmula de transferencia, se obtiene finalmente

$$I_z = I_{G,cyl} + (I_{G,cyl} + m_{cyl}d_{cyl}^2) + (I_{G,pr} + m_{pr}d_{pr}^2)$$
$$= 0.003\,96 + [0.003\,96 + (0.003\,17)(16)^2] + [0.005\,48 + (0.006\,57)(8)^2]$$
$$= 1.25 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

13-4 FUERZAS DE INERCIA Y PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

Considérese un cuerpo rígido en movimiento de masa m que recibe la acción de cualquier sistema de fuerzas, por ejemplo, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$, como se ilustra en la figura

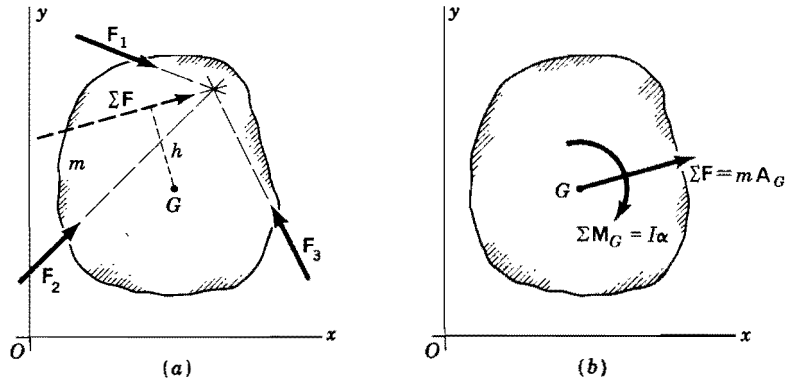


Figura 13-6

13-6*a*. Desígnese el centro de masa del cuerpo como el punto G y encuéntrese la resultante del sistema de fuerzas a partir de la ecuación

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \qquad (a)$$

En el caso general, la línea de acción de esta resultante *no* pasará por el centro de masa, sino que estará desplazada cierta distancia, por ejemplo la distancia h, como se indica en la figura. En el estudio de la mecánica se demuestra que el efecto de este sistema de fuerzas no balanceado es producir aceleraciones lineales y angulares cuyos valores están dados por

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{A}_G \qquad (13\text{-}16)$$

$$\sum \mathbf{M}_G = I\boldsymbol{\alpha} \qquad (13\text{-}17)$$

en donde $\mathbf{A}_G$ es la aceleración del centro de masa y $\boldsymbol{\alpha}$ es la aceleración angular de m (Fig. 13-6*b*). La cantidad $\Sigma\,\mathbf{F}$ es la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, y $\Sigma\,\mathbf{M}_G$ es la suma de los momentos externos junto con los momentos de las fuerzas externas, tomados en torno a G en el plano del movimiento. El momento de inercia de masa se designa como I y también se toma con referencia al centro de masa G.

Las ecuaciones (13-16) y (13-17) muestran que cuando un sistema no balanceado de fuerzas actúa sobre un cuerpo rígido, éste experimenta una aceleración lineal $\mathbf{A}_G$ de su centro de masa en la misma dirección que la fuerza resultante $\Sigma\,\mathbf{F}$; que el cuerpo experimenta también una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, debido a los momentos de las fuerzas y los momentos de torsión en torno al centro de masa, en la misma dirección que el momento resultante $\Sigma\,\mathbf{M}_G$. Si se conocen las fuerzas y los momentos, se pueden usar las ecuaciones (13-16) y (13-17) para determinar las aceleraciones resultantes.

En el diseño de ingeniería, por lo común se especifica el movimiento de los elementos de la máquina por adelantado, mediante otras necesidades de la máquina. En tal caso, el problema es: dado el movimiento de los elementos de la máquina, ¿qué fuerzas se requieren para producir estos movimientos? Por consiguiente, el problema requiere: 1) un análisis cinemático para determinar las aceleraciones lineales y angulares de los diversos elementos, y 2) una definición de la forma real, las dimensiones y el material de los elementos; de otra manera, no se podrían determinar las masas y los momentos de inercia. En los ejemplos que se demostrarán aquí, sólo se presentarán los resultados del análisis cinemático. La selección de los materiales, la forma y muchas de las dimensiones de los elementos de la máquina es tema del diseño de máquinas y no se examinarán aquí en forma alguna.

Puesto que, en el análisis dinámico de las máquinas, los vectores aceleración por lo general se conocen, con frecuencia resulta conveniente una forma alternativa de las ecuaciones (13-16) y (13-17) al determinar las fuerzas requeridas para producir estas aceleraciones conocidas. En consecuencia, se puede escribir

$$\sum \mathbf{F} - m\mathbf{A}_G = 0 \tag{13-18}$$

$$\sum \mathbf{M}_G - I\boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{13-19}$$

Estas dos ecuaciones son vectoriales que se aplican al movimiento plano de un cuerpo rígido. La (13-18) afirma que la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, más la fuerza ficticia $-m\mathbf{A}_G$, es cero. La fuerza ficticia $-m\mathbf{A}_G$ recibe el nombre de *fuerza de inercia*, y tiene la misma línea de acción que $\mathbf{A}_G$, pero el sentido opuesto. La ecuación (13-19) afirma que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas en torno a un eje que pasa por G, perpendicular al plano del movimiento, y los momentos de torsión externos que actúan sobre el cuerpo, más un momento de torsión ficticio $-I\boldsymbol{\alpha}$, es cero. El momento de torsión ficticio $-I\boldsymbol{\alpha}$ se conoce como *momento de torsión de inercia*. Este momento de torsión tiene el sentido opuesto al del vector aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Las ecuaciones (13-18) y (13-19) son extremadamente útiles cuando se estudia la dinámica de la maquinaria, porque permiten agregar fuerzas de inercia y momentos de torsión al sistema extremo de fuerzas y resolver el problema resultante aplicando los métodos de la estática.

Las ecuaciones antes citadas se conocen con el nombre de *principio de D'Alembert*, porque fue este científico quien primero llamó la atención al hecho de que la adición de fuerzas de inercia al sistema real de fuerzas permitía que se obtuviera una solución a partir de las ecuaciones de equilibrio. Convendría hacer notar que las ecuaciones también se pueden escribir

$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad \sum \mathbf{M} = 0 \tag{13-20}$$

en donde se sobreentiende que tanto las fuerzas como los momentos externos y de

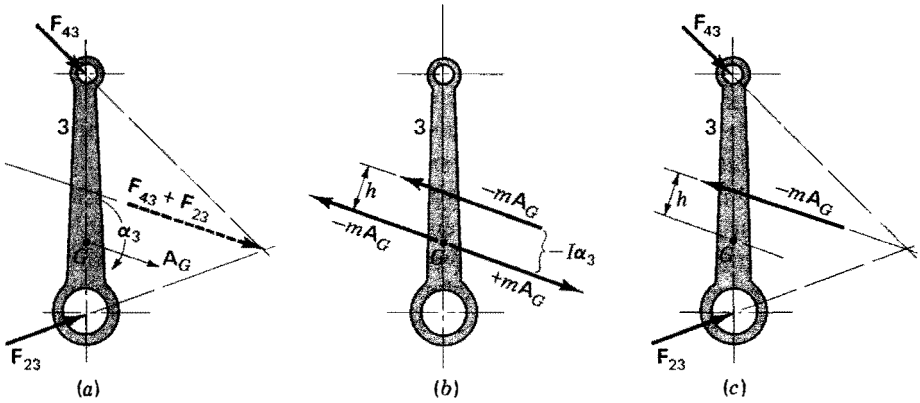


Figura 13-7

inercia, se deben incluir como términos en $\Sigma \mathbf{F}$ y $\Sigma \mathbf{M}$. La ecuación (13-20) es útil porque permite tomar una suma de los momentos en torno a cualquier eje perpendicular al plano del movimiento.

El principio de D'Alembert se resume como sigue: *la suma vectorial de todas las fuerzas externas y las fuerzas de inercia que actúan sobre un cuerpo rígido es cero. La suma vectorial de todos los momentos externos y todos los momentos de torsión de inercia que actúan sobre un cuerpo rígido también es cero por separado*.

Las ecuaciones (13-20) se pueden combinar cuando se desea una solución gráfica mediante un polígono de fuerzas. En la figura 13-7*a* un elemento recibe acción de dos fuerzas externas $\mathbf{F}_{43}$ y $\mathbf{F}_{23}$. La resultante $\mathbf{F}_{43} + \mathbf{F}_{23}$ produce una aceleración $\mathbf{A}_G$ del centro de masa del elemento y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_3$, debido a que la línea de acción de la resultante no pasa por el centro de masa. Al representar el momento de torsión de inercia $-I\boldsymbol{\alpha}_3$ como un par, como se ilustra en la figura 13-7b, se eligen intencionalmente las dos fuerzas de este par de tal modo que sean $\pm m\mathbf{A}_G$. Para que el momento del par tenga la magnitud $-I\alpha_3$, la distancia entre las fuerzas debe ser

$$h = \frac{I\alpha_3}{mA_G} \tag{13-21}$$

Debido a esta elección particular del par, una fuerza del mismo cancela exactamente a la propia fuerza de inercia y deja sólo una fuerza, como se observa en la figura 13-7*c*, que incluye los efectos combinados de la fuerza de inercia y el momento de torsión de inercia.

Ejemplo 13-3 Determínese la fuerza F_A que se requiere para producir una velocidad $V_A = 12.6$ pie/s para el mecanismo que aparece en la figura 13-8*a*. Supóngase que el eslabonamiento está en el plano horizontal, de tal modo que la gravedad actúa en sentido normal al plano del movimiento; supóngase también que no hay fricción. El eslabón 3 pesa 2.20 lb e $I_3 = 0.0479$ lb · s² · pulg.

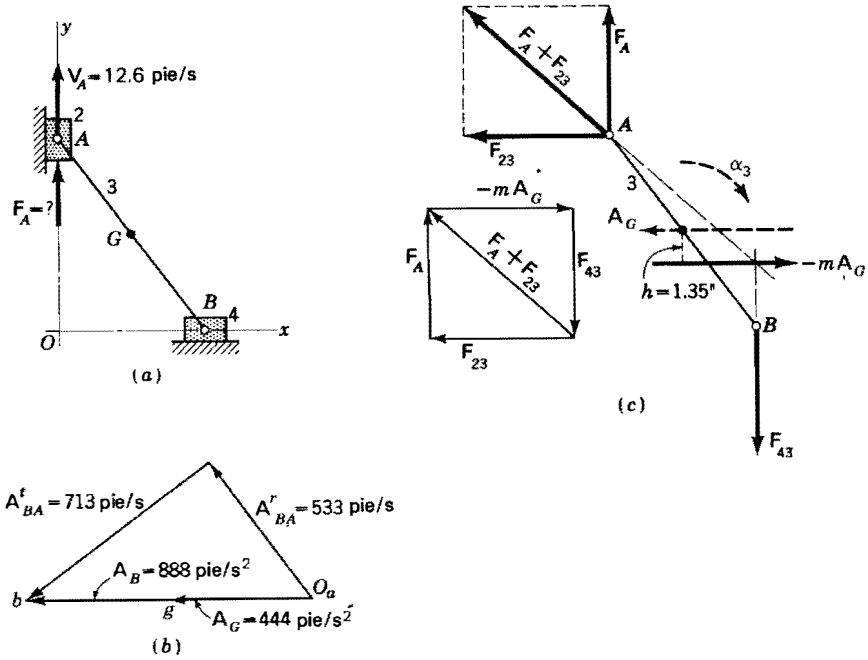


Figura 13-8 $OB = 6$ pulg; $OA = 8$ pulg; $AG = 5$ pulg.

SOLUCIÓN Un análisis cinemático de las aceleraciones proporciona la información que se muestra en la figura 13-8*b*. La aceleración angular es

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{BA}}{R_{BA}} = \frac{713}{10/12} = 856 \text{ rad/s mmr}$$

La masa del eslabón 3 es $m = W/g = 2.20/386 = 0.0057$ lb · s²/pulg. Entonces la (13-21) da

$$h = \frac{I_{G_3}\alpha_3}{mA_G} = \frac{(0.0479)(856)}{(0.0057)(444)(12)} = 1.35 \text{ pulg}$$

En la figura 13-8*c* se dan el diagrama de cuerpo libre y el polígono de fuerzas resultante. Nótese que la fuerza de inercia $-m\mathbf{A}_G$ está desplazada respecto a G la distancia h, de manera que se produzca un momento de $-I\alpha_3$ en torno a G, y que $-m\mathbf{A}_G$ tiene el sentido opuesto al de $\mathbf{A}_G$. La reacción en B es $\mathbf{F}_{43}$ y está verticalmente hacia abajo debido a que se hace caso omiso de la fricción. Las fuerzas en A son la fuerza actuante $\mathbf{F}_A$ y la reacción del bloque $\mathbf{F}_{23}$, que es horizontal, debido también a que se desprecia la fricción. El punto de concurrencia es la intersección de $-m\mathbf{A}_G$ y $\mathbf{F}_{43}$, de las cuales se conocen las direcciones. La línea de acción de $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{23}$, de la fuerza total en A, debe pasar por el punto de concurrencia. Este hecho permite la construcción de polígono de fuerzas. Así pues, se conoce la dirección de las fuerzas desconocidas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_{23}$, y se encuentran como componentes de $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{23}$, como se ilustra en la figura. Midiendo se encuentra que la fuerza actuante es

$$\mathbf{F}_A = 27\hat{\mathbf{j}} \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

13-5 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Sistemas lineales son aquellos en los que el efecto es proporcional a la causa. Esto significa que la respuesta o salida de un sistema depende directamente del impulso, o entrada, al mismo. Un resorte es un ejemplo de sistema lineal; la deflexión de un resorte (salida) es proporcional a la fuerza (entrada) que se ejerza sobre el mismo.

Se aplica el principio de superposición para resolver los problemas, considerando por separado cada uno de los impulsos o entradas a un sistema. Si éste es lineal, se pueden sumar, o superponer, las respuestas a cada una de estas entradas, unas a otras, para determinar la respuesta total del sistema. Por consiguiente, el principio de superposición afirma *que para los sistemas lineales se pueden superponer las respuestas individuales a varias perturbaciones, o funciones impulsoras, para obtener la respuesta total.*

Entre los ejemplos de sistemas no lineales a los que no se aplica el principio de superposición están los resortes que se hacen cada vez más rígidos mientras más se deforman, la fricción de Coulomb en sistemas, y los sistemas con holgura o juego.

13-6 EJEMPLO DE ANÁLISIS GRÁFICO

Ya se han demostrado todos los principios que se requieren para llevar a cabo un análisis completo de fuerzas dinámicas de un mecanismo de movimiento plano. Los pasos para hacer este tipo de análisis se pueden resumir como sigue:

1. Hágase un análisis cinemático del mecanismo para hallar la aceleración angular de cada eslabón o elemento. Localícese el centro de masa de cada eslabón y determínense las aceleraciones de estos puntos.
2. Con el valor o los valores dados de la fuerza o momento de torsión que debe entregar el seguidor, hágase un análisis completo de las fuerzas estáticas del mecanismo. Los resultados de este análisis incluirán entonces las magnitudes y direcciones de las fuerzas y momentos de torsión que actúan sobre cada elemento. Obsérvese en particular que se trata de un análisis de fuerzas estáticas y que no se incluyen las fuerzas o momentos de torsión de inercia.
3. Utilizando los valores dados de las masas y momentos de inercia, así como las aceleraciones angulares y lineales halladas en el paso 1, calcúlense las fuerzas de inercia y los momentos de torsión de inercia para cada eslabón o elemento del mecanismo. Considerando a éstas como fuerzas aplicadas. Hágase un análisis de cuerpo libre de cada elemento del mecanismo completo a fin de hallar el efecto total de todas las fuerzas y todos los momentos de torsión de inercia.
4. Hágase la suma vectorial de los resultados de los pasos 2 y 3 para obtener las fuerzas y los momentos de torsión resultantes para cada elemento de la máquina.

Ejemplo 13-4 Hágase un análisis completo de las fuerzas dinámicas del eslabonamiento de cuatro barras que aparece en la figura 13-9. Las cantidades dadas están incluidas en el pie de la figura.

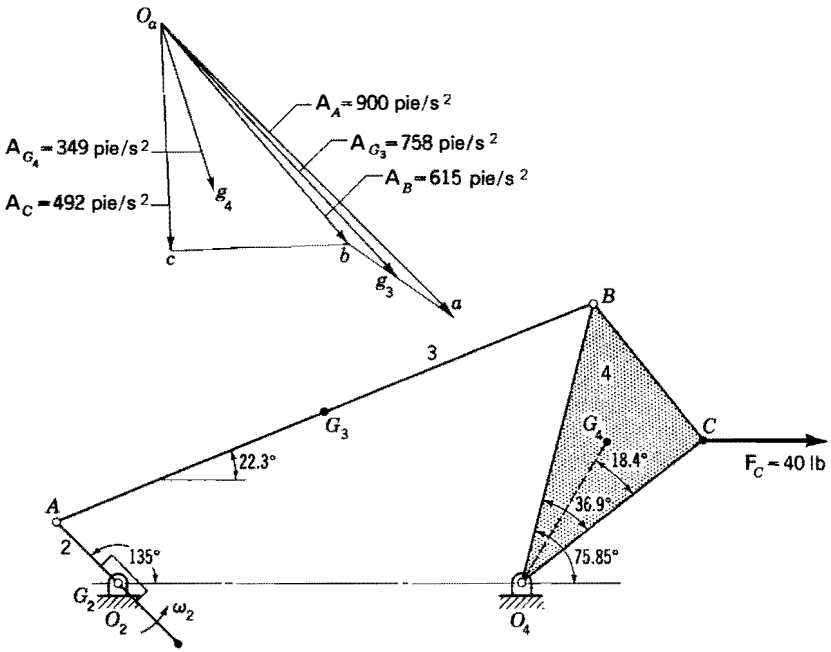


Figura 13-9 O_2A = 3 pulg, AB = 20 pulg, O_4B = 10 pulg, O_2O_4 = 14 pulg, O_4G_4 = 5.69 pulg, AG_3 = 10 pulg, BC = 6 pulg, O_4C = 8 pulg, ω_2 = 60 rad/s, α_2 = 0 rad/s², W_3 = 7.13 lb, I_{G_3} = 0.625 lb·s²· pulg, W_4 = 3.42 lb, I_{G_4} = 0.037 lb·s²· pulg. Las posiciones angulares de los diversos eslabones se han calculado para la posición dada del eslabón 2, y se indican en la figura.

SOLUCIÓN El primer paso consiste en llevar a cabo el análisis cinemático del mecanismo. Este paso no se incluye aquí, pero en la figura 13-9 se da el polígono de aceleraciones resultante del análisis. Los resultados numéricos se muestran en el polígono, en caso de que el lector desee verificarlos. Mediante los métodos del capítulo 4, se encuentra que la aceleración angular de los eslabones 3 y 4

$$\alpha_3 = 148 \text{ rad/s}^2 \text{ cmr} \qquad \alpha_4 = 604 \text{ rad/s}^2 \text{ mmr}$$

Una parte importante del análisis se refiere a los eslabones 3 y 4, porque el centro de masa del eslabón 2 está localizado en O_2. Los diagramas de cuerpo libre de los eslabones 4 y 3 se muestran por separado en las figuras 13-10 y 13-11, respectivamente. Obsérvese también que estos diagramas están dispuestos en forma de ecuación para simplificar su lectura. Por consiguiente, en cada ilustración las fuerzas en (*a*) más las de (*b*) y (*c*) producen las resultantes que aparecen en (*d*). Los dos conjuntos de ilustraciones también están correlacionadas; por ejemplo, $\mathbf{F}'_{34}$ de la figura 13-10*a* es igual a $-\mathbf{F}'_{43}$ de la figura 13-11*a*, etc. El siguiente análisis no es difícil, pero sí complicado; léase con lentitud y examínense con cuidado las ilustraciones, detalle por detalle.

Empiécese con el eslabón 4 de la figura 13-10*a*. Procediendo según las investigaciones anteriores, se hacen los siguientes cálculos:

$$I_{G_4}\alpha_4 = 0.037(604) = 22.3 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

$$m_4 A_{G_4} = \frac{3.42}{32.2}(349) = 37.1 \text{ lb} \qquad h_4 = \frac{I_{G_4}\alpha_4}{m_4 A_{G_4}} = \frac{22.3}{37.1} = 0.602 \text{ pulg}$$

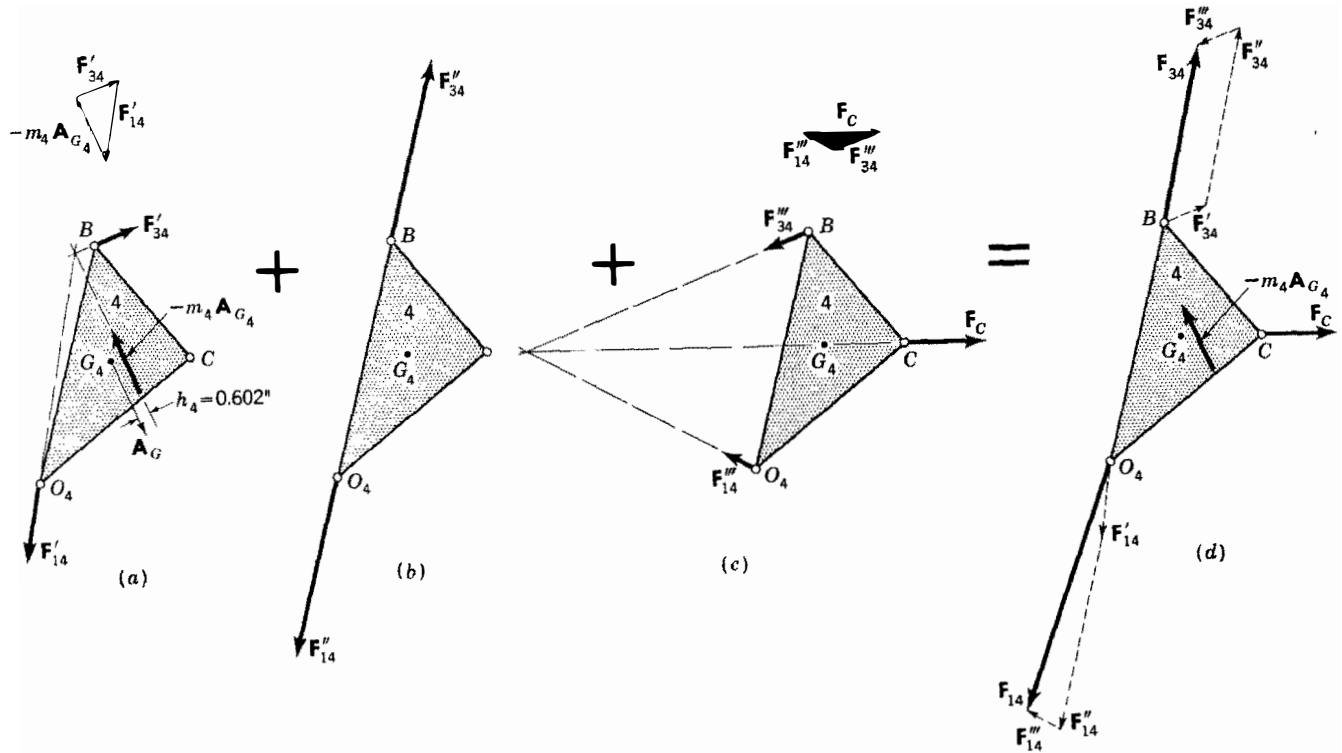


Figura 13-10 Diagramas de cuerpo libre del eslabón 4; $-m_4\mathbf{A}_{G_4} = 37.1$ lb, $\mathbf{F}'_{34} = 24.3$ lb, $\mathbf{F}'_{14} = 44.3$ lb, $\mathbf{F}''_{34} = -\mathbf{F}''_{14} = -\mathbf{F}''_{43} = 94.8$ lb, $\mathbf{F}_C = 40$ lb, $\mathbf{F}'''_{14} = 25$ lb, $\mathbf{F}'''_{14} = 19.3$ lb, $\mathbf{F}_{34} = 94.3$ lb, $\mathbf{F}_{14} = 132$ lb.

Ahora, la fuerza $-m_4A_{G_4} = 37.1$ lb se coloca en el diagrama de cuerpo libre con dirección opuesta a $\mathbf{A}_{G_4}$ y fuera de centro respecto a G_4 en la distancia h_4. La dirección de la excentricidad es la que se necesita para producir un momento de torsión en torno a G_4 opuesto a $I_{G_4}\alpha_4$. La dirección de $\mathbf{F}'_{34}$ se toma a lo largo del eslabón 3. La intersección de $\mathbf{F}'_{34}$ y $-m_4\mathbf{A}_{G_4}$ da el punto de concurrencia y establece la dirección de $\mathbf{F}'_{14}$. Ahora se puede construir el polígono de fuerzas y hallarse las magnitudes de $\mathbf{F}'_{34}$ y $\mathbf{F}'_{14}$. Estos valores se dan en el pie de la figura.

A continuación sígase con la figura 13-11*a*. Ahora se conocen las fuerzas $\mathbf{F}'_{43}$ y $\mathbf{F}'_{23}$ gracias al análisis anterior.

Ahora, pásese a la figura 13-11*b* y al eslabón 3, y hágase los cálculos

$$I_{G_3}\alpha_3 = 0.625(148) = 92.5 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

$$m_3A_{G_3} = \frac{7.13}{32.2}(758) = 168 \text{ lb} \qquad h_3 = \frac{I_{G_3}\alpha_3}{m_3A_{G_3}} = \frac{92.5}{168} = 0.550 \text{ pulg}$$

Localícese la fuerza de inercia $-m_3\mathbf{A}_{G_3} = 168$ lb en el diagrama de cuerpo libre, con dirección opuesta a $\mathbf{A}_{G_3}$, y fuera de centro una distancia h_3 en relación con G_3, de modo que se produzca un momento de torsión en torno a G_3, con dirección opuesta a α_3. La dirección de $\mathbf{F}''_{43}$ es a lo largo de la recta BO_4. Las fuerzas $-m_3\mathbf{A}_{G_3}$ y $\mathbf{F}''_{43}$ se intersecan para determinar el punto de concurrencia. Por ende, se conoce la dirección de $\mathbf{F}''_{23}$ y se puede construir el polígono de fuerzas. Los valores resultantes de $\mathbf{F}''_{43}$ y $\mathbf{F}''_{23}$ se incluyen en el pie de figura.

En la figura 13-10*b*, ahora se conocen las fuerzas $\mathbf{F}''_{34}$ y $\mathbf{F}''_{14}$ que actúan sobre el eslabón 4, gracias al análisis que se acaba de realizar.

En las figurs 13-10*c* y 13-11*c* se presentan los resultados del análisis de fuerzas estáticas siendo $\mathbf{F}_C = 40$ lb la cantidad dada. El polígono de fuerzas de la figura 13-10*c* determina los valores de las fuerzas que actúan sobre el eslabón 4 y, a partir de ésta, se encuentran la dirección y magnitud de las fuerzas que operan sobre el eslabón 3.

El siguiente paso es una adición vectorial de estos resultados ya obtenidos, como se indica en (*d*) de cada figura.

El análisis se completa tomando la fuerza resultante $\mathbf{F}_{23}$ de la figura 13-11*d* y aplicar su negativa, $\mathbf{F}_{32}$, al eslabón 2. Esto se hace en la figura 13-12. La distancia h_2 se encuentra por medición. El momento de torsión externo que se debe aplicar al eslabón 2 es

$$T_{12} = h_2F_{32} = 1.56(145) = 226 \text{ lb} \cdot \text{pulg mmr}$$

Nótese que este momento de torsión tiene dirección opuesta a la de la rotación del eslabón 2.

13-7 ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN CENTRO FIJO

Las secciones previas se ocuparon del caso general de las fuerzas dinámicas para un cuerpo rígido que tiene un movimiento combinado de traslación y rotación. Es importante hacer hincapié en que las ecuaciones y los métodos de análisis investigados en estas secciones son generales y se aplican a *todos* los problemas de movimiento plano. Será interesante ahora estudiar la aplicación de estos métodos a un cuerpo rígido que gira en torno a un centro *fijo*.

Supóngase un cuerpo rígido restringido a girar en torno a algún centro fijo *O*, que no coincide con el centro de masa *G* (Fig. 13-13*a*). Se va a aplicar al cuerpo un sistema de fuerzas (que no se indica), haciendo que adquiera una aceleración angular α. También se incluye el hecho de que el cuerpo está girando con una

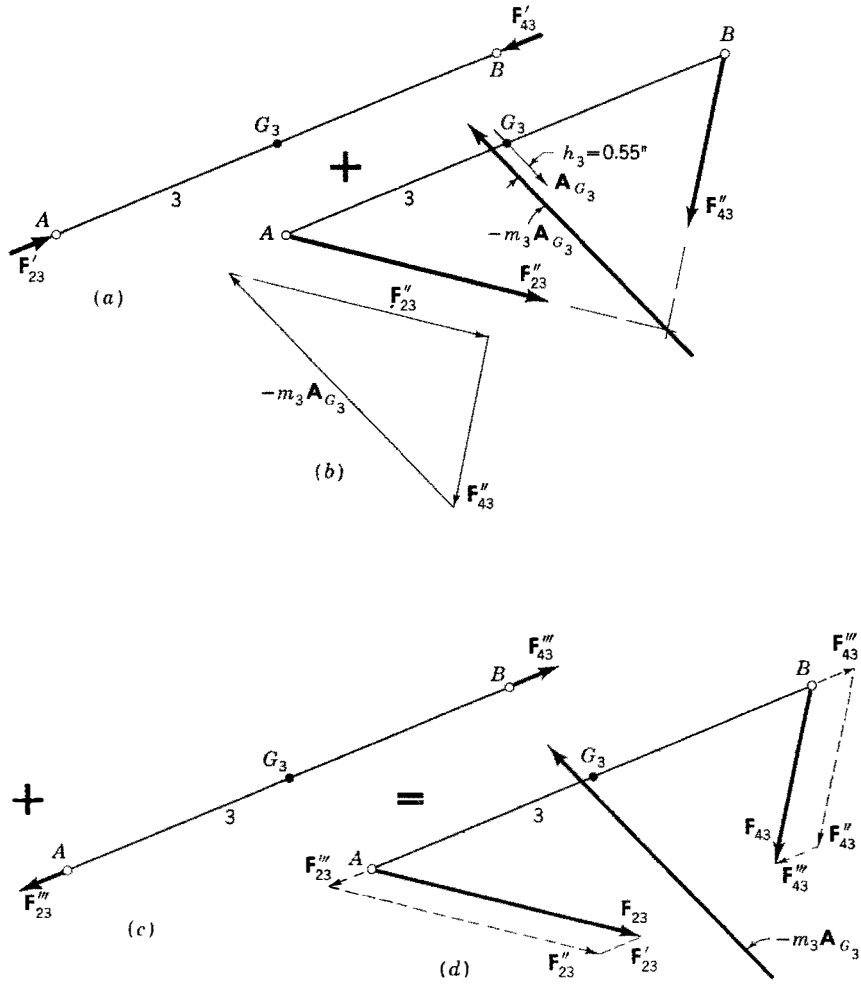


Figura 13-11 Diagramas de cuerpo libre del eslabón 3; $\mathbf{F}'_{43} = -\mathbf{F}'_{23} = -\mathbf{F}'_{14} = 24.3$ lb, $-m_3\mathbf{A}_{G_3} = 168$ lb, $\mathbf{F}''_{43} = 94.8$ lb, $\mathbf{F}''_{23} = 145$ lb, $\mathbf{F}'''_{43} = -\mathbf{F}'''_{23} = -\mathbf{F}'''_{34} = 25$ lb, $\mathbf{F}_{43} = -\mathbf{F}_{34} = 94.3$ lb, $\mathbf{F}_{23} = 145$ lb.

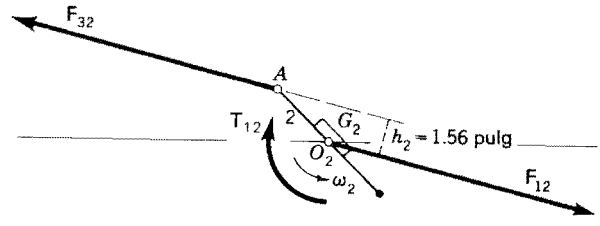


Figura 13-12 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2; $\mathbf{F}_{32} = -\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{12} = 145$ lb, $\mathbf{T}_{12} = 226$ lb·pulg.

velocidad angular ω. Este movimiento del cuerpo significa que el centro de masa tendrá componentes transversales y radicales de aceleración $\mathbf{A}_G^t$ y $\mathbf{A}_G^r$, cuyas magnitudes son, respectivamente, $r_G\alpha$ y $r_G\omega^2$. Por ende, si la fuerza exterior resultante se resuelve en sus componentes transversal y radial, éstas deberán tener las magnitudes

$$\sum F^t = mr_G\alpha \qquad \text{y} \qquad \sum F^r = mr_G\omega^2 \tag{a}$$

según la ecuación (13-16). Además, la (13-17) afirma que debe existir un momento de torsión externo para crear la aceleración angular y que la magnitud de este momento de torsión es $T_G = I\alpha$. Si ahora se suman los momentos de estas fuerzas en torno a O, se tiene

$$\sum M_O = I\alpha + r_G(mr_G\alpha) = (I + mr_G^2)\alpha \tag{b}$$

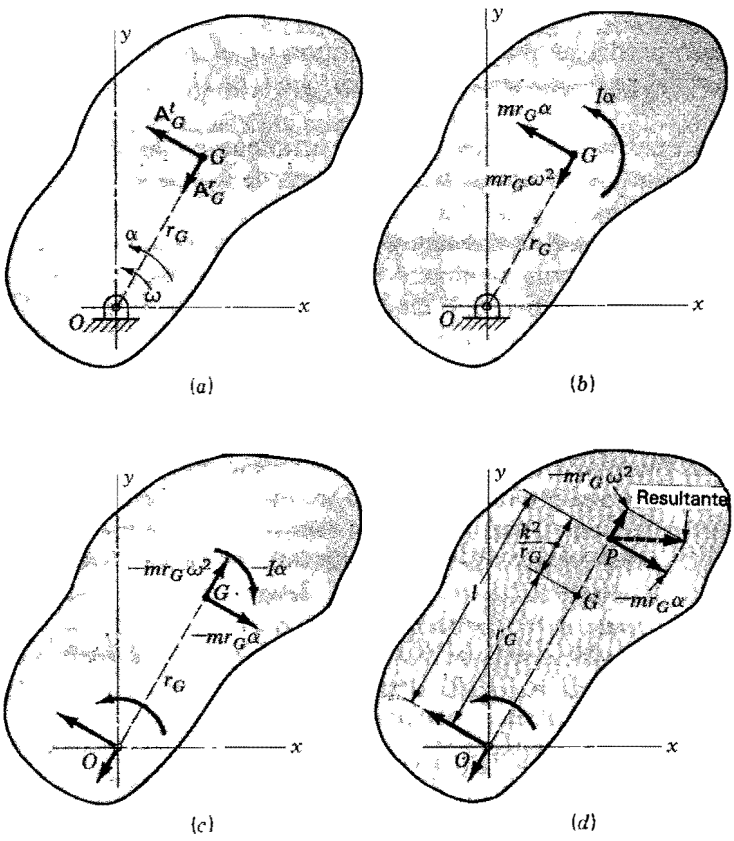


Figura 13-13

Pero, la cantidad entre paréntesis en la ecuación (*b*) es idéntica a la ecuación (13-14) y transfiere el momento de inercia hacia otro eje que no coincide con el centro de masa. Por ende, la (*b*) se puede escribir en forma vectorial como

$$\sum \mathbf{M}_O = I_O \boldsymbol{\alpha}$$

Entonces las ecuaciones (13-18) y (13-19) se convierten en

$$\sum \mathbf{F} - m\mathbf{A}_G = 0 \tag{13-23}$$

$$\sum \mathbf{M}_O - I_O \boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{13-24}$$

mediante la inclusión de la fuerza de inercia $-m\mathbf{A}_G$ y el momento de torsión de inercia $-I_O\boldsymbol{\alpha}$ (Fig. 13-13*c*). Se observa sobre todo que el sistema de fuerzas *no* se reduce a un solo par, debido a la existencia de la componente de fuerza de inercia $-mr_G\omega^2$, que carece de brazo de momento en torno a O. Así pues, tanto la (13-23) como la (13-24) son necesarias.

Se presenta un caso particular cuando $\alpha = 0$. Entonces, el momento externo M_O es cero y la única fuerza de inercia es, según la figura 13-13*c*, la fuerza centrífuga $-mr_G\omega^2$.

Existe un segundo caso bajo las condiciones de arranque en las que $\omega = 0$, pero α no es cero. Bajo estas condiciones, la única fuerza de inercia es $-mr_G\alpha$, y el sistema se reduce a un solo par.

Cuando un cuerpo rígido tiene un movimiento de traslación pura, la fuerza de inercia resultante y la fuerza externa resultante tienen la misma línea de acción, que pasa por el centro de masa del cuerpo. Cuando un cuerpo rígido tiene rotación y aceleración angular, la fuerza de inercia resultante y la fuerza externa resultante tienen la misma línea de acción, pero ésta *no* pasa por el centro de masa. Localícese ahora un punto de la línea de acción de la resultante de las fuerzas de inercia de la figura 13-13*c*.

La resultante de las fuerzas de inercia pasará por el mismo punto P de la recta OG de la figura 13-13*c*, o en una prolongación de la misma. Esta fuerza se puede resolver en dos componentes, una de las cuales será $-mr_G\omega^2$, que actúa a lo largo de la recta OG, y la otra será $-mr_G\alpha$, que actúa perpendicularmente a OG, pero no pasa por el punto G. Se puede hallar la distancia, designada como l, hasta el punto desconocido P, igualando el momento de la componente $-mr_G\alpha$, que pasa por P, a la suma del momento de torsión de inercia y el momento de las fuerzas de inercia que actúan pasando por G. Así pues, al tomar los momentos en torno a O, se tiene

$$(-mr_G\alpha)l = -I\alpha + (-mr_G\alpha)r_G$$

o bien,

$$l = \frac{I}{mr_G} + r_G \tag{c}$$

Substituyendo el valor de I dado en la ecuación (13-15), se tiene

$$l = \frac{k^2}{r_G} + r_G \tag{13-25}$$

El punto P localizado por la (13-25) y que se muestra en la figura 13-13*d* se conoce con el nombre de *centro de percusión*. Como se indica, la fuerza de inercia resultante pasa por P y, en consecuencia, la fuerza de inercia tiene un momento cero en torno al centro de percusión. Si se aplica una fuerza externa en P, perpendicular a OG, se producirá una aceleración angular α, pero la reacción del cojinete en O sera cero, excepto por la componente radial debida a la fuerza de inercia $-mr_G\omega^2$. Una de las prácticas comunes en las máquinas para pruebas de choque es aplicar la fuerza en el centro de percusión, con el fin de eliminar la reacción transversal en el cojinete, debida a la fuerza externa.

En la (13-25) se muestra que la ubicación del centro de percusión es independiente de los valores de ω y α.

Si el eje de rotación coincide con el centro de masa, $r_G = 0$ y la (13-25) muestra que $l = \infty$. En esas condiciones no se tiene fuerza de inercia resultante, sino, por el contrario, se tiene un par de inercia resultante $-I\alpha$.

Para concluir esta sección, se observa que las componentes transversal y radial de la aceleración de G se puede escribir

$$\mathbf{A}_G^t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}_G \tag{13-26}$$

$$\mathbf{A}_G^r = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_G) \tag{13-27}$$

en donde $\mathbf{R}_G$ es el vector de posición del punto G. Ahora las ecuaciones (*a*) se pueden expresar en forma vectorial:

$$\sum \mathbf{F}^t = m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}_G \tag{13-28}$$

$$\sum \mathbf{F}^r = m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_G) \tag{13-29}$$

La fuerza externa resultante definida en términos de las componentes transversal y radial, como las dan estas ecuaciones, a menudo resulta útil en el análisis.

13-8 MEDICIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA

Con frecuencia, la forma de un cuerpo es tan compleja que es imposible calcular el momento de inercia. Considérese, por ejemplo, el problema de hallar el momento de inercia de un automóvil, en torno a un eje vertical que pase por su centro de masa. Para este tipo de problemas por lo general resulta factible determinar el momento de inercia, observando el comportamiento dinámico del cuerpo en respuesta a una entrada conocida.

A muchos cuerpos, por ejemplo, bielas y manivelas, se les da una forma tal que se puede suponer que sus masas están en un solo plano. Si se pueden pesar estos cuerpos y localizar sus centros de masa, es factible suspenderlos como un péndulo y hacerlos oscilar. Entonces se puede calcular el momento de inercia de este tipo de cuerpos basándose en la observación de su periodo o frecuencia de oscilación. Como se ilustra en la figura 13-14*a*, la pieza se debe suspender más o menos cerca del centro de masa; pero no en coincidencia con éste.

Por lo común no resulta necesario hacer una perforación para suspender el cuerpo; por ejemplo, una rueda o engrane dentado se pueden suspender sobre una cuchilla en el borde.

Cuando el cuerpo de la figura 13-14*a* se desplaza un ángulo θ, una fuerza de gravedad mg actúa en G. Al sumar los momentos en torno a O da

$$\sum M_O = -mg(r_G \operatorname{sen}\theta) - I_O\ddot{\theta} = 0 \qquad (a)$$

El objetivo es que el péndulo oscile describiendo sólo ángulos pequeños, de modo que sen θ se pueda sustituir por θ. Entonces la ecuación (*a*) se puede escribir

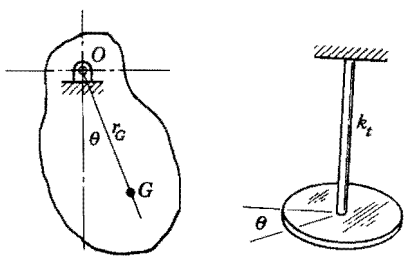
$$\ddot{\theta} + \frac{mgr_G}{I_O}\theta = 0 \qquad (b)$$

Esta ecuación diferencial tiene la bien conocida solución

$$\theta = C_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{mgr_G}{I_O}}\,t + C_2 \cos\sqrt{\frac{mgr_G}{I_O}}\,t \qquad (c)$$

en donde C_1 y C_2 son las constantes de integración. El movimiento del péndulo se iniciará desplazándolo un ángulo pequeño θ_0 y soltándolo desde esta posición. Por ende, cuando $t = 0$, $\theta = \theta_0$, y $\dot{\theta} = 0$. Sustituyendo estas condiciones en la ecuación (*c*) y su primera derivada permite evaluar las constantes; así se encuentra $C_1 = 0$ y $C_2 = \theta_0$. Por consiguiente,

$$\theta = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{mgr_G}{I_O}}\,t \qquad (13\text{-}30)$$



(*a*) (*b*) **Figura 13-14**

Puesto que una función coseno se repite cada 360°, el periodo del movimiento en segundos es

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgr_G}} \qquad (d)$$

De donde,

$$I_O = mgr_G\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \qquad (13\text{-}31)$$

Esta ecuación indica que se debe ajustar el peso del cuerpo para que sea mg, se debe medir la distancia r_G y luego debe suspenderse el péndulo y hacerse oscilar de manera que se pueda observar el periodo τ. A continuación se puede resolver la ecuación (13-31) para dar el momento de inercia I_O en torno O. Si se desea el momento de inercia en torno al centro de masa, se puede obtener aplicando la fórmula de transferencia (13-14).

En la figura 13-14*b* se muestra cómo puede determinarse el momento de inercia sin pesar el cuerpo en realidad. La inercia I se conecta a un alambre o una varilla delgada en el centro de masa de la inercia. Se define una rigidez a la torsión k_t de la varilla o alambre como el momento de torsión necesario para torcer la varilla en un ángulo unitario. Si la inercia de la figura 13-14*b* se hace girar describiendo cualquier ángulo θ y luego se suelta, la ecuación del movimiento se convierte en

$$\ddot{\theta} + \frac{k_t}{I_G}\theta = 0$$

Esta es similar a la ecuación (*b*), y con las mismas condiciones de partida tiene la solución

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{k_t}{I_G}}\, t \qquad (13\text{-}32)$$

Así pues, el periodo de oscilación es

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I_G}{k_t}}$$

o bien,

$$I_G = k_t\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \qquad (13\text{-}33)$$

Por lo general se conoce la rigidez a la torsión o se puede calcular a partir del conocimiento de las dimensiones de la varilla y su material. Entonces se observa la oscilación de la inercia desconocida I_G y se usa la ecuación (13-33), para calcular I_G. De otra manera, cuando se desconoce k_t, se puede montar una inercia conocida en la varilla y aplicar la (13-33) para determinar k_t.

El *péndulo trifilar*, llamado también *péndulo de torsión de tres cuerdas* que se ilustra en la figura 13-15, puede ser un método muy exacto para medir el momento de inercia de masa. Tres cuerdas de igual longitud sostienen una plataforma de

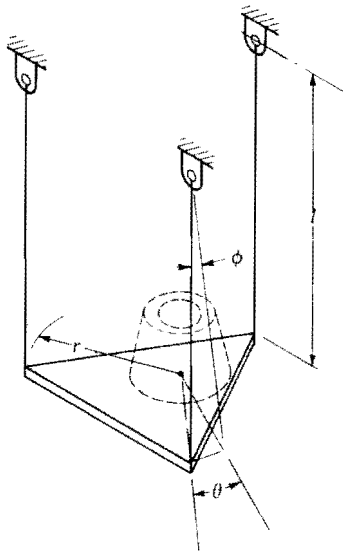


Figura 13-15

peso ligero y están igualmente espaciadas alrededor del centro de ella. Una plataforma redonda daría el mismo servicio que la triangular que aparece en la ilustración. La pieza cuyo momento de inercia se va a determinar se coloca con sumo cuidado sobre la plataforma de modo que el centro de masa del objeto coincida con el centro de la plataforma. Entonces se hace oscilar la plataforma y se cuenta el número de oscilaciones durante un periodo especificado.†

La anotación para el análisis de péndulo trifilar es la siguiente:

m = masa de la pieza
m_p = masa de la plataforma
I_G = momento de inercia de la pieza
I_p = momento de inercia de la plataforma
r = radio de la plataforma
θ = ángulo de la plataforma
l = longitud de la cuerda
ϕ = ángulo de la cuerda
z = eje vertical que pasa por el centro de la plataforma

Se principia escribiendo la (13-19) para el eje z, lo cual da

$$\sum M_z = -r(m + m_p)g \operatorname{sen} \phi - (I_G + I_p)\ddot{\theta} = 0 \qquad (e)$$

† Se pueden hallar detalles adicionales en la obra de F. E. Fisher y H. H. Alvord, *Instrumentation for Mechanical Analysis,* The University of Michigan Summer Conferences, Ann Arbor, Michigan, 1977, p. 129. En análisis que se presenta aquí es con autorización de los autores.

Puesto que se está tratando con movimientos pequeños, los senos de los ángulos. De donde,

$$\phi = \frac{r}{l}\,\theta \tag{f}$$

y la ecuación (*e*) se convierte en

$$\ddot{\theta} + \frac{(m + m_p)r^2 g}{l(I_G + I_p)}\,\theta = 0 \tag{g}$$

Esta ecuación se puede resolver en la misma forma que la (*b*). El resultado es

$$I_G + I_p = \frac{(m + m_p)r^2 g}{l}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \tag{13-34}$$

Esta ecuación se debe utilizar primero con una plataforma vacía. Cuando se conocen I_p y m_p, la ecuación se puede resolver con suma facilidad para la inercia desconocida I_G.

13-9 ANÁLISIS DE UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS

Ejemplo 13-5 Como ejemplo de un análisis dinámico en el que se usan unidades SI, sea el eslabonamiento de cuatro barras de la figura 13-16. Los datos requeridos, basados en un análisis cinemático completo, aparecen en la figura y en su pie.

SOLUCIÓN Se parte de la siguiente información cinemática:

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = -119\hat{\mathbf{k}}\ \text{rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha}_4 = -625\hat{\mathbf{k}}\ \text{rad/s}^2$$

$$\mathbf{A}_{G_3} = 162\angle -73.2^\circ\ \text{m/s}^2 \qquad \mathbf{A}_{G_4} = 104\angle 233^\circ\ \text{m/s}^2$$

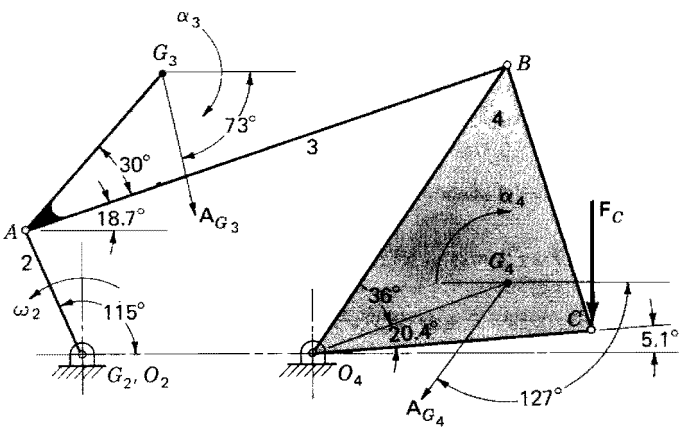


Figura 13-16 Dimensiones en milímetros; $O_2A = 60$, $O_2O_4 = 100$, $AB = 220$, $O_4B = 150$, $AG_3 = 90$, $O_4C = BC = 120$, $O_4G_4 = 90$, $\omega_2 = 48$ rad/s, $m_3 = 1.5$ kg, $m_4 = 5$ kg, $I_3 = 0.012\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, $I_4 = 0.054\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = -119\hat{\mathbf{k}}$ rad/s^2, $\boldsymbol{\alpha}_4 = -625\hat{\mathbf{k}}$ rad/s^2, $A_{G_3} = 162$ m/s^2, $A_{G_4} = 104$ m/s^2, $\mathbf{F}_C = -0.8\hat{\mathbf{j}}$ kN.

Las dos fuerzas de inercia son

$$-m_3\mathbf{A}_{G_3} = \frac{1.5(162)}{1000}\underline{/-73.2+180^\circ} = -0.070\hat{\mathbf{i}} + 0.233\hat{\mathbf{j}}\ \text{kN}$$

y

$$-m_4\mathbf{A}_{G_4} = \frac{5(104)}{1000}\underline{/233-180^\circ} = 0.313\hat{\mathbf{i}} + 0.415\hat{\mathbf{j}}\ \text{kN}$$

Por supuesto, $\mathbf{F}_C = -0.8\hat{\mathbf{j}}$ kN. Se necesitan los siguientes vectores de posición (véase la Fig. 13-16; nótese que las dimensiones están en milímetros):

$$\mathbf{R}_A = 60\underline{/115^\circ} = -25.4\hat{\mathbf{i}} + 54.4\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{R}_{G_3A} = 90\underline{/48.7^\circ} = 59.4\hat{\mathbf{i}} + 67.6\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{R}_{BA} = 220\underline{/18.7^\circ} = 208\hat{\mathbf{i}} + 70.5\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{R}_B = 150\underline{/56.4^\circ} = 83.0\hat{\mathbf{i}} + 125\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{R}_{G_4} = 90\underline{/20.4^\circ} = 84.4\hat{\mathbf{i}} + 31.4\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{R}_C = 120\underline{/5.1^\circ} = 120\hat{\mathbf{i}} + 10.7\hat{\mathbf{j}}$$

El análisis se principia con el eslabón 4 y se determinan las fuerzas $\mathbf{F}'$. Éstas se deben a $\mathbf{F}_C$ y $-m_4\mathbf{A}_{G_4}$ haciendo caso omiso de los efectos de $-m_3\mathbf{A}_{G_3}$ y $-I_3\alpha_3$. Si se toman momentos en torno a O_4, se obtiene la ecuación

$$\sum \mathbf{M}_{O_4} = \mathbf{R}_{G_4O_4} \times (-m_4\mathbf{A}_{G_4}) + (-I_4\alpha_4) + \mathbf{R}_{CO_4} \times \mathbf{F}_C + \mathbf{R}_B \times \mathbf{F}'_{34} = 0 \qquad (1)$$

Se encuentra que los tres primeros términos son

$$\mathbf{R}_{G_4O_4} \times (-m_4\mathbf{A}_{G_4}) = 25.2\hat{\mathbf{k}}$$
$$-I_4\alpha_4 = -0.054(-625\hat{\mathbf{k}}) = 33.8\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{R}_{CO_4} \times \mathbf{F}_C = -95.6\hat{\mathbf{k}}$$

La fuerza $\mathbf{F}'_{34}$ tiene la misma dirección que el eslabón 3; de donde

$$\mathbf{F}'_{34} = F'_{34}\underline{/18.7^\circ} = (0.947\hat{\mathbf{i}} + 0.321\hat{\mathbf{j}})F'_{34}$$

Entonces

$$\mathbf{R}_{BO_4} \times \mathbf{F}'_{34} = -91.7F'_{34}\hat{\mathbf{k}}$$

Ahora se deben sustituir estos cuatro términos en la (1). Después de resolverla, se encuentra que $F'_{34} = -0.400$ kN. Por tanto,

$$\mathbf{F}'_{34} = -0.400\underline{/18.7^\circ} = -0.378\hat{\mathbf{i}} - 0.128\hat{\mathbf{j}} = 0.400\underline{/198.7^\circ}\ \text{kN}$$

A continuación, al sumar las fuerzas sobre el eslabón 4 se obtiene la ecuación

$$\sum \mathbf{F}_4 = \mathbf{F}'_{34} + (-m_4\mathbf{A}_{G_4}) + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}'_{14} = 0 \qquad (2)$$

Ahora se conocen todos los términos, excepto $\mathbf{F}'_{14}$. Después de resolver, se encuentra

$$\mathbf{F}'_{14} = 0.0655\hat{\mathbf{i}} + 0.513\hat{\mathbf{j}} = 0.517\underline{/82.7^\circ}\ \text{kN}$$

Pasando al eslabón 3, se supone que las fuerzas $\mathbf{F}''$ se deben únicamente a $-m_3\mathbf{A}_{G_3}$. Por tanto, se hace caso omiso de los efectos de $\mathbf{F}_C$, $-I_4\alpha_4$ y $-m_4\mathbf{A}_{G_4}$ Al tomar momentos en torno a A se obtiene

$$\sum \mathbf{M}_A = \mathbf{R}_{G_3A} \times (-m_3\mathbf{A}_{G_3}) + (-I_3\alpha_3) + \mathbf{R}_{BA} \times \mathbf{F}''_{43} = 0 \qquad (3)$$

Se encuentra que los dos primeros términos son

$$\mathbf{R}_{G_3A} \times (-m_3\mathbf{A}_{G_3}) = 18.6\hat{\mathbf{k}}$$

y

$$-I_3\alpha_3 = -0.012(-119\hat{\mathbf{k}}) = 1.43\hat{\mathbf{k}}$$

La fuerza $\mathbf{F}''_{43}$ se toma a lo largo de la recta O_4B. Por tanto,

$$\mathbf{F}''_{43} = F''_{43}\underline{/56.4^\circ} = (0.553\hat{\mathbf{i}} + 0.833\hat{\mathbf{j}})F''_{43}$$

Entonces

$$\mathbf{R}_{BA} \times \mathbf{F}''_{43} = 134F''_{43}\hat{\mathbf{k}}$$

Después de sustituir estos tres términos en la (3) y resolver, da $F''_{43} = -0.149$ kN. De donde,

$$\mathbf{F}''_{43} = -0.149\underline{/56.4^\circ} = -0.082\,4\hat{\mathbf{i}} - 0.124\hat{\mathbf{j}} = 0.149\underline{/236.4^\circ}\ \text{kN}$$

A continuación, sumando las fuerzas sobre el eslabón 3 y resolviendo para $\mathbf{F}''_{23}$, da

$$\mathbf{F}''_{23} = m_3\mathbf{A}_{G_3} - \mathbf{F}''_{43} = 0.153\hat{\mathbf{i}} - 0.109\hat{\mathbf{j}} = 0.187\underline{/-35.5^\circ}\ \text{kN}$$

El tercer paso del análisis es encontrar las sumas vectoriales de las fuerzas $\mathbf{F}'$ y $\mathbf{F}''$, en A, B y O_4. En A se tiene

$$\mathbf{F}_{23} = \mathbf{F}'_{23} + \mathbf{F}''_{23} = \mathbf{F}'_{34} + \mathbf{F}''_{23}$$

El resultado es

$$\mathbf{F}_{23} = -0.225\hat{\mathbf{i}} - 0.237\hat{\mathbf{j}} = 0.327\underline{/226.5^\circ}\ \text{kN}$$

Asimismo,

$$\mathbf{F}_{32} = -\mathbf{F}_{23} = 0.225\hat{\mathbf{i}} + 0.237\hat{\mathbf{j}} = 0.327\underline{/46.5^\circ}\ \text{kN}$$

A continuación

$$\mathbf{F}_{43} = \mathbf{F}'_{43} + \mathbf{F}''_{43} = -\mathbf{F}'_{34} + \mathbf{F}''_{43}$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $\mathbf{F}_{43}$ y $\mathbf{F}_{34}$ como

$$\mathbf{F}_{43} = 0.296\hat{\mathbf{i}} + 0.004\hat{\mathbf{j}} = 0.296\underline{/0.8^\circ}\ \text{kN}$$

$$\mathbf{F}_{34} = -0.296\hat{\mathbf{i}} - 0.004\hat{\mathbf{j}} = 0.296\underline{/180.8^\circ}\ \text{kN}$$

En O_4 se tiene

$$\mathbf{F}_{14} = \mathbf{F}'_{14} + \mathbf{F}''_{14} = \mathbf{F}'_{14} + \mathbf{F}''_{43}$$

La solución es

$$\mathbf{F}_{14} = -0.0169\hat{\mathbf{i}} + 0.389\hat{\mathbf{j}} = 0.389\underline{/92.5^\circ}\ \text{kN}$$

Para el eslabón 2, se tiene

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{32} = -0.225\hat{\mathbf{i}} - 0.237\hat{\mathbf{j}} = 0.327\underline{/226.5^\circ}\ \text{kN}$$

Del mismo modo,

$$\sum \mathbf{M}_{O_2} = \mathbf{R}_A \times \mathbf{F}_{32} + \mathbf{T}_2 = 0$$

Al resolver, da

$$\mathbf{T}_2 = -\mathbf{R}_A \times \mathbf{F}_{32} = 18.3\hat{\mathbf{k}}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

13-10 FUERZAS Y MOMENTOS DE SACUDIMIENTO

Para el diseñador las fuerzas transmitidas al marco o a base de la máquina, debidas a la inercia de los eslabones en movimiento y otros elementos de la misma, tienen un interés especial. Cuando estas fuerzas varían en magnitud o dirección, tienden a sacudir o a hacer vibrar la máquina y, en consecuencia, esos efectos reciben el nombre de *fuerzas y momentos de sacudimiento*.

Si se considera un eslabonamiento de cuatro barras como ejemplo, suponiendo que los eslabones 2, 3 y 4 son los elementos móviles y el eslabón 1 es el marco, las fuerzas de inercia asociadas con los elementos en movimiento son $-m_2\mathbf{A}_{G_2}$, $-m_3\mathbf{A}_{G_3}$, y $-m_4\mathbf{A}_{G_4}$. Tomando a los elementos móviles como un cuerpo libre, se puede escribir inmediatamente

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{14} + (-m_2\mathbf{A}_{G_2}) + (-m_3\mathbf{A}_{G_3}) + (-m_4\mathbf{A}_{G_4}) = 0 \qquad (a)$$

Utilizando $\mathbf{F}_S$ como la fuerza resultante de sacudimiento, se tiene

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{41} \qquad (b)$$

Por tanto,

$$\mathbf{F}_S = -(m_2\mathbf{A}_{G_2} + m_3\mathbf{A}_{G_3} + m_4\mathbf{A}_{G_4}) \qquad (13\text{-}35)$$

Para determinar el momento de sacudimiento se escribe

$$\sum \mathbf{M}_{O_2} = \mathbf{R}_{G_2} \times (-m_2\mathbf{A}_{G_2}) + \mathbf{R}_{G_3} \times (-m_3\mathbf{A}_{G_3}) + \mathbf{R}_{G_4O_2} \times (-m_4\mathbf{A}_{G_4}) - I_2\boldsymbol{\alpha}_2 - I_3\boldsymbol{\alpha}_3 - I_4\boldsymbol{\alpha}_4 + \mathbf{M}_{12} = 0 \qquad (c)$$

Entonces

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_{21} = -(\mathbf{R}_{G_2} \times m_2\mathbf{A}_{G_2} + \mathbf{R}_{G_3} \times m_3\mathbf{A}_{G_3} + \mathbf{R}_{G_4O_2} \times m_4\mathbf{A}_{G_4} + I_2\boldsymbol{\alpha}_2 + I_3\boldsymbol{\alpha}_3 + I_4\boldsymbol{\alpha}_4) \qquad (13\text{-}36)$$

13-11 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

En esta sección se presentan los pasos necesarios para obtener una solución general en computadura o calculadora programable para la cinemática y dinámica del mecanismo de cuatro barras. El procedimiento que se presenta aquí probablemente no sea la solución óptima porque casi cada programador enfoca el problema de una manera diferente. Sin embargo, se puede usar el programa como una guía para problemas más complejos y con el fin de generar ideas. Este programa ha sido verificado usando la calculadora programable Texas Instrument TI-59.

Las ecuaciones se presentan sin desarrollarlas; todas están basadas en los fundamentos que ya se cubrieron en esta obra. Puesto que hay demasiadas ecuaciones, se presentan en forma de texto, más que desarrolladas, para ahorrar espacio.

Se recomienda que, en un análisis en computadora, se utilicen siempre unidades básicas. Por tanto, si se emplean unidades gravitacionales ips, las fuerzas y

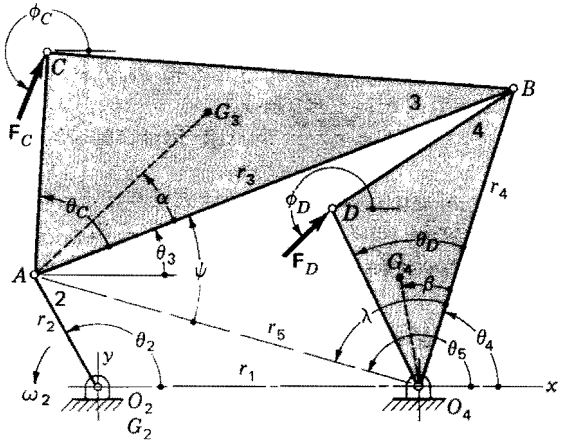


Figura 13-17

los pesos deben expresarse en libras-fuerza y las dimensiones en pulgadas, tomando g = 386 pulg/s^2. Si se emplean unidades SI, las fuerzas deben darse en newtons, las masas en kilogramos y las distancias en metros. Los resultados se pueden expresar siempre utilizando prefijos tales como kilo o mili, al terminar el programa.

La notación que se utilizará es la acostumbrada y la mayor parte de ella aparece en la figura 13-17. Hay tres subrutinas que son necesarias y que se deben programar primero; éstas son $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (x_A y_B - y_A x_B)\hat{\mathbf{k}}$, una rutina bidimensional de producto vectorial, $\mathbf{F}_C = \mathbf{f}_1(\theta_2) + \mathbf{f}_2(\theta_3)$, y $\mathbf{F}_D = \mathbf{f}_3(\theta_2) + \mathbf{f}_4(\theta_4)$. Las dos últimas se deben plantear basándose en el enunciado original del problema, y es probable que cambien de un problema a otro.

Se necesitan tres tipos de almacenamiento, el permanente para los valores iniciales o dados, uno temporal para ciertos términos que aparecen con frecuencia y se utilizan durante los cálculos y luego se desechan y otro permanente para todas las respuestas de interés.

Almacenamiento inicial permanente Almacénense θ_2, $\Delta\theta_2$, r_1, r_2, r_3, r_4, R_{G_3A}, R_{G_4}, R_{CA}, R_D, α, θ_C, θ_D, β, ω_2, m_3, m_4, I_3, e I_4. Nótese que $\Delta\theta_2$ es el incremento en el que se avanza la manivela después de cada solución.

Almacenamiento temporal θ_5, r_5, ψ, $|F'_{34}|$, $|F''_{34}|$, $\Sigma(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, x_A, y_A, x_B, y_B. Es probable que también se desee almacenar otras cantidades temporalmente, como por ejemplo los argumentos de los términos trigonométricos que se presentan con frecuencia.

Almacenamiento permanente final θ_3, θ_4, ω_3, ω_4, α_3, α_4, $A^x_{G_3}$, $A^y_{G_3}$, $A^x_{G_4}$, $A^y_{G_4}$, F^x_C, F^y_C, F^x_D, F^y_D, F^x_{23}, F^y_{23}, F^x_{34}, F^y_{34}, F^x_{14}, F^y_{14}, T_2.

Paso 1. Ecuación (1), $r_1 + r_5 \cos\theta_5 = r_2 \cos\theta_2$; ecuación (2), $r_5 \operatorname{sen}\theta_5 = r_2 \operatorname{sen}\theta_2$.

Resuélvase para θ_5 y r_5. Obsérvese que $r_2 \operatorname{sen}\theta_2$ y $r_2\cos\theta_2 - r_1$ forman los

catetos de un triángulo rectángulo en donde se toma a r_5 como la hipotenusa y a θ_5 como uno de los ángulos. Si el problema se está resolviendo en calculadora, úsese la tecla de conversión polar-rectangular para obtener θ_5 y r_5.

Paso 2. Resuélvase la ecuación (3), $\psi = \cos^{-1}[(r_3^2 + r_5^2 - r_4^2)/2r_3r_5]$.

Paso 3. Resuélvase la ecuación (4), $\lambda = \cos^{-1}[(r_5 - r_3\cos\psi)/r_4]$; la ecuación (5), $\theta_4 = \theta_5 - \lambda$, y $\theta_3 = \psi + \theta_5 - 180$.

Paso 4. Resuélvase la ecuación (6), $\omega_3 = [r_2\omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)]/[r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)]$.

Paso 5. Resuélvase de la ecuación (7), $\omega_4 = [r_2\omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)]/[r_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)]$.

Paso 6. Resuélvase la ecuación (8), $\alpha_3 = [r_2\omega_2^2\cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\omega_3^2\cos(\theta_3 - \theta_4) - r_4\omega_4^2]/[r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)]$.

Paso 7. Resuélvase la ecuación (9) $\alpha_4 = [r_2\omega_2^2\cos(\theta_2 - \theta_3) - r_4\omega_4^2\cos(\theta_3 - \theta_4) + r_3\omega_3^2]/[r_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)]$.

Paso 8. Resuélvase la ecuación (10), $A^x_{G_3} = r_2\omega_2^2\cos(\theta_2 + 180) + R_{G_3A}\alpha_3\cos(\theta_3 + \alpha + 90) + R_{G_3A}\omega_3^2\cos(\theta_3 + \alpha + 180)$.

Paso 9. Resuélvase la ecuación (11), $A^y_{G_3} = r_2\omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_2 + 180) + R_{G_3A}\alpha_3 \operatorname{sen}(\theta_3 + \alpha + 90) + R_{G_3A}\omega_3^2 \operatorname{sen}(\theta_3 + \alpha + 180)$.

Paso 10. Resuélvase la ecuación (12), $A^x_{G_4} = R_{G_4}\alpha_4\cos(\theta_4 + \beta + 90) + R_{G_4}\omega_4^2\cos(\theta_4 + \beta + 180)$.

Paso 11. Resuélvase la ecuación (13), $A^y_{G_4} = R_{G_4}\alpha_4 \operatorname{sen}(\theta_4 + \beta + 90) + R_{G_4}\omega_4^2 \operatorname{sen}(\theta_4 + \beta + 180)$.

Este paso pone fin al análisis cinemático.

Paso 12. Resuélvase la ecuación (14), $|\mathbf{F}'_{34}| = |\Sigma(\mathbf{A} \times \mathbf{B})|/|\mathbf{R}_B \times \hat{\mathbf{F}}'_{34}|$, en donde $\Sigma(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{R}_{G_4} \times m_4\mathbf{A}_{G_4} - \mathbf{R}_D \times \mathbf{F}_D + I_4\boldsymbol{\alpha}_4$, y $\hat{\mathbf{F}}'_{34} = \cos\theta_3\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta_3\hat{\mathbf{j}}$.

Paso 13. Resuélvase la ecuación (15), $\mathbf{F}'_{14} = -\mathbf{F}'_{34} + m_4\mathbf{A}_{G_4} - \mathbf{F}_D$.

Paso 14. Resuélvase la ecuación (16), $|\mathbf{F}''_{34}| = |\Sigma(\mathbf{A} \times \mathbf{B})|/|\mathbf{R}_{BA} \times \hat{\mathbf{F}}''_{34}|$, en donde $\Sigma(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{R}_{G_3A} \times (-m_3\mathbf{A}_{G_3}) + \mathbf{R}_{CA} \times \mathbf{F}_C - I_3\boldsymbol{\alpha}_3$ y $\hat{\mathbf{F}}''_{34} = \cos\theta_4\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta_4\hat{\mathbf{j}}$.

Paso 15. Resuélvase la ecuación (17), $F^x_{34} = F'_{34}\cos\theta_3 + F''_{34}\cos\theta_4$. $F^y_{34} = F'_{34}\operatorname{sen}\theta_3 + F''_{34}\operatorname{sen}\theta_4$; Eq. (18), $F^x_{14} = -F'_{34}\cos\theta_3 - F''_{34}\cos\theta_4$, $F^y_{14} = -F'_{34}\operatorname{sen}\theta_3 - F''_{34}\operatorname{sen}\theta_4$.

Paso 16. Resuélvase la ecuación (19), $\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_C + m_3\mathbf{A}_{G_3} - \mathbf{F}_{43}$.

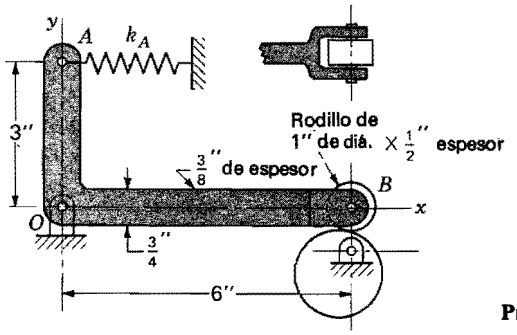
Paso 17. Resuélvase la ecuación (20), $\mathbf{T}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{23}$.

Paso 18. Resuélvase la ecuación (21), $\theta_2 = \theta_2 + \Delta\theta_2$, y regrésese al paso 1.

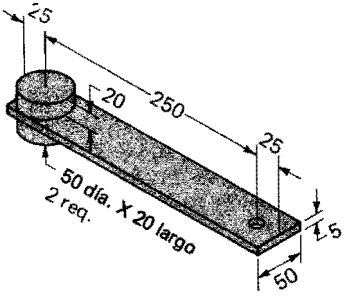
PROBLEMAS

13-1 La palanca angular de acero que se ilustra en la figura se usa como un seguidor oscilante para leva. Hállase el momento de inercia de la masa de la palanca en torno al eje que pasa por O. Úsese $w = 0.282$ lb/pulg^3 como peso unitario del acero.

13-2 Una barra de acero de 5 por 50 por 300 mm tiene dos discos de acero redondos cada uno con 50 mm de diámetro y 20 mm de longitud, soldados en uno de los extremos, como se indica. Se hace una



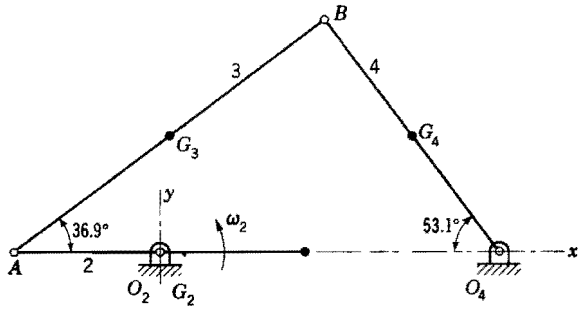
Problema 13-1



Problema 13-2 Dimensiones en milímetros.

perforación a 25 mm del extremo. Calcúlese el momento de inercia de la masa de este conjunto, en torno a un eje que pase por la perforación. La densidad de masa del acero es 7.80 Mg/m^3.

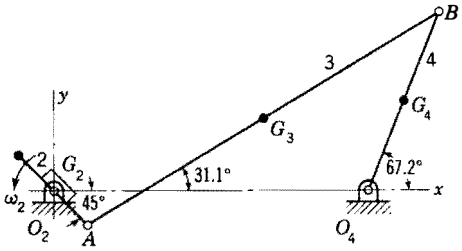
13-3 Hállese el momento de torsión externo que se debe aplicar al eslabón 2 del mecanismo ilustrado en la figura para impulsarlo a la velocidad dada.



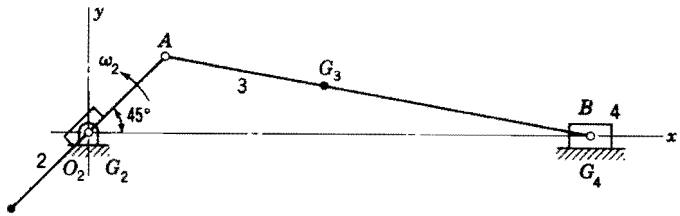
Problema 13-3 O_2A = 3 pulg, AG_3 = 4 pulg, AB = 8 pulg, O_4G_4 = 3 pulg, O_4B = 6 pulg, O_2O_4 = 7 pulg, $\omega_2 = 180\hat{k}$ rad/s, W_3 = 0.708 lb, W_4 = 0.780 lb, I_3 = 0.0154 lb · s^2 · pulg, I_4 = 0.0112 lb · s^2 · pulg, α_2 = 0 rad/s^2, $\alpha_3 = 4950\hat{k}$ rad/s^2, $\alpha_4 = -8900\hat{k}$ rad/s^2 $\mathbf{A}_{G_3} = 6320\hat{i} + 750\hat{j}$ pie/s^2, $\mathbf{A}_{G_4} = 2280\hat{i} + 750\hat{j}$ pie/s^2.

13-4 El eslabón 2 del eslabonamiento de cuatro barras que aparece en la figura está equilibrado. Para la velocidad angular dada del eslabón 2, calcúlense las fuerzas que actúan en cada articulación de pasador y el momento de torsión externo que se debe aplicar al eslabón 2.

13-5 Para la velocidad angular dada de la manivela 2 de la figura, encuéntrense las reacciones en cada articulación de pasador y el momento de torsión externo que se debe aplicar a la manivela.

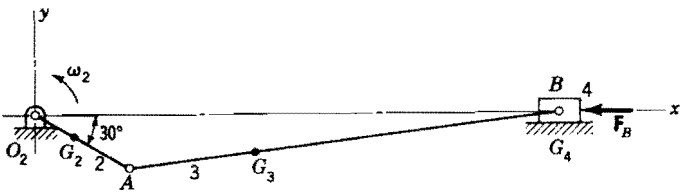


Problema 13-4 O_2A = 2 pulg, AG_3 = 8.50 pulg, AB = 17 pulg, O_4G_4 = 4 pulg, O_4B = 8 pulg, O_2O_4 = 13 pulg, $\boldsymbol{\omega}_2 = 200\hat{\mathbf{k}}$ rad/s, W_3 = 2.65 lb, W_4 = 6.72 lb, I_3 = 0.0606 lb · s² · pulg, I_4 = 0.531 lb · s² · pulg, $\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$ rads/s², $\boldsymbol{\alpha}_3 = -6530\hat{\mathbf{k}}$ rad/s², $\boldsymbol{\alpha}_4 = -240\hat{\mathbf{k}}$ rad/s², $\mathbf{A}_{G_3} = -3160\hat{\mathbf{i}} + 262\hat{\mathbf{j}}$ pie/s², $\mathbf{A}_{G_4} = -800\hat{\mathbf{i}} - 2110\hat{\mathbf{j}}$ pie/s².



Problema 13-5 O_2A = 3 pulg, AG_3 = 4.5 pulg, AB = 12 pulg, $\boldsymbol{\omega}_2 = 210\mathbf{k}$ rad/s, $\boldsymbol{\omega}_3 = -37.7\hat{\mathbf{k}}$ rad/s, $\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$ rad/s², $\boldsymbol{\alpha}_3 = 7670\hat{\mathbf{k}}$ rad/s², $\mathbf{A}_{G_3} = -7820\hat{\mathbf{i}} - 4876\hat{\mathbf{j}}$ pie/s², $\mathbf{A}_B = -7850\hat{\mathbf{i}}$ pie/s², W_3 = 3.40 lb, W_4 = 2.86 lb, I_3 = 0.1085 · s² · pulg.

13-6 En la figura se presenta un mecanismo de motor con una fuerza externa F_B aplicada al pistón. Para la velocidad dada de la manivela, calcúlense todas las reacciones en los pasadores y el momento de torsión de la manivela.

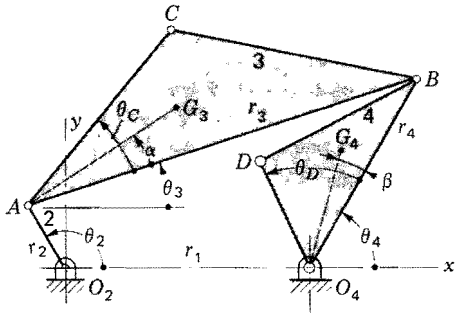


Problema 13-6 O_2G_2 = 1.25 pulg, O_2A = 3 pulg, AG_3 = 3.5 pulg, AB = 12 pulg, $\boldsymbol{\omega}_2 = 160\hat{\mathbf{k}}$ rad/s, $\boldsymbol{\omega}_3 = -35\hat{\mathbf{k}}$ rad/s, $\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$ rad/s², $\boldsymbol{\alpha}_3 = -3090\hat{\mathbf{k}}$ rad/s², $\mathbf{A}_{G_2} = 2640\underline{/150°}$ pie/s², $\mathbf{A}_{G_3} = 6130\underline{/158.3°}$ pie/s², $\mathbf{A}_B = 5280\underline{/180°}$ pie/s², W_2 = 0.95 lb, W_3 = 3.50 lb, W_4 = 2.50 lb, I_2 = 0.003 69 lb · s² · pulg, I_3 = 0.110 lb · s² · pulg, $\mathbf{F}_B = 800\underline{/180°}$ lb.

13-7 Los siguientes datos, todos en unidades básicas SI, pertenecen al eslabonamiento de cuatro barras que aparece en la figura de este problema: $r_1 = 0.9$, $r_2 = 0.3$, $r_3 = 1.5$, $r_4 = 0.8$. $AG_3 = 0.65$, $O_4G_4 = 0.45$, $AC = 0.85$, $O_4D = 0.4$, $\alpha = 16°$, $\theta_C = 33°$, $\beta = 17°$, $\theta_D = 53°$, $m_3 = 65.8$, $m_4 = 21.8$, $I_3 = 4.2$, $I_4 = 0.51$.

El eslabón 2 está balanceado. Un análisis cinemático realizado para $\theta_2 = 60°$ y $\omega_2 = 12$ rad/s da $\theta_3 = 0.7°$, $\theta_4 = 20.4°$, $\alpha_3 = -85.6$ rad/s², $\alpha_4 = -172$ rad/s², $\mathbf{A}_{G_3} = 96.4\underline{/259°}$ m/s², y $\mathbf{A}_{G_4} = 97.8\underline{/270°}$ m/s².

Hágase un análisis dinámico completo y calcúlense todas las reacciones en los pasadores, así como el momento de torsión que se debe aplicar al eslabón 2.



Problema 13-7

13-8 Repítase el problema 13-7 si en el punto D actúa una fuerza externa $\mathbf{F}_D = 12\angle 0°$ kN

13-9 Hágase un análisis cinemático y dinámico completo del eslabonamiento del problema 13-7, utilizando los mismos datos, pero con $\theta_2 = 170°$, $\omega_2 = 12$ rad/s, y una fuerza externa $\mathbf{F}_D = 8.94\angle 63.4°$ kN.

13-10 Repítase el problema 13-9 utilizando, $\theta_2 = 200°$, $\omega_2 = 12$ rad/s y una fuerza externa $\mathbf{F}_C = 8.49\angle 45°$kN.

13-11 Para $\theta_2 = 270°$ y $\omega_2 = 18$ rad/s, un análisis cinemático del eslabonamiento cuya geometría es la que se describe en el problema 13-7, da $\theta_3 = 46.6°$, $\theta_4 = 80.5°$, $\alpha_3 = -178$ rad/s^2, $\alpha_4 = -256$ rad/s^2, $\mathbf{A}_{G_3} = 112\angle 22.7°$ m/s^2, $\mathbf{A}_{G_4} = 119\angle 352.5°$ m/s^2. Una fuerza externa $\mathbf{F}_D = 8.60\angle 215.5°$ kN actúa en el punto D. Hágase un análisis dinámico completo del eslabonamiento.

13-12 Los siguientes datos se aplican al eslabonamiento de cuatro barras ilustrado para el problema 13-7: $r_1 = 300$ mm, $r_2 = 120$ mm, $r_3 = 320$ mm, $r_4 = 250$ mm, $AG_3 = 200$ mm, $O_4G_4 = 125$ mm, $AC = 360$ mm, $O_4D = 0$, $\alpha = 8°$, $\theta_C = 15°$, $\beta = \theta_D = 0$.

El análisis cinemático en $\theta_2 = 90°$ y $\omega_2 = 32$ rad/s dio los siguientes resultados: $\theta_3 = 23.9°$, $\theta_4 = 91.7°$, $\alpha_3 = 221$ rad/s^2, $\alpha_4 = 122$ rad/s^2, $\mathbf{A}_{G_3} = 88.6\angle 255°$ m/s^2, y $\mathbf{A}_{G_4} = 32.6\angle 244°$ m/s^2.

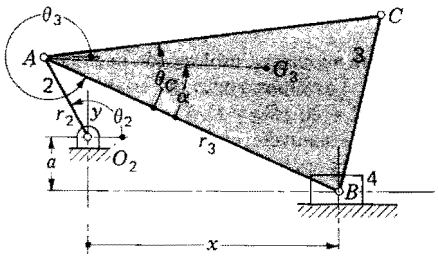
Asimismo $m_3 = 4$ kg, $I_3 = 0.011$ kg · s^2 · m, $m_4 = 1.5$ kg, e $I_4 = 0.0023$ kg · s^2 · m.

Suponiendo que se usa una fuerza externa $\mathbf{F}_C = 632\angle 342°$ N, hágase un análisis dinámico completo del sistema.

13-13 Repítase el problema 13-12 $\theta_2 = 260°$. Analícense tanto la cinemática como la dinámica del sistema en esta posición.

13-14 Repítase el problema 13-13 si $\theta_2 = 300°$.

13-15 Analícese la dinámica del eslabonamiento excéntrico de corredera y manivela ilustrado en la figura, aplicando los siguientes datos: $\theta_2 = 120°$, $a = 0.06$ m, $r_2 = 0.1$ m, $r_3 = 0.38$ m, $AC = 0.4$ m, $AG_3 = 0.26$ m, $\omega_2 = -18$ rad/s, $\alpha = 22°$, $\theta_C = 32°$, $m_3 = 7.4$ kg, $m_4 = 3.2$ kg, $I_3 = 0.0136$ kg · s^2 · m, $\mathbf{F}_C = -1000\hat{\mathbf{i}}$ N, $\mathbf{F}_{34} = -2000\hat{\mathbf{i}}$ N. Supóngase que la manivela está balanceada y no hay fuerzas de fricción.



Problema 13-15

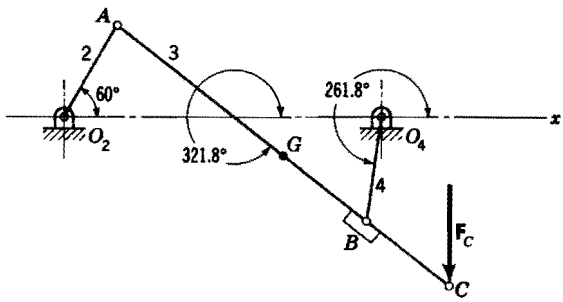
13-16 Analícese el sistema del problema 13-15 para una rotación completa de la manivela. Supóngase que $F_C = 0$ y $F_{14}^{\dagger} = -1000$ N cuando $\dot{x}$ es positiva, y $F_{14}^{\dagger} = 0$ cuando $\dot{x}$ es negativa. Supóngase que la manivela está equilibrada. Hágase una gráfica de T_2 y $F_{14}^{\dagger}$ contra θ_2.

13-17 Un eslabonamiento de corredera y manivela similar al del problema 13-15 tiene una excentricidad cero y $r_2 = 0.10$ m, $r_3 = 0.45$ m, $AC = 0$, $AG_3 = 0.20$ m, $\omega_2 = -24$ rad/s, $\alpha = \theta_C = 0$, $m_3 = 3.5$ kg, $m_4 = 1.2$ kg, $I_3 = 0.060\,\text{kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}$ y $T_2^{\dagger} = 60\,\text{N} \cdot \text{m}$. Correspondiendo a $\theta_2 = 135°$, un análisis cinemático dio $\theta_3 = -9.0°$, $\alpha_3 = 89.3\,\text{rad/s}^2$, $x = 0.374$ m, $\ddot{x} = 40.6\,\text{m/s}^2$ y $\mathbf{A}_{G_3} = 40.6\hat{\mathbf{i}} - 22.6\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s}^2$. Determínense $\mathbf{F}_{14}$ y $\mathbf{F}_{23}$ suponiendo que el eslabón 2 está equilibrado.

13-18 Repítase el problema 13-17 si $\theta_2 = 240°$. Los resultados de un análisis cinemático son: $\theta_3 = 11.1°$, $\alpha_3 = -112\,\text{rad/s}^2$, $x = 0.392$ m, $\ddot{x} = 35.2\,\text{m/s}^2$, $\mathbf{A}_{G_3} = 31.6\hat{\mathbf{i}} + 27.7\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s}^2$.

13-19 Un eslabonamiento excéntrico de corredera y manivela, como el del problema 13-15, tiene $a = 0.08$ m, $r_2 = 0.25$ m, $r_3 = 1.25$ m, $AC = 1.0$ m, $AG_3 = 0.75$ m, $\omega_2 = 6$ rad/s, $\alpha = -18°$, $\theta_C = -38°$, $m_3 = 140$ kg, $m_4 = 50$ kg y $I_3 = 8.42\,\text{kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}$. Hágase un análisis cinemático y dinámico completo de este sistema cuando $\theta_2 = 25°$ con $\mathbf{F}_C = 80\angle\underline{-60°}$ kN y $F_{14}^{\dagger} = -50$ kN. Supóngase que la manivela está balanceada.

13-20 Las manivelas 2 y 4 del eslabonamiento cruzado que aparece en la figura están balanceadas. Las dimensiones del eslabonamiento son: $O_2A = 6$ pulg, $AB = 18$ pulg, $AG = 12$ pulg, $AC = 24$ pulg, $O_2O_4 = 18$ pulg y $O_4B = 6$ pulg. Correspondiente a la posición que se muestra y con $\omega_2 = 10$ rad/s, un análisis cinemático dio los resultados $\omega_3 = -1.43$ rad/s, $\omega_4 = -11.43$ rad/s, $\alpha_3 = \alpha_4 = 84.7\,\text{rad/s}^2$ y $\mathbf{A}_{G_3} = 47.6\hat{\mathbf{i}} + 70.3\hat{\mathbf{j}}\,\text{pie/s}^2$. También $W_3 = 4$ lb, $I_3 = 0.497\,\text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg}$ e $I_4 = 0.063\,\text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg}$. Si $\mathbf{F}_C = -30\hat{\mathbf{j}}$ lb y el eslabón 2 es el impulsor, encuéntrese el momento de torsión impulsor y las reacciones en los pasadores.



Problema 13-20

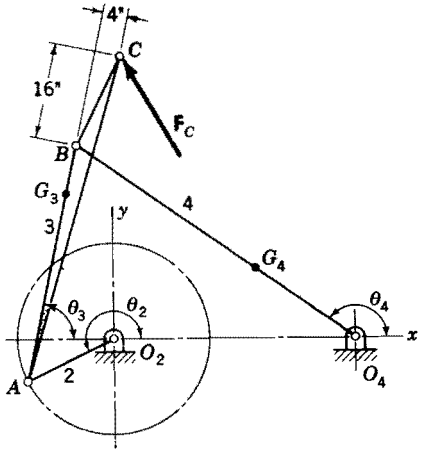
13-21 Calcúlese el momento de torsión impulsor y las reacciones en los pasadores para el mecanismo del problema 13-20, si la manivela 4 es el impulsor.

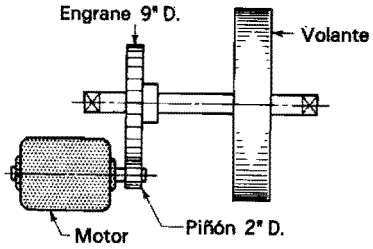
13-22 Un análisis cinemático del mecanismo del problema 13-20, cuando $\theta_2 = 210°$, dio $\theta_3 = 14.7°$, $\theta_4 = 164.7°$, $\omega_3 = 4.73$ rad/s, $\omega_4 = -5.27$ rad/s, $\alpha_3 = \alpha_4 = -10.39\,\text{rad/s}^2$ y $\mathbf{A}_{G_3} = 26\angle\underline{20.85°}\,\text{pie/s}^2$. Calcúlense T_2 y las reacciones en los pasadores para esta fase del movimiento, usando la misma fuerza $\mathbf{F}_C$ del problema 13-20.

13-23 La parte (*a*) de la figura muestra un eslabonamiento con un acoplador prolongado que tiene una fuerza externa $\mathbf{F}_C$ que actúa durante una porción de la carrera. Las dimensiones del eslabonamiento son: $O_2A = 16$ pulg, $AG_3 = 32$ pulg, $AB = O_2O_4 = 40$ pulg, $O_4G_4 = 20$ pulg y $O_4B = 56$ pulg. Hágase un análisis cinemático y dinámico para una rotación completa de la manivela, con $\omega_2 = 10$ rad/s y $\mathbf{F}_C = -500\hat{\mathbf{i}} + 866\hat{\mathbf{j}}$ lb para $90° \leq \theta_2 \leq 300°$ suponiendo que $F_C = 0$ para los otros ángulos. Úsese $W_3 = 222$ lb, $W_4 = 208$ lb, $I_3 = 226\,\text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg}$, $I_4 = 264\,\text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg}$ y supóngase una manivela balanceada.

13-24 En la parte (*b*) de la figura se ilustra un motor engranado a un eje en el que está montado un volante. Los momentos de inercia de las piezas son como siguen: volante, $I = 2.73\,\text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg}$; eje del

volante, $I = 0.0155\ \text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg}$; engrane, $I = 0.172\ \text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg}$. s^2. pulg; piñón, $I = 0.003\,49\ \text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot$ pulg; motor, $I = 0.0864\ \text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot$ pulg. Si el motor tiene un momento de torsión de arranque de 75 lb · pulg, ¿cuál es la aceleración angular del eje del volante en el instante en que se cierra el interruptor del motor?





Problemas 13-23 y 13-24

CAPÍTULO

CATORCE

DINÁMICA DE LOS MOTORES DE PISTONES

El propósito de este capítulo es aplicar los fundamentos análisis cinemático y dinámico en una investigación completa de un grupo particular de máquinas. Se ha seleccionado el motor de pistón con este fin, porque ha alcanzado un estado de desarrollo muy elevado y es de interés más general que otras máquinas. Sin embargo, para los fines de esta obra, cualquier máquina o grupo de máquinas que comprenda situaciones dinámicas interesantes serviría para el mismo fin. El objetivo primario consiste en demostrar los métodos para aplicar los fundamentos al análisis de cualquier máquina.

14-1 TIPOS DE MOTORES

La descripción y las características de todos los motores que se han concebido y construido llenarían muchos libros. El propósito de este estudio es delinear en forma muy somera unos cuantos de los tipos de motores de uso general y de gran popularidad actual. No se pretende que la exposición sea completa. Es más, puesto que se espera que el lector tenga cierta inclinación hacia la mecánica y esté familiarizado en forma general con los motores de combustión interna, el propósito principal de esta sección es simplemente registrar hechos que ya conoce y ofrecer una nomenclatura para el resto del capítulo.

En esta sección se incluyen también, a fin de ubicarlo todo en un solo sitio, las descripciones y especificaciones de algunos de los motores más interesantes. De esta manera se contará fácilmente con el material para utilizarlo en los problemas y ejemplos.

En este capítulo se clasifican los motores según el uso para el que fueron creados, el ciclo de combustión utilizado, y el número y disposiciones de los cilin-

dros. Así pues, se citarán, por ejemplo, motores de avión, automóviles, marinos y estacionarios, llamados así de acuerdo con el propósito para el que fueron diseñados. Del mismo modo, se podría tener en mente un motor diseñado basándose en el *ciclo Otto,* en el que se mezclan el combustible y el aire antes de la compresión, y en los que la combustión se efectúa sin aire en exceso, o bien el *motor diesel*, en el que el combustible se inyecta cerca del fin de la compresión y la combustión se lleva a cabo con un exceso sustancial de aire. El motor de ciclo Otto emplea combustibles un tanto volátiles y la ignición se realiza por medio de una chispa; pero el motor de ciclo diesel opera con combustibles de baja volatilidad y la ignición se produce debido a la compresión.

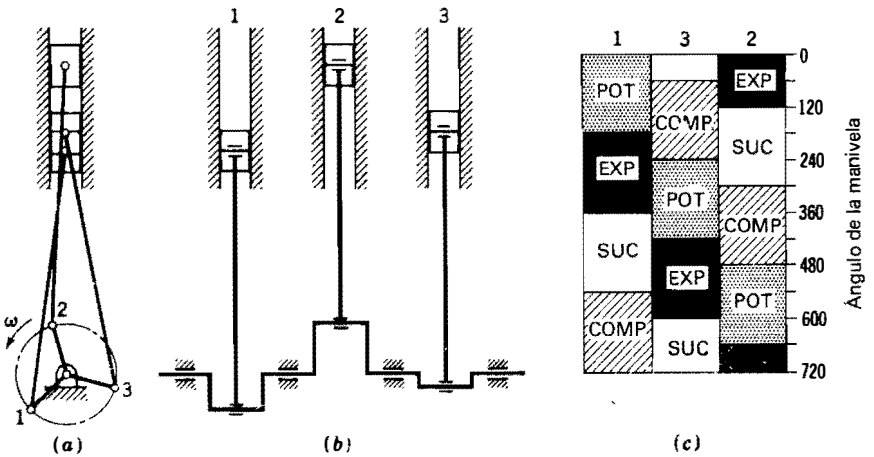


Figura 14-1 Motor en línea de tres cilindros: *a*) vista frontal, *b*) vista lateral, *c*) orden de encendido.

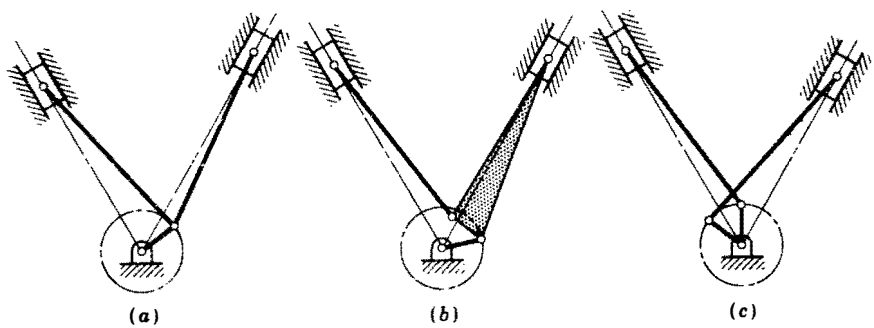


Figura 14-2 Disposiciones de las manivelas de motores V: *a*) una sola manivela por par de cilindros; las bielas se conectan entre sí y son de diseños de *horquilla y hoja*; *b*) una sola manivela por par de cilindros; la *biela maestra* tiene un cojinete para la *biela articulada*; *c*) manivelas separadas se conectan a pistones escalonados.

Los motores de los ciclos diesel y Otto pueden clasificarse como de *ciclo de dos tiempos* o de *ciclo de cuatro tiempos*, dependiendo del número de carreras del pistón requeridas para el ciclo completo de combustión. Muchos motores marinos de fuera de borda utilizan el proceso con ciclo de dos tiempos (o sencillamente de dos ciclos), en los que el pistón descubre las lumbreras de expulsión en la pared del cilindro, cerca del final de la carrera de expansión, y permite que salgan los gases de escape. Instantes después de que se abren las lumbreras de expulsión, también

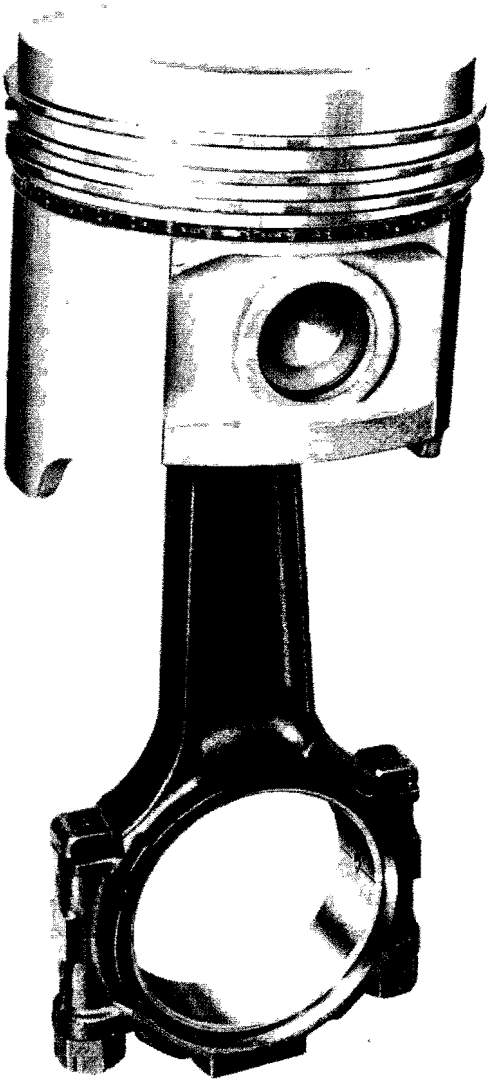


Figura 14-3 Conjunto de pistón y biela para un motor de camión V6 de 351 pulg³. (*GMC Truck and Coach Division, General Motors Corporation, Pontiac, Michigan.*)

se abren las de admisión y permiten la entrada a una mezcla precomprimida de combustible y aire, que contribuye también a expulsar los gases de escape remanentes. A continuación se cierran las lumbreras cuando el pistón se mueve en sentido ascendente y la mezcla de combustible se vuelve a comprimir. Luego se reinicia el ciclo. Nótese que el motor de dos ciclos tiene una carrera de expansión y otra de compresión, y que ambas ocurren durante una revolución de la manivela.

El motor de cuatro ciclos cuenta con cuatro carreras de pistón en un solo ciclo de combustión, correspondiendo a dos revoluciones de la manivela. Los eventos que corresponden a los cuatro tiempos son: 1) carrera de expansión, o de potencia, 2) expulsión, 3) carrera de succión o admisión, 4) compresión.

Los motores de varios cilindros se clasifican de manera general según como estén dispuestos los cilindros unos con relación a los otros y respecto al cigüeñal. Así pues, un motor *en línea* es aquél en el que los ejes de los pistones forman un solo plano que coincide con el cigüeñal, y en el que los pistones están todos hacia el mismo lado de este último. En la figura 14-1 se tiene un dibujo esquemático de un motor en línea de tres cilindros, en el que las manivelas están espaciadas 120°; como dato interesante se incluye el diagrama del orden de encendido para la operación en cuatro ciclos.

Un motor tipo V utiliza dos bancos de uno o más ciclindros en línea cada uno y un solo cigüeñal. En la figura 14-2 se ilustran varias disposiciones comunes de las

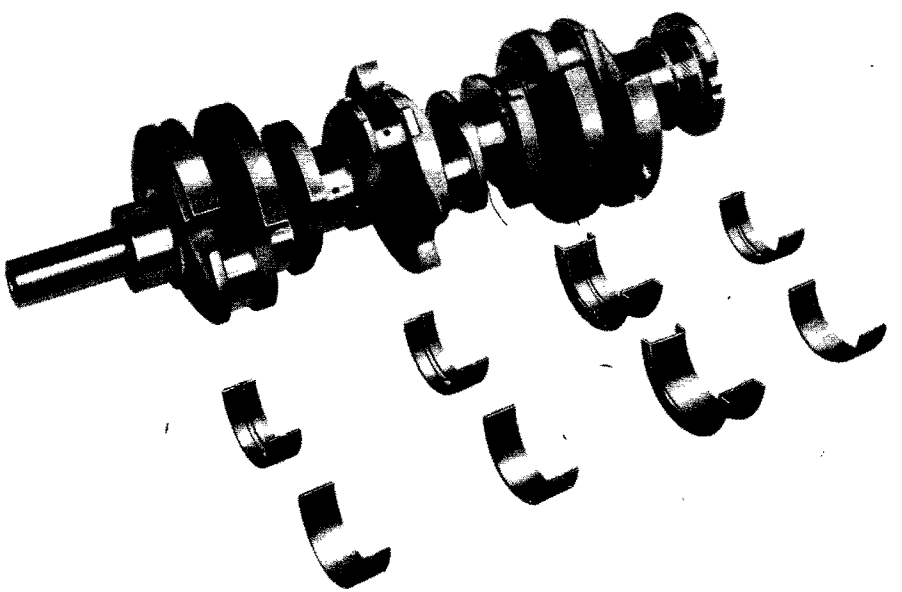


Figura 14-4 Cigüeñal de fundición para un motor de camión V6 de 305 pulg³ (*GMC Truck and Coach Division, General Motors Corporation, Pontiac, Michigan.*)

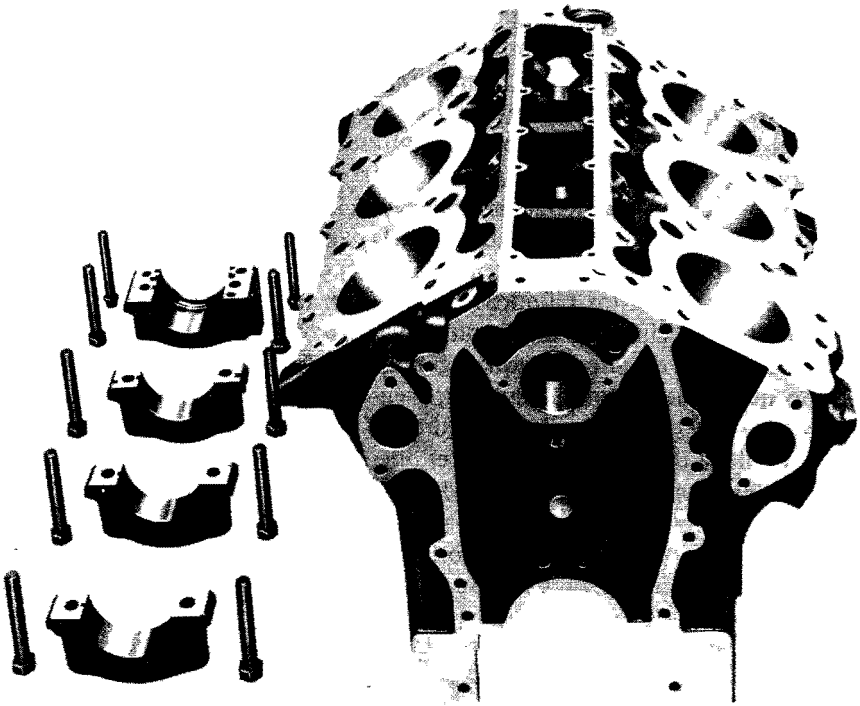


Figura 14-5 Monobloque para un motor de camión V6 de 305 pulg³. Se usa la misma pieza fundida para un motor de 351 pulg³, calibrando los cilindros para pistones más grandes. (*GMC Truck and Coach Division, General Motors Corporation, Pontiac, Michigan.*)

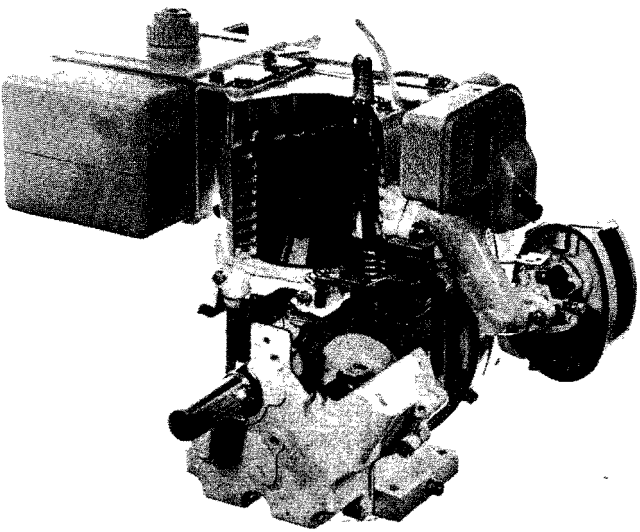


Figura 14-6 Motor de un solo cilindro modelo HM80. (*Tecumseh Products Company, Lauson Engine Division, New Holstein, Wisconsin.*)

manivelas. Los pistones que se encuentran en los bancos derecho e izquierdo de (*a*) y (*b*) se encuentran en el mismo plano; pero los de (*c*) están en planos diferentes.

Si el ángulo V se incrementa hasta 180°, el resultado se conoce con el nombre de motor de *pistones opuestos*. El motor opuesto puede tener dos ejes para dos pistones, coincidentes o excéntricos, y las bielas pueden conectarse a la misma manivela o a manivelas separadas con un espaciamiento de 180°.

El motor *radial* es aquél que tiene los pistones dispuestos en un círculo en torno al centro de la manivela. Los motores radiales utilizan una biela maestra para un cilindro y los pistones restantes se conectan a la biela maestra por medio de bielas articuladas de modo muy parecido al motor en V de la figura 14-2*b*.

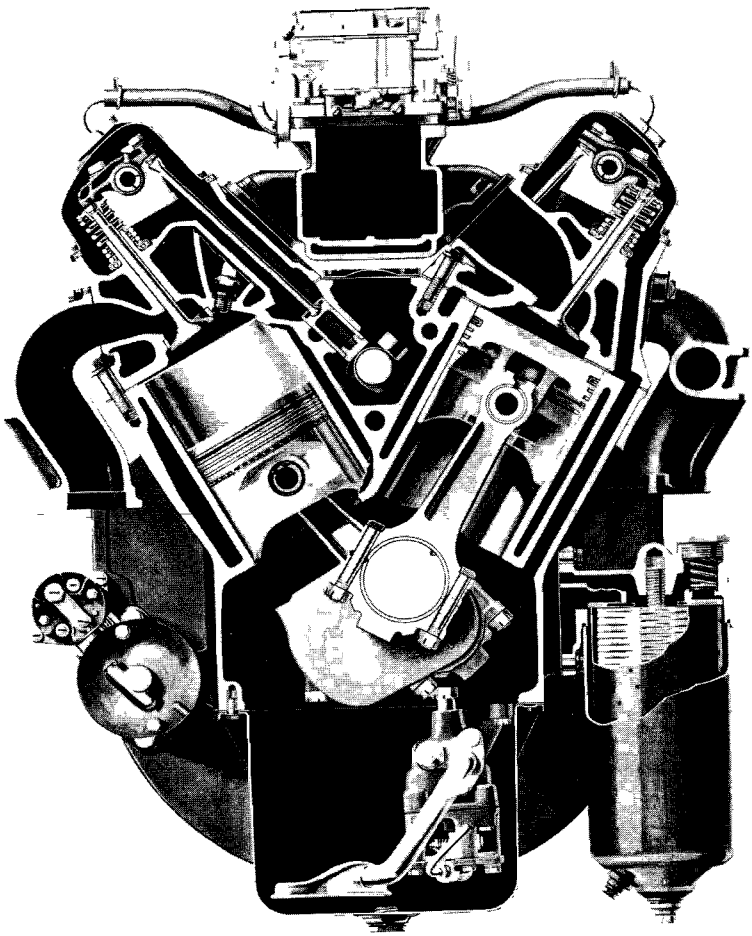


Figura 14-7 Vista de la sección transversal del motor de camión V6 de 401 pulg³ (*GMC Truck and Coach Division, General Motors Corporation, Pontiac, Michigan.*)

En las figuras 14-3 a 14-5 se ilustran, respectivamente, el conjunto pistón-biela, el cigüeñal y el monobloque de un motor de camión V6. Éstos se incluyen como típicos del diseño moderno, para mostrar la forma de las piezas importantes de un motor, y para referencia futura.

Las especificaciones que siguen darán una idea general del rendimiento y diseño de los motores modernos, junto con los tamaños de las piezas que se usan en ellos.

Tecumseh Products Company, Lauson Engine Division, New Holstein, Wisconsin. El motor de un solo cilindro, modelo HM 80 que se muestra en la figura 14-6, tiene las siguientes especificaciones: 5.0 hp a 2 200 rpm; 6.9 hp a 2 900 rpm; 8.0 hp a 3 600 rpm; arrancador recuperador; peso neto, 46 lb; diámetro interior, $3\frac{1}{8}$ pulg (79.38 mm), $2\frac{17}{32}$ pulg carrera, (64.31 mm); desplazamiento, 19.41 pulg^3 (318.27 mL); ciclo de cuatro tiempos; enfriamiento por aire; rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj visto desde el lado de la toma de potencia; peso del conjunto del pistón, 0.530 lb (0.2405 kg); peso del conjunto de la biela, 0.365 lb (0.1655 kg); longitud de la biela, 3.956 pulg; 1.34 pulg desde el cojinete del muñón del cigüeñal hasta el centro de masa de la biela; volante, $Wr^2 = 69.6$ lb·pulg^2.

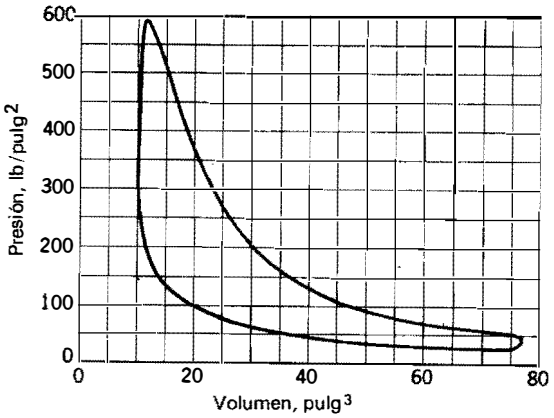


Figura 14-8 *Diagrama del indicador típico para un motor de camión V6 de 401 pulg^3; condiciones desconocidas. (GMC Truck and Coach Division, General Motors Corporation, Pontiac, Michigan.)*

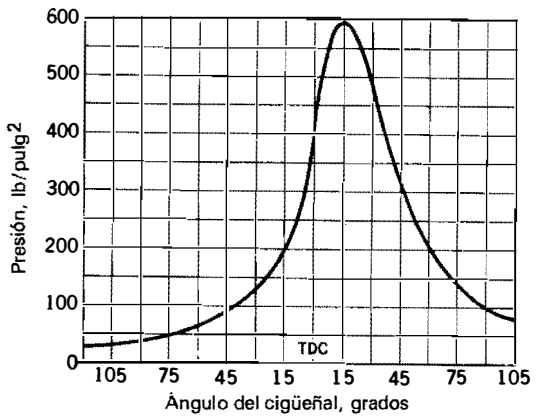


Figura 14-9 Curva presión-tiempo para el motor de camión V6 de 401 pulg^3. Estos datos se tomaron de un motor en funcionamiento. *(GMC Truck and Coach Division, General Motors Corporation, Pontiac, Michigan.)*

Pesos con movimiento alternativo	Gramos
Pistón	1 560
Pasador del pistón	317.5
Anillos del pistón	127.0
Retenes	0.34
Biela	360.0
Total	2 364.84
Peso balanceado con movimiento alternativo	1 182.42
Pesos giratorios:	
Biela	926.00
Cojinetes	101.28
Total	2 209.70

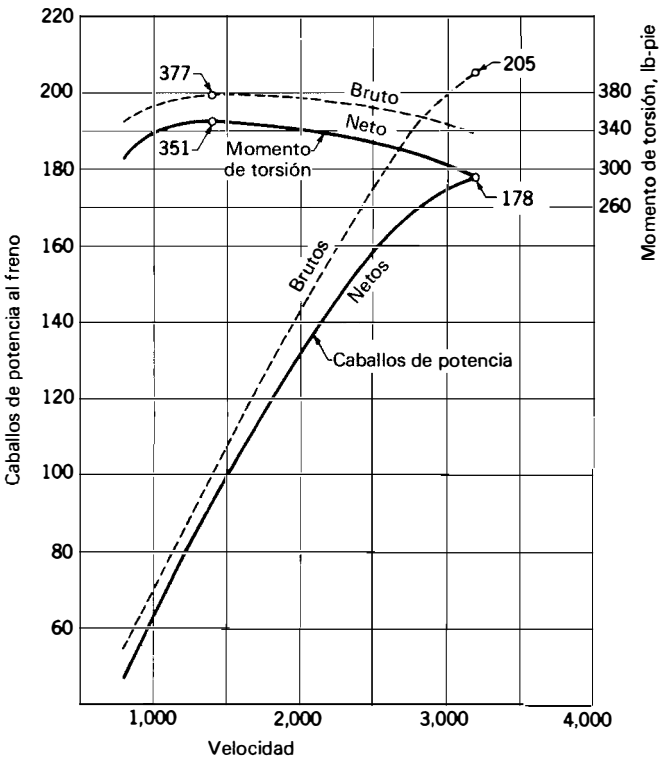


Figura 14-10 Características de caballos de potencia y momento de torsión, o por motor, del motor de camión V6 de 401 pulg^3. La curva a trazo continuo es la salida neta con el motor instalado; la curva a trazos es la salida máxima sin accesorios. Obsérvese que el momento de torsión máximo se produce a una velocidad del motor muy baja. (*GMC Truck and Coach Division, General Motors, Corporation, Pontiac, Michigan.*)

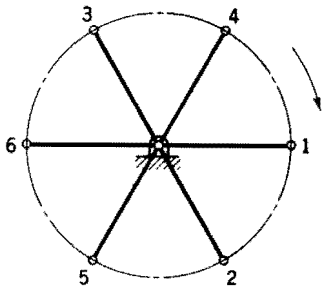


Figura 14-11 Vista frontal de un motor de camión V6 en donde se indica la diposición de las manivelas y también la dirección de rotación.

GMC Truck and Coach Division, General Motors Corporation, Pontiac, Michigan. En la figura 14-7 se ilustra uno de los motores de camión V6. Estos motores se fabrican encuatro desplazamientos e incluyen un modelo, un V12 (702 pulgx), que se describe como un seis gemelo, porque muchas de las piezas V6 son intercambiables con él. Los datos aquí incluidos se restringen al motor de 401 pulg^3. En las figuras 14-8, 14-9 y 14-10 se presentan las curvas típicas de rendimiento. Las especificaciones son las siguientes: diámetro interior, 4.875 pulg; carrera, 3.56 pulg; diseño en V de 60°; razón de compresión, 7.50:1; los cilindros se numeran del frente a la parte posterior, 1, 3, 5 en el banco izquierdo y 2, 4, 6 en el derecho; el orden de encendido es 1, 6, 5, 4, 3, 2; la disposición del cigüeñal es la que se indica en la figura 14-11; longitud de la biela, 7.19 pulg.

14-2 DIAGRAMAS DEL INDICADOR

En los experimentos, se usa un instrumento llamado *indicador del motor* para medir la variación de la presión dentro de un cilindro. El instrumento construye una gráfica durante la operación del motor, denominada *diagrama del indicador*. Las constantes conocidas del indicador hacen posible el estudio del diagrama y determinan la relación entre la presión de gas y el ángulo de la manivela para el conjunto particular de condiciones de operación que prevalecían en el momento en que se tomó el diagrama.

Cuando un motor se encuentra en la etapa de diseño, es necesario estimar un diagrama a partir de consideraciones teóricas. Con base en esa aproximación se puede diseñar y construir un modelo piloto del motor propuesto y tomar y comparar el diagrama del indicador real con el que se ideó teóricamente. Esto proporciona mucha información útil para el diseño del modelo de producción.

En la figura 14-12 se muestra un diagrama del indicador para el ciclo ideal estándar del aire para un motor de un ciclo de cuatro tiempos. Durante la compresión, el volumen del cilindro cambia de v_1 a v_2 y la presión del cilindro varía de p_1 a p_2. La relación en cualquier punto de la carrera se da mediante la ley politrópica de los gases como

$$p_x v_x^k = p_1 v_1^k = \text{constante} \tag{14-1}$$

En una gráfica real del indicador, los vértices en los puntos 2 y 3 están redondeados y la línea que los une es curva. Esto se explica por el hecho de que la combustión no es instantánea y la ignición ocurre antes de que concluya la carrera de

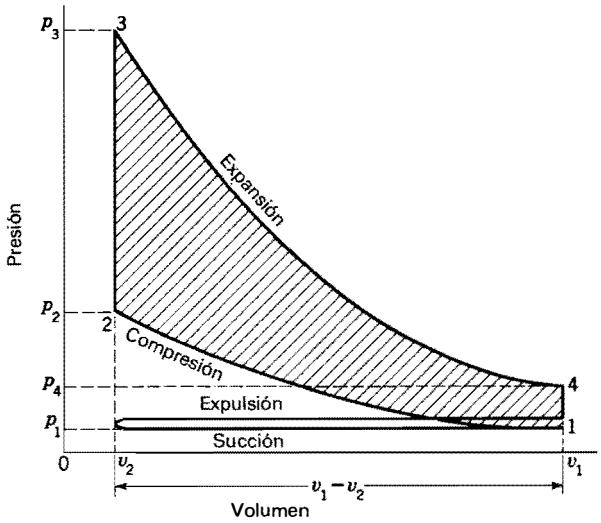


Figura 14-12 Diagrama del indicador ideal para un motor de cuatro ciclos.

compresión. Una gráfica real también está rodeada en los puntos 4 y 1 debido a que las válvulas no operan instantáneamente.

La exponente politrópico k de la ecuación (14-1) se toma a menudo como 1.30, tanto para la compresión como para la expansión, aunque probablemente existan diferencias.

La relación entre los caballos de potencia desarrollados y las dimensiones del motor está dada por

$$\text{bhp} = \frac{p_b l a n}{(33\,000)(12)} \tag{14-2}$$

en donde bhp = caballos de potencia al freno (*brake horsepower*) por cilindro
p_b = presión efectiva media al freno, lb/pulg^2 (psi)
l = longitud de la carrera, pulg
a = área del pistón, pulg^2
n = número de carreras de trabajo por minuto

La cantidad de caballos de potencia que se
de desplazamiento del pistón varía considerablemente, dependiendo del tipo de motor. En el caso de motores de automóviles, varía desde aproximadamente 0.55 hasta 1.00 hp/pulg^3, con un promedio probable de 0.70 en la actualidad. Por otro lado, muchos motores marinos diesel tienen razones que varían de 0.10 a 0.20 hp/pulg^3. Lo mejor que se puede hacer al diseñar un nuevo motor, es utilizar referencias estándar para descubrir lo que otros han hecho con los mismos tipos de motores, y luego elegir un valor que parezca razonablemente asequible.

Para muchos motores, la razón del diámetro interno a la carrera varía de aproximadamente 0.75 a 1.00. La tendencia en el diseño de motores automotrices parece inclinarse a los de carrera más corta, con el fin de reducir la altura del motor.

Las decisiones que se tomen sobre la razón del diámetro interior a la carrera y los caballos de potencia por volumen unitario de desplazamiento, serán de gran utilidad al resolver la ecuación (14-2) para obtener dimensiones apropiadas cuando ya se ha decidido respecto a los caballos de potencia, la velocidad y el número de cilindros.

La razón de la presión media efectiva al freno p_b a la presión media efectiva indicada p_i, que se obtiene experimentalmente a partir de una gráfica del indicador, es la eficiencia mecánica e_m,

$$e_m = \frac{p_b}{p_i} \tag{14-3}$$

Se pueden tomar en cuenta las diferencias entre un diagrama del indicador determinado en forma teórica y uno hallado de manera experimental, aplicando una corrección llamada *factor de gráfica*. El factor de gráfica se define por

$$f_c = \frac{p_i}{p_i'} \tag{14-4}$$

en donde p_i' es la presión media efectiva indicada teórica y f_c es el factor de gráfica, por lo común de 0.90 a 0.95, aproximadamente.

Si la razón de compresión (Fig. 14-12) se define como

$$r = \frac{v_1}{v_2} \tag{14-5}$$

el trabajo realizado durante la compresión es

$$U_c = \int_{v_2}^{v_1} p\,dv = p_1 v_1^k \int_{v_2}^{v_1} \frac{dv}{v^k} = \frac{p_1 v_1}{k-1}(r^{k-1} - 1) \tag{a}$$

El volumen de desplazamiento se puede escribir

$$v_1 - v_2 = v_1 - \frac{v_1}{r} = \frac{v_1(r-1)}{r} \tag{b}$$

Cuando v_1 según se da en la ecuación (*b*) se sustituye en la (*a*), da

$$U_c = \frac{p_1(v_1 - v_2)}{k-1}\frac{r^k - r}{r-1} \tag{c}$$

El trabajo realizado durante la expansión es el área comprendida bajo la curva entre los puntos 3 y 4 de la figura 14-12. Éste se encuentra en la misma forma y el resultado es

$$U_e = \frac{p_4(v_1 - v_2)}{k-1}\frac{r^k - r}{r-1} \tag{d}$$

El trabajo neto realizado en un ciclo es la diferencia en las cantidades dadas por las ecuaciones (*c*) y (*d*), y debe ser igual al producto de la presión media efectiva indicada y el volumen de desplazamiento. Por tanto,

$$U = U_e - U_c = p_i'(v_1 - v_2)$$
$$= \frac{p_4(v_1 - v_2)}{k-1}\frac{r^k - r}{r-1} - \frac{p_1(v_1 - v_2)}{k-1}\frac{r^k - r}{r-1} \qquad (14\text{-}6)$$

Si el exponente es el mismo para la expansión que para la compresión, la ecuación (14-6) se puede resolver para dar

$$p_4 = p_i'(k-1)\frac{r-1}{r^k - r} + p_1 \qquad (e)$$

sustituyendo p_i para su expresión dada en (14-4), produce

$$p_4 = (k-1)\frac{r-1}{r^k - r}\frac{p_i}{f_c} \qquad (14\text{-}7)$$

Se pueden usar las ecuaciones (14-1) y (14-7) para crear el diagrama teórico del indicador. Luego se redondean los vértices para que la presión en el punto 3 se haga aproximadamente igual al 75% de la dada por la ecuación (14-1). Como verificación, se puede medir el área del diagrama y dividirse entre el volumen de desplazamiento. El resultado debe ser igual a la presión media efectiva indicada.

14-3 ANÁLISIS DINÁMICO; GENERALIDADES

Lo que resta de este capítulo está dedicado a un análisis de la dinámica del motor de un solo cilindro. Para simplificar este trabajo, las fuerzas de los gases y las de inercia se encuentran en secciones por separado. Luego, en otras secciones se combinan estas fuerzas, aplicando el principio de superposición para obtener las fuerzas en los cojinetes y el momento de torsión, o par motor, del cigüeñal.

El tema del balanceo del motor se estudia en el capítulo 15 y la dinámica del volante se analiza en el capítulo 17.

14-4 FUERZAS DE LOS GASES

En esta sección se supone que las partes móviles carecen de peso, de modo que las fuerzas de inercia y los momentos de torsión de inercia son cero y no existe fricción. Estas suposiciones hacen posible analizar el efecto de la presión del gas, desde el pistón hasta el cigüeñal, sin necesidad de tomar en cuenta los efectos complicadores de otras fuerzas.

En el capítulo 12 se presentaron métodos gráficos y vectoriales para analizar las fuerzas que se presentaran en cualquier mecanismo. Se puede aplicar cualquiera

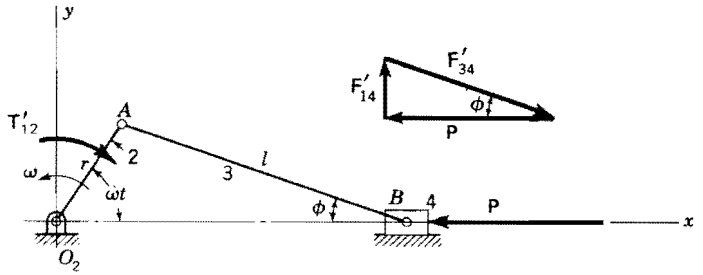


Figura 14-13

de estos métodos para resolver el problema de la fuerza de los gases. La ventaja del método vectorial es que puede programarse para obtener una solución automática en una calculadora o computadora. Para la solución gráfica se debe repetir para cada posición de la manivela, hasta que se completa un ciclo de operación (720° para un motor de cuatro ciclos). Puesto que es preferible no duplicar los estudios del capítulo 12, aquí se presenta un planteamiento algebraico.

En la figura 14-13 se designa el ángulo de la manivela como ωt, con dirección positiva cmr, y el ángulo de la biela es ϕ, positivo en la dirección indicada. Una relación entre estos dos ángulos es

$$r \operatorname{sen} \omega t = l \operatorname{sen} \phi \qquad (a)$$

Si la posición del pistón respecto a O_2 se designa mediante la coordenada x, se encuentra

$$x = r \cos \omega t + l \cos \phi = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \operatorname{sen} \omega t\right)^2} \qquad (14\text{-}8)$$

Para la mayor parte de los motores, la razón r/l es aproximadamente $\frac{1}{4}$, de modo que el valor máximo del segundo término bajo el radical es aproximadamente $\frac{1}{16}$, o quizá menos. Si se desarrolla el radical utilizando el teorema del binomio y se hace caso omiso de todos los términos, excepto los dos primeros, resulta

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \operatorname{sen} \omega t\right)^2} = 1 - \frac{r^2}{2l^2} \operatorname{sen}^2 \omega t \qquad (b)$$

Puesto que

$$\operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \qquad (c)$$

La ecuación (14-8) se convierte en

$$x = l - \frac{r^2}{4l} + r\left(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t\right) \qquad (14\text{-}9)$$

Haciendo las derivadas sucesivas para obtener la velocidad y la aceleración se obtiene

$$\dot{x} = -r\omega\left(\operatorname{sen}\omega t + \frac{r}{2l}\operatorname{sen} 2\omega t\right) \tag{14-10}$$

$$\ddot{x} = -r\alpha\left(\operatorname{sen}\omega t + \frac{r}{2l}\operatorname{sen} 2\omega t\right) - r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right) \tag{14-11}$$

Con referencia una vez más a la figura 14-13, se designa un vector fuerza de los gases como **P**, se define, o se obtiene, utilizando los métodos de la sección 14-2. Las reacciones debidas a esta fuerza se designan con un solo apóstrofo; de donde $\mathbf{F}'_{14}$ es la fuerza de la pared del cilindro que actúa contra el pistón. $\mathbf{F}'_{34}$ es la fuerza de la biela que actúa contra el pistón en su pasador. El polígono de fuerzas de la figura 14-13 muestra la relación entre **P**, $\mathbf{F}'_{14}$, y $\mathbf{F}'_{34}$. Por consiguiente, se tiene

$$\mathbf{F}'_{14} = P\tan\phi\,\hat{\mathbf{j}} \tag{14-12}$$

La cantidad tan ϕ aparece con frecuencia en las expresiones de este capítulo; por tanto, resulta conveniente desarrollar una expresión en términos del ángulo de la manivela ωt. En consecuencia,

$$\tan\phi = \frac{(r/l)\operatorname{sen}\omega t}{\cos\phi} = \frac{(r/l)\operatorname{sen}\omega t}{\sqrt{1-[(r/l)\operatorname{sen}\omega t]^2}} \tag{d}$$

Ahora, aplicando una vez más el teorema del binomio, se encuentra que

$$\frac{1}{\sqrt{1-[(r/l)\operatorname{sen}\omega t]^2}} = 1 + \frac{r^2}{2l^2}\operatorname{sen}^2\omega t \tag{e}$$

en donde sólo se han conservado los dos primeros términos. La ecuación (*d*) se convierte ahora en

$$\tan\phi = \frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\left(1 + \frac{r^2}{2l^2}\operatorname{sen}^2\omega t\right) \tag{14-13}$$

La trigonometría de la figura 14-13 muestra que la fuerza en el cojinete del pasador de articulación (pasador del pistón) tiene una magnitud de

$$F'_{34} = \frac{P}{\cos\phi} = \frac{P}{\sqrt{1-[(r/l)\operatorname{sen}\omega t]^2}} = P\left(1 + \frac{r^2}{2l^2}\operatorname{sen}^2\omega t\right) \tag{f}$$

o bien, en notación vectorial.

$$\mathbf{F}'_{34} = P\hat{\mathbf{i}} - F'_{14}\hat{\mathbf{j}} = P\hat{\mathbf{i}} - P\tan\phi\,\hat{\mathbf{j}} \tag{14-14}$$

Si se toman momentos en torno al centro de la manivela, se encuentra que el momento de torsión $\mathbf{T}'_{21}$ entregado por la manivela al eje es el producto de la fuer-

za $\mathbf{F}'_{14}$ y la coordenada del pistón x. Si se aplican las ecuaciones (14-9), (14-12) y (14-13), se obtiene

$$\mathbf{T}'_{21} = F'_{14}x\hat{\mathbf{k}} = P\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\right)\left(1+\frac{r^2}{2l^2}\operatorname{sen}^2\omega t\right)\left[l-\frac{r^2}{4l}+r\left(\cos\omega t+\frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)\right]\hat{\mathbf{k}} \tag{g}$$

Cuando se multiplican los términos de la (*g*), se puede hacer caso omiso de los que contienen segundas potencias, o mayores, de r/l, introduciendo con ello un error muy pequeño. La (*g*) entonces se convierte en

$$\mathbf{T}'_{21} = Pr\operatorname{sen}\omega t\left(1+\frac{r}{l}\cos\omega t\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{14-15}$$

Éste es el momento de torsión entregada al cigüeñal por la fuerza de los gases; se considera que la dirección opuesta al movimiento de las manecillas del reloj es positiva.

14-5 MASAS EQUIVALENTES

Los problemas 13-5 y 13-6 son ejemplos de mecanismos de motor cuya dinámica se debe analizar aplicando los métodos de ese capítulo, que consisten en un análisis gráfico o en uno vectorial. Los resultados son exactos, excepto por los errores de redondeo, sea cual fuere el método que se emplee.

En este capítulo el estudio tiene interés en el mismo problema. Sin embargo, se acostumbra hacer ciertas simplificaciones para reducir el problema a una forma algebraica. Estas simplificaciones introducen ciertos errores en el análisis, y tales errores y simplificaciones constituyen el tema de estudio de esta sección.

Al analizar las fuerzas de inercia debidas a la biela de un motor, con frecuencia conviene concentrar una porción de la masa en el pasador de la manivela A y la porción restante en el pasador de articulación B (Fig. 14-14). La razón de esto es que el pasador de la manivela se mueve sobre un círculo y el pasador de articulación en línea recta. Estos dos movimientos son muy fáciles de analizar. Sin embargo, el centro de gravedad G se encuentra en algún punto entre el pasador de la

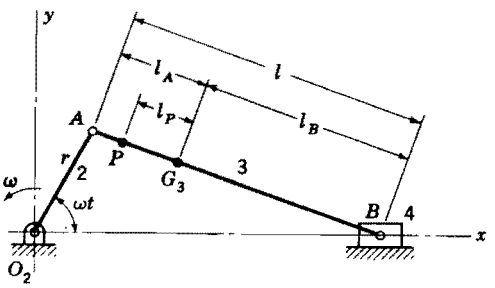


Figura 14-14

manivela y el pasador de articulación, y su movimiento es más complicado y, por ende, más difícil de determinar en forma algebraica.

Se supone que la masa de la biela m_3 está concentrada en el centro de gravedad G_3. Esta masa se divide en dos partes; una de ellas, m_{3B}, se concentra entonces en el pasador de articulación B; la otra, m_{3P}, se concentra en el *centro de percusión* P para la oscilación de la biela en torno a B. Esta disposición de la masa de la biela es dinámicamente equivalente a la biela original, si la masa total es la misma, si la posición del centro de gravedad G_3 se mantiene invariable y si el momento de inercia no cambia. Al escribir estas tres condiciones, respectivamente, en forma de ecuación produce

$$m_3 = m_{3B} + m_{3P} \tag{a}$$

$$m_{3B}l_B = m_{3P}l_P \tag{b}$$

$$I_G = m_{3B}l_B^2 + m_{3P}l_P^2 \tag{c}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (*a*) y (*b*) da la porción de la masa que se debe concentrar en cada punto.

$$m_{3B} = m_3 \frac{l_P}{l_B + l_P} \qquad m_{3P} = m_3 \frac{l_B}{l_B + l_P} \tag{14-16}$$

Después de sustituir las ecuaciones (14-16) en la (*c*), da

$$I_G = m_3 \frac{l_P}{l_B + l_P} l_B^2 + m_3 \frac{l_B}{l_B + l_P} l_P^2 = m_3 l_P l_B \tag{d}$$

o bien,

$$l_P l_B = \frac{I_G}{m_3} \tag{14-17}$$

La (14-17) muestra que las dos distancias l_P y l_B son mutuamente dependientes. Por tanto, si se especifica l_B por adelantado, la longitud de l_P queda fija mediante la (14-17).

En la biela común, el centro de percusión está cerca del pasador de la manivela y se supone que son coincidentes. Por tanto, haciendo que $l_A = l_P$, las (14-16) se reducen a

$$m_{3B} = \frac{m_3 l_A}{l} \qquad m_{3A} = \frac{m_3 l_B}{l} \tag{14-18}$$

Se observa una vez más que las masas equivalentes, obtenidas por las ecuaciones (14-18), no son exactas debido a la suposición hecha; pero son bastante aproximadas para las bielas comunes. Por ejemplo, la aproximación no es válida para la biela maestra de un motor radial, porque el extremo del pasador de la manivela tiene cojinetes para todas las otras bielas, así como su propio cojinete.

Para los fines de estimación y verificación, aproximadamente dos tercios de la masa deben concentrarse en A y la porción restante en B.

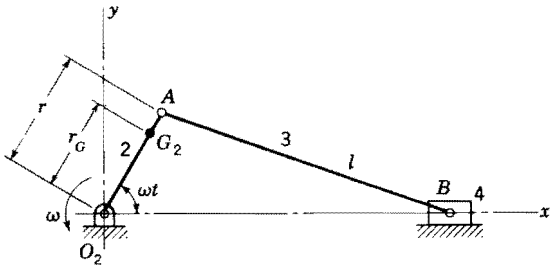


Figura 14-15

En la figura 14-15 se ilustra un eslabonamiento de motor en el que la masa de la manivela m_2 no está equilibrada, como lo demuestra el hecho de que el centro de gravedad G_2 esté desplazado hacia afuera, a lo largo de la manivela, una distancia r_G en relación con el eje de rotación. En el análisis de las fuerzas de inercia, se obtiene la simplificación localizando una masa equivalente m_{2A} en el pasador de la manivela. Por consiguiente, para la equivalencia

$$m_2 r_G = m_{2A} r \qquad \text{o} \qquad m_{2A} = m_2 \frac{r_G}{r} \tag{14-19}$$

14-6 FUERZAS DE INERCIA

Cuando se aplican los métodos de la sección precedente, se comienza localizando las masas equivalentes en el pasador de la manivela y en el pasador de articulación; de donde,

$$m_A = m_{2A} + m_{3A} \tag{14-20}$$

$$m_B = m_{3B} + m_4 \tag{14-21}$$

La ecuación (14-20) afirma que la masa m_A, ubicada en el pasador de la manivela, está constituida por las masas equivalentes m_{2A} de la manivela y m_{3A} de parte de la biela. Por supuesto, si la manivela está equilibrada, se supone que toda su masa está localizada en el eje de rotación y, en ese caso, m_{2A} es cero. La ecuación (14-21) indica que la masa de movimiento alternativo m_B, localizada en el pasador de articulación, se compone de la masa equivalente m_{3B} de la otra parte de la biela y la masa m_4 del conjunto del pistón.

En la figura 14-16 se muestra el mecanismo de corredera y manivela con las masas m_A y m_B localizadas, respectivamente, en los puntos A y B. Si la velocidad angular de la manivela se designa como ω y la aceleración angular como α, el vector de posición del pasador de la manivela en relación con el origen O_2 es

$$\mathbf{R}_A = r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\text{sen}\,\omega t\,\hat{\mathbf{j}} \tag{a}$$

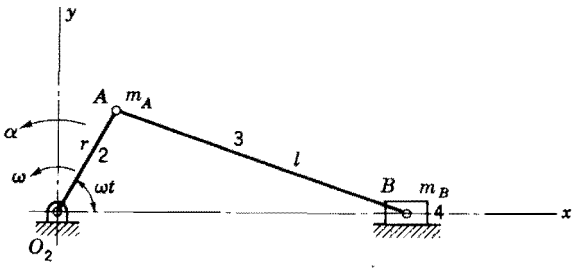


Figura 14-16

Después de derivar dos veces para obtener la aceleración, se obtiene

$$\mathbf{A}_A = (-r\alpha \operatorname{sen} \omega t - r\omega^2 \cos \omega t)\hat{\mathbf{i}} + (r\alpha \cos \omega t - r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t)\hat{\mathbf{j}} \qquad (14\text{-}22)$$

La fuerza de inercia de las partes giratorias es, entonces,

$$-m_A\mathbf{A}_A = m_A r(\alpha \operatorname{sen} \omega t + \omega^2 \cos \omega t)\hat{\mathbf{i}} + m_A r(-\alpha \cos \omega t + \omega^2 \operatorname{sen} \omega t)\hat{\mathbf{j}} \qquad (14\text{-}23)$$

Dado que el análisis se hace casi siempre a velocidad angular constante ($\alpha = 0$), la (14-23) se reduce a

$$-m_A\mathbf{A}_A = m_A r\omega^2 \cos \omega t\, \hat{\mathbf{i}} + m_A r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\, \hat{\mathbf{j}} \qquad (14\text{-}24)$$

Ya se ha determinado la aceleración del pistón en la (14-11) y se repite aquí para mayor facilidad, en una forma algo diferente.

$$\mathbf{A}_B = \left[-r\alpha\left(\operatorname{sen} \omega t + \frac{r}{2l} \operatorname{sen} 2\omega t\right) - r\omega^2\left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t\right)\right]\hat{\mathbf{i}} \qquad (14\text{-}25)$$

Por consiguiente, la fuerza de inercia de las partes con movimiento alternativo es

$$-m_B\mathbf{A}_B = \left[m_B r\alpha\left(\operatorname{sen} \omega t + \frac{r}{2l} \operatorname{sen} 2\omega t\right) + m_B r\omega^2\left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t\right)\right]\hat{\mathbf{i}} \qquad (14\text{-}26)$$

o bien, para velocidad angular constante,

$$-m_B\mathbf{A}_B = m_B r\omega^2\left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t\right)\hat{\mathbf{i}} \qquad (14\text{-}27)$$

Al sumar las ecuaciones (14-24) y (14-27) se obtiene la fuerza total de inercia para todas las partes móviles. Las componentes en las direcciones x y y son

$$F^x = (m_A + m_B)r\omega^2 \cos \omega t + \left(m_B \frac{r}{l}\right) r\omega^2 \cos 2\omega t \qquad (14\text{-}28)$$

$$F^y = m_A r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \qquad (14\text{-}29)$$

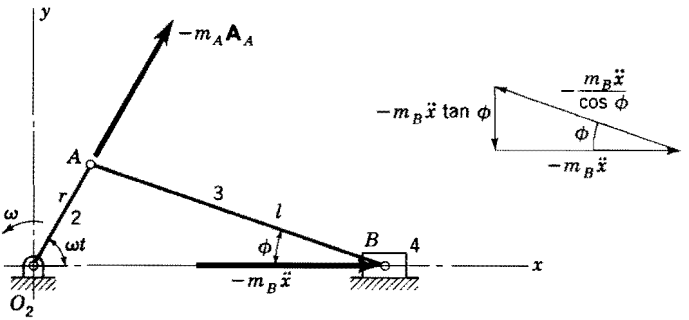


Figura 14-17

Se acostumbra referirse a la porción de la fuerza que ocurre a la frecuencia angular ω rad/s, como la *fuerza de inercia primaria*, y a la porción que ocurre a $2\,\omega$ rad/s, como la *fuerza de inercia secundaria*. Se observa que la componente vertical sólo tiene una parte primaria y que, por tanto, varía directamente con la velocidad del cigüeñal. Por otro lado, la componente horizontal, que se encuentra en la dirección del eje del cilindro, posee una parte primaria que varía directamente con la velocidad del cigüeñal, y una parte secundaria que se desplaza al doble de la velocidad del cigüeñal.

Ahora se procederá a una determinación del momento de torsión de inercia. Como se muestra en la figura 14-17, la fuerza de inercia debida a la masa en A no tiene brazo de momento en torno a O_2 y, por ende, no produce momento de torsión. Como consecuencia, sólo es necesario considerar la fuerza de inercia dada por la (14-27), debida a la porción con movimiento alternativo de la masa. Partiendo del polígono de fuerzas de la figura 14-17, el momento de torsión de inercia ejercido por el motor sobre el cigüeñal es

$$\mathbf{T}''_{21} = -(-m_B\ddot{x}\tan\phi)x\hat{\mathbf{k}} \qquad (b)$$

En la sección 14-4 aparecen expresiones para x, $\ddot{x}$, y $\tan\phi$. Después de hacer las sustituciones apropiadas por estas cantidades, se obtiene lo siguiente para el momento de torsión:

$$\mathbf{T}''_{21} = -m_B r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$$
$$\left[l - \frac{r^2}{4l} + r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)\right]\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\left(1 + \frac{r^2}{2l^2}\operatorname{sen}^2\omega t\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (c)$$

Se pueden despreciar los términos que son proporcionales a la segunda potencia o potencias superiores de r/l al efectuar la multiplicación indicada. Entonces la (*c*) se puede escribir

$$\mathbf{T}''_{21} = -m_B r^2\omega^2\operatorname{sen}\omega t\left(\frac{r}{2l} + \cos\omega t + \frac{3r}{2l}\cos 2\omega t\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (d)$$

Así, al utilizar las identidades

$$2 \operatorname{sen} \omega t \cos 2\omega t = \operatorname{sen} 3\omega t - \operatorname{sen} \omega t \qquad (e)$$

y

$$2 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \operatorname{sen} 2\omega t \qquad (f)$$

se llega a una ecuación que sólo tiene términos en seno, y la (*d*) se convierte finalmente en

$$\mathbf{T}''_{21} = \frac{m_b}{2} r^2 \omega^2 \left(\frac{r}{2l} \operatorname{sen} \omega t - \operatorname{sen} 2\omega t - \frac{3r}{2l} \operatorname{sen} 3\omega t \right) \hat{\mathbf{k}} \qquad (14\text{-}30)$$

Éste es el momento de torsión de inercia que ejerce el motor sobre el eje en la dirección positiva. Por supuesto, sobre el armazón del motor se ejerce un momento de torsión de inercia negativo, o en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, de la misma magnitud.

La distribución supuesta de la masa de la biela conduce a un momento de inercia que es mayor que el valor verdadero. Como consecuencia, el momento de torsión dado por la (14-30) no es el valor exacto. Además, al simplificar la ecuación (*c*) se omitieron los términos proporcionales a las segundas potencias, o de orden superior, de r/l. Estos dos errores tienen más o menos la misma magnitud y son bastante pequeños para las bielas ordinarias que tienen razones r/l cercanas a $\frac{1}{4}$.

14-7 CARGAS SOBRE LOS COJINETES EN EL MOTOR DE UN SOLO CILINDRO

El diseñador de un motor de pistones debe conocer los valores de las fuerzas que actúan sobre los cojinetes y la forma en que éstas varían en un ciclo de operación. Esto es necesario con el fin de lograr una proporción adecuada y elegir correctamente los cojinetes, así como para el diseño de otras piezas del motor. Esta sección es una investigación de la fuerza que ejerce el pistón contra la pared del cilindro, y las fuerzas que actúan contra el pasador del pistón y contra el pasador de la manivela. Las principales fuerzas sobre los cojinetes se investigarán en una sección posterior, debido a que dependen de la acción de todos los cilindros del motor.

Las cargas resultantes sobre el cojinete están constituidas por las siguientes componentes:

1. Las componentes de la fuerza de los gases, designadas con un solo apóstrofo
2. La fuerza de inercia debida al peso del conjunto del pistón, designada con doble apóstrofo
3. La fuerza de inercia de la porción de la biela asignada al extremo del pasador del pistón, triple apóstrofo
4. La fuerza de inercia de la biela en el extremo del pasador de la manivela, cuádruple apóstrofo

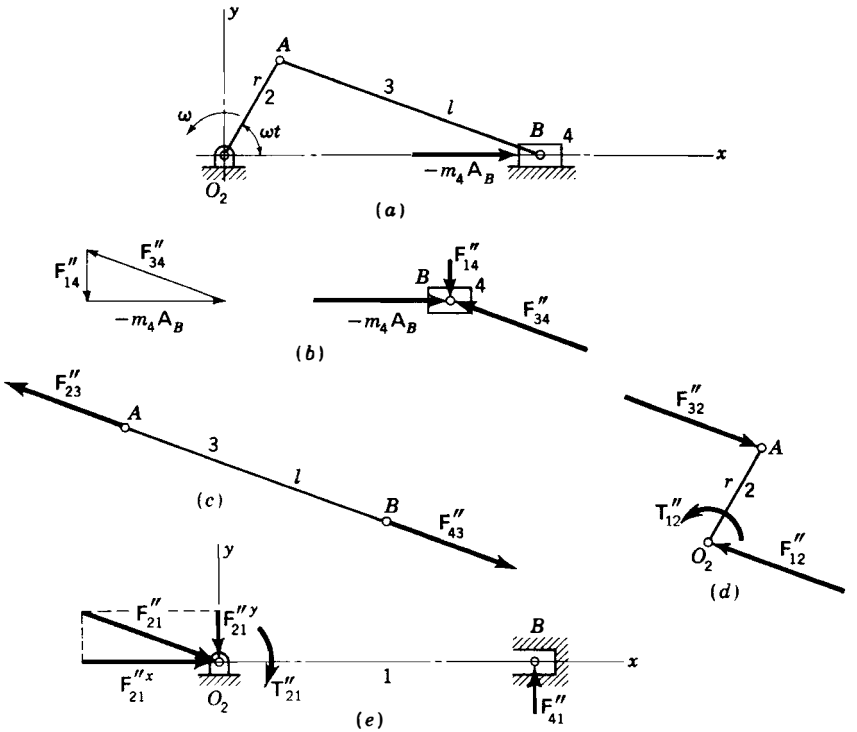


Figura 14-18 Análisis de las fuerzas en el mecanismo del motor cuando sólo se considera la fuerza de inercia debida al peso del conjunto del pistón.

Las ecuaciones para las componentes de la fuerza de los gases se han determinado en la sección 14-4, y se hará referencia a ellas al hallar las cargas totales sobre el cojinete.

La figura 14-18 es un análisis gráfico de las fuerzas en el mecanismo del motor con una fuerza de los gases cero y sujeto a una fuerza de inercia debida sólo al peso del conjunto del pistón. En la figura 14-18*a*, se muestra la posición del mecanismo seleccionado para el análisis, y se presenta la fuerza de inercia $-m_4\mathbf{A}_B$ actuando sobre el pistón. En la figura 14-18*b* aparece el diagrama de cuerpo libre de las fuerzas sobre el pistón, junto con el polígono de fuerzas mediante el cual se obtuvieron. Las figuras 14-18*c* a *e* ilustran, respectivamente, los diagramas de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre la biela, la manivela y el armazón.

En la figura 14-18*e* se observará que el momento de torsión $\mathbf{T}''_{21}$ equilibra el par de fuerzas formado por $\mathbf{F}''_{41}$ y $\mathbf{F}''_{21y}$. Pero la fuerza $\mathbf{F}''_{21x}$ en el centro de la manivela sigue sin la oposición de alguna otra fuerza. Esta observación es muy importante y se analizará más adelante en una sección por separado.

Las siguientes fuerzas entrañan un interés especial para este estudio:

1. La fuerza $\mathbf{F}''_{41}$ del pistón contra la pared del cilindro
2. La fuerza $\mathbf{F}''_{34}$ de la biela contra el pasador del pistón

3. La fuerza $\mathbf{F}''_{32}$ de la biela contra el pasador de la manivela
4. La fuerza $\mathbf{F}''_{12}$ del cigüeñal contra la manivela

Aplicando métodos similares a los que se utilizaron con anterioridad en este capítulo, se encuentra que las expresiones analíticas son

$$\mathbf{F}''_{41} = -m_4 \ddot{x} \tan \phi \, \hat{\mathbf{j}} \tag{14-31}$$

$$\mathbf{F}''_{34} = m_4 \ddot{x} \hat{\mathbf{i}} - m_4 \ddot{x} \tan \phi \, \hat{\mathbf{j}} \tag{14-32}$$

$$\mathbf{F}''_{32} = -\mathbf{F}''_{34} \tag{14-33}$$

$$\mathbf{F}''_{12} = -\mathbf{F}''_{32} = \mathbf{F}''_{34} \tag{14-34}$$

en donde $\ddot{x}$ es la aceleración del pistón, como la expresa la ecuación (14-11), y m_4 es la masa del conjunto del pistón. Se puede evaluar la cantidad tan ϕ en términos del ángulo de la manivela, utilizando la (14-13).

En la figura 14-19 se hace caso omiso de todas las fuerzas, excepto aquéllas que se producen debido a esa parte de la masa de la biela que se supone está localizada en el centro del pasador del pistón. Por tanto, la figura 14-19*b* es un diagrama de cuerpo libre de la biela, en el que se muestra la fuerza de inercia por $-m_{3B}\mathbf{A}_B$ que actúa en el extremo del pasador del pistón.

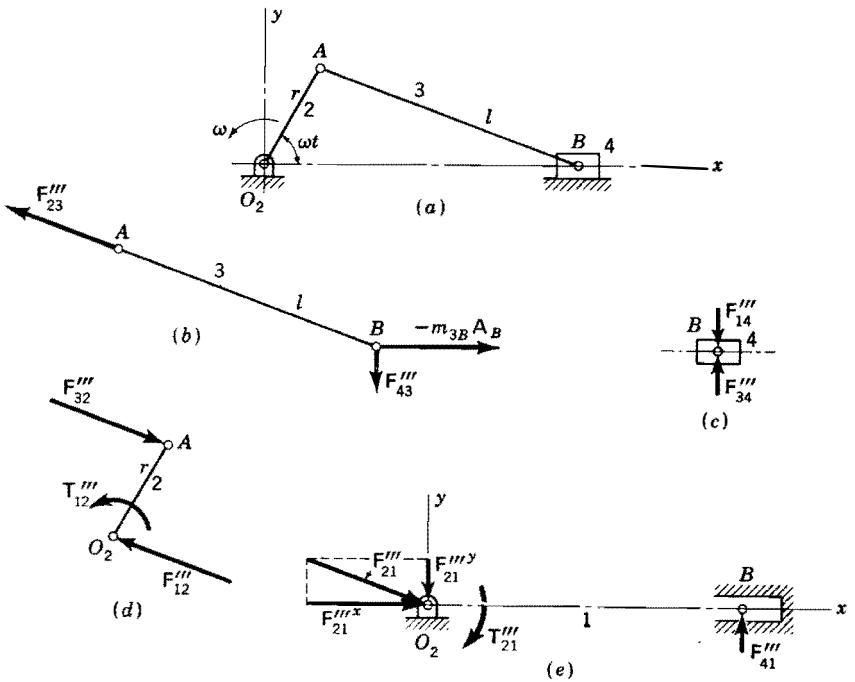


Figura 14-19 Análisis gráfico de las fuerzas que resultan exclusivamente de la masa de la biela, suponiendo que se concentra en el extremo del pasador de articulación.

Se observa ahora que es incorrecto sumar m_{3B} y m_4 y luego calcular una fuerza resultante de inercia cuando se determinan las cargas sobre el cojinete, aunque este procedimiento se antojaría más sencillo. La razón de ello es que m_4 es la masa del conjunto del pistón y la fuerza de inercia correspondiente actúa en el lado del pistón del pasador de articulación. Pero m_{3B} es parte de la masa de la biela y, por ende, su fuerza de inercia actúa en el lado de la biela del pasador de articulación. Por tanto, sumar las dos proporcionará resultados correctos para la carga del pasador de la manivela y la fuerza del pistón contra la pared del cilindro, pero dará resultados *incorrectos* para la carga del pasador del pistón.

En las figuras 14-19*c*, *d* y *e*, respectivamente, se ilustran las fuerzas sobre el pasador del pistón, la manivela y el armazón. Se encuentra que las ecuaciones para estas fuerzas, para una manivela que tiene velocidad angular uniforme, son

$$\mathbf{F}'''_{41} = -m_{3B}\ddot{x} \tan \phi \, \hat{\mathbf{j}} \tag{14-35}$$

$$\mathbf{F}'''_{34} = \mathbf{F}'''_{41} \tag{14-36}$$

$$\mathbf{F}'''_{32} = -m_{3B}\ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + m_{3B}\ddot{x} \tan \phi \, \hat{\mathbf{j}} \tag{14-37}$$

$$\mathbf{F}'''_{12} = -\mathbf{F}'''_{32} \tag{14-38}$$

En la figura 14-20 se ilustran las fuerzas producidas por esa parte de la masa de la biela que se encuentra en el extremo del pasador de la manivela. Mientras que un contrapeso sujeto a la manivela equilibra la reacción en O_2, no se puede hacer

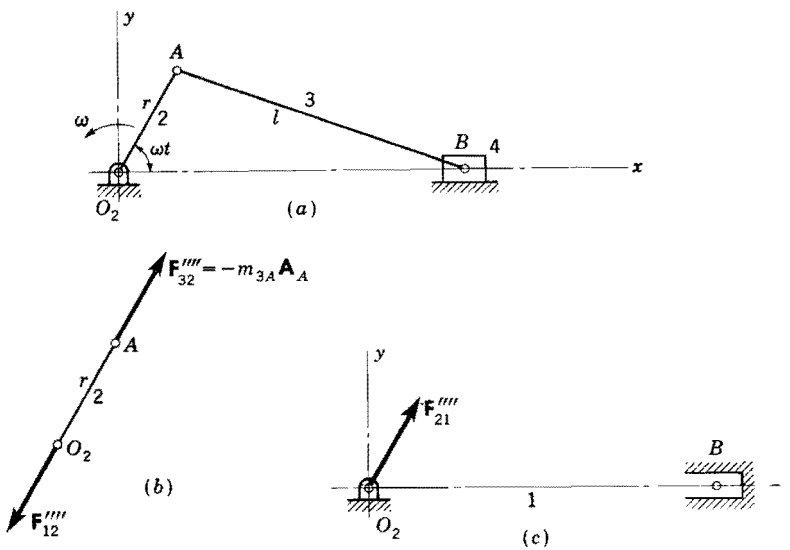


Figura 14-20 Análisis de fuerzas que resultan exclusivamente de la masa de la biela, suponiendo que se concentra en el extremo del pasador de la manivela.

que $\mathbf{F}_{32}'''$ sea cero. Por ende, existe la fuerza en el pasador de la manivela, ya sea que la masa giratoria de la biela esté equilibrada o no. Esta fuerza es

$$\mathbf{F}_{32}''' = m_{3A}r\omega^2(\cos \omega t\, \hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} \omega t\, \hat{\mathbf{j}}) \tag{14-39}$$

El último paso es sumar estas expresiones para obtener las cargas resultantes sobre el cojinete. Por ejemplo, la fuerza total del pistón contra la pared del cilindro se encuentra sumando las ecuaciones (14-12), (14-31) y (14-35), considerando debidamente los subíndices y los signos. Cuando se simplifica, la respuesta es

$$\mathbf{F}_{41} = \mathbf{F}_{41}' + \mathbf{F}_{41}'' + \mathbf{F}_{41}''' = -[(m_{3B} + m_4)\ddot{x} + P] \tan \phi\, \hat{\mathbf{j}} \tag{14-40}$$

Las fuerzas sobre el pasador del pistón, el pasador de la manivela y el cigüeñal se encuentran en forma similar, y son

$$\mathbf{F}_{34} = (m_4\ddot{x} + P)\hat{\mathbf{i}} - [(m_{3B} + m_4)\ddot{x} + P] \tan \phi\, \hat{\mathbf{j}} \tag{14-41}$$

$$\mathbf{F}_{32} = [m_{3A}r\omega^2 \cos \omega t - (m_{3B} + m_4)\ddot{x} - P]\hat{\mathbf{i}} + \{m_{3A}r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t + [(m_{3B} + m_4)\ddot{x} + P] \tan \phi\}\hat{\mathbf{j}} \tag{14-42}$$

$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{32} \tag{14-43}$$

14-8 MOMENTO DE TORSIÓN DEL CIGUEÑAL

El momento de torsión entregado por el cigüeñal a la carga recibe el nombre de *momento de torsión o par motor, del cigüeñal* y es el negativo del momento del par formado por las fuerzas $\mathbf{F}_{41}$ y $\mathbf{F}_{21}^y$. Por tanto, se obtiene a partir de la ecuación

$$\mathbf{T}_{21} = -F_{41}x\hat{\mathbf{k}} = [(m_{3B} + m_4)\ddot{x} + P]x \tan \phi\, \hat{\mathbf{k}} \tag{14-44}$$

14-9 FUERZAS DE SACUDIMIENTO DEL MOTOR

En la figura 14-21*a* se muestra la fuerza de inercia debida a las masas con movimiento alternativo actuando en la dirección positiva. En la figura 14-21*b* se señalan las fuerzas que actúan sobre el bloque del motor debido a estas fuerzas de inercia. Las fuerzas resultantes son $\mathbf{F}_{21}$, la ejercida por el cigüeñal sobre los cojinetes principales, y un par positivo formado por $\mathbf{F}_{41}$ y $\mathbf{F}_{21}^y$. La fuerza $\mathbf{F}_{21}^x = -m_B\mathbf{A}_B$ se denomina con frecuencia *fuerza de sacudimiento*, y el par $T = xF_{41}$ *par de sacudimiento*. Como lo indican las ecuaciones (14-27) y (14-30), la magnitud y dirección de esta fuerza y el par cambian con ωt; en consecuencia, la fuerza de sacudimiento induce una vibración lineal del bloque en la dirección x, y el par de sacudimiento, una vibración de torsión del bloque en torno al centro del cigüeñal.

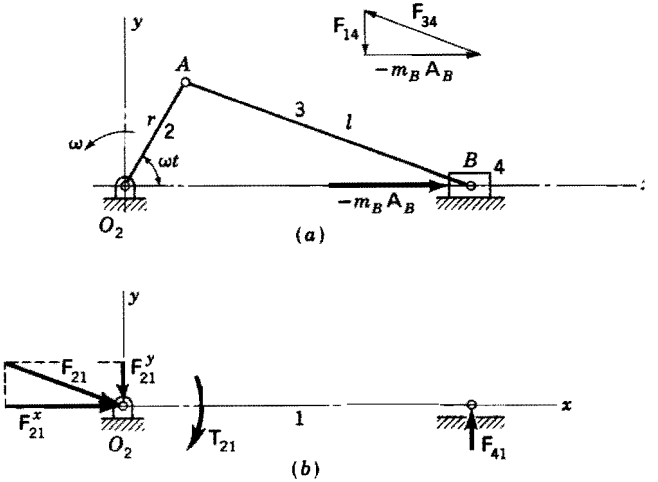


Figura 14-21 Fuerzas de inercia debidas a las masas con movimiento alternativo; se han suprimido los apóstrofos como una simplificación.

Se puede hacer una representación gráfica de la fuerza de inercia si la (14-27) se reordena como

$$F = m_B r\omega^2 \cos \omega t + m_B r\omega^2 \frac{r}{l} \cos 2\omega t \qquad (14\text{-}45)$$

en donde $F = F_{21}^x$ para simplificar la notación. El primer término de la (14-45) se representa mediante la proyección en x de un vector con longitud $m_B r\omega^2$ que gira a ω rad/s. Ésta es la porción primaria de la fuerza de inercia. El segundo término se representa en forma similar mediante la proyección x de un vector con longitud $m_B r\omega^2(r/l)$ y gira a 2ω rad/s; ésta es la parte secundaria. En la figura 14-22 se muestra un diagrama de esta índole para $r/l = \frac{1}{4}$. La fuerza total de inercia o sacudimiento es la suma algebraica de las proyecciones horizontales de los dos vectores.

14-10 SUGERENCIAS ACERCA DE LOS CÁLCULOS DE MÁQUINAS POR COMPUTADORA

Esta sección contiene sugerencias para utilizar computadoras y calculadoras programables para resolver la dinámica de mecanismos de motores. Sin embargo, muchas de las ideas resultarán útiles para lectores que utilicen máquinas no programables, así como para fines de verificación.

Diagramas del indicador Sería muy conveniente si se pudiera idear un subprograma para calcular las fuerzas de los gases y utilizar los resultados directamente

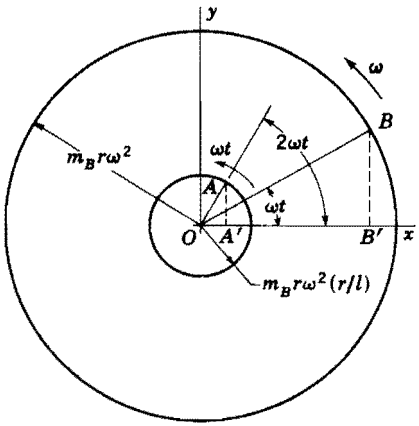


Figura 14-22 Diagrama circular para hallar las fuerzas de inercia. La fuerza total de inercia es $OA' + OB'$.

en un programa principal para calcular todas las fuerzas sobre los cojinetes y momentos de torsión en el cigüeñal resultantes. Por desgracia, el diagrama del indicador teórico se debe manejar a mano con el fin de obtener una aproximación razonable para los datos experimentales. Este manejo se puede hacer gráficamente, o bien, con una computadora que tenga una presentación gráfica. El procedimiento se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14-1 Determínese la relación de presión contra desplazamiento del pistón para un motor de seis cilindros que tiene un desplazamiento de 140 pulg^3, una razón de compresión de 8 y una potencia al freno de 57 hp a 2 400 rpm. Úsese una eficiencia mecánica del 75%, un factor de gráfica de 0.85, una presión de succión de 14.7 lb/pulg^2 y un exponente politrópico de 1.30.

SOLUCIÓN Al reacomodar la (14-2), se encuentra la presión media efectiva al freno como sigue:

$$p_b = \frac{(33\,000)(12)(\text{bhp})}{lan} = \frac{(33\,000)(12)(57/6)}{(140/6)(2\,400/2)} = 135 \text{ lb/pulg}^2$$

Entonces, basándose en la (14-3), la presión media efectiva indicada es

$$p_i = \frac{p_b}{e_m} = \frac{135}{0.} =$$

Ahora se debe determinar p_4 en el diagrama teórico de la figura 14-12. Si se aplica la ecuación (14-7), se encuentra que

$$p_4 = (k-1)\frac{r-1}{r^k - r}\frac{p_i}{f_c} + p_1$$

$$= (1.3-1)\frac{8-1}{8^{1.3}-8}\frac{180}{0.85} + 14.7 = 78.2 \text{ lb/pulg}^2$$

La diferencia de volumen $v_1 - v_2$ de la figura 14-12 es el volumen barrido por el pistón. Por consiguiente,

$$v_1 - v_2 = la = \frac{140}{6} = 23.3 \text{ pulg}^3$$

Entonces, según la (*b*) de la seción 14-2, se tiene

$$v_1 = \frac{r(v_1 - v_2)}{r - 1} = \frac{8(23.3)}{8 - 1} = 26.6 \text{ pulg}^3$$

Por tanto,

$$v_2 = 26.6 - 23.3 = 3.3 \text{ pulg}^3$$

Entonces, el porcentaje de espacio muerto C es

$$C = \frac{3.3(100)}{23.3} = 14.2$$

Expresar los volúmenes como porcentajes del volumen de desplazamiento nos permite escribir la (14-1) en la forma

$$p_x(X + C)^k = p_1(100 + C)^k$$

en donde X es el porcentaje de recorrido del pistón, medido a partir del extremo de culata de la carrera. Por ende, se usa la fórmula

$$p_{xc} = p_1\left(\frac{100 + C}{X + C}\right)^k = 14.7\left(\frac{100 + 14.2}{X + 14.2}\right)^{1.3} \tag{1}$$

para calcular la presión durante la carrera de compresión para cualquier posición del pistón, entre $X = 0$ y $X = 100\%$.

$$p_{xe} = p_4\left(\frac{100 + C}{X + C}\right)^k = 78.2\left(\frac{100 + 14.2}{X + 14.2}\right)^{1.3} \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) son fáciles de programar para los cálculos en máquinas. Los resultados se deben presentar y registrar, o imprimir, para el uso gráfico. De otro modo, los resultados se pueden presentar también en el CRT para manejo manual.

En la figura 14-23 se ilustran los resultados del cálculo en forma de gráfica usando $\Delta X = 5\%$. Obsérvese en particular la manera en la que se han redondeado los resultados a fin de obtener un diagrama suave del indicador. Por supuesto, este redondeo producirá resultados que no se duplicarán con exactitud en tanteos subsiguientes. Las mayores diferencias ocurrirán en la cercanía del punto *B*.

Análisis de fuerzas En un análisis por computadora, los valores de la presión se leerán a partir de un diagrama como el de la figura 14-23. Puesto que la mayoría de los analistas preferirán tabular estos datos, se debe construir una tabla en donde la primera columna contenga los valores del ángulo de la manivela ωt. Para un motor de cuatro ciclos, los valores de este ángulo deben ser considerados desde 0 hasta 720°.

Los valores de x correspondientes a cada ωt se deben obtener partiendo de la ecuación (14-9). Luego se obtiene el desplazamiento correspondiente del pistón X, en porcentaje, a partir de la ecuación

$$X = \frac{r + l - x}{2r}(100) \tag{14-46}$$

Debe tenerse cierto cuidado al tabular X y las presiones correspondientes. En seguida se pueden calcular las fuerzas de los gases correspondientes a cada valor de ωt , empleando el área del pistón.

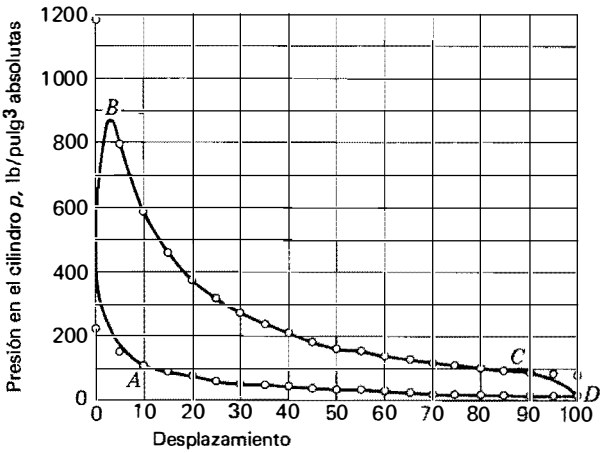


Figura 14-23 Los puntos marcados con círculos son los resultados de la computadora. El diagrama se redondeó a mano desde A hasta B y desde C hasta D. El punto B es aproximadamente el 75% de la presión máxima calculada al principio de la carrera de expansión.

El resto del análisis es perfectamente directo, úsense las ecuaciones (14-11), (14-13) y (14-40) hasta (14-44), en ese orden.

PROBLEMAS

14-1 Un motor de cuatro ciclos de un solo cilindro tiene una razón de compresión de 7.6, y desarrolla 3 bhp a 3 000 rpm. La longitud de la manivela es 0.875 pulg con un diámetro interior de 2.375 pulg. Desarróllese y hágase un diagrama del indicador redondeado aplicando un factor de gráfica de 0.90, una eficiencia mecánica del 72%, una presión de succión de 14.7 lb/pulg² y un exponente politrópico de 1.30.

14-2 Constrúyase un diagrama del indicador redondeado para un motor de gasolina de cuatro ciclos y cuatro cilindros que tiene un diámetro interior de 3.375 pulg, una carrera de 3.5 pulg y una razón de compresión de 6.25. Las condiciones de operación a utilizar son 30 hp a 1 900 rpm. Úsese una eficiencia mecánica del 72%, un factor de gráfica de 0.90 y un exponente politrópico de 1.30.

14-3 Constrúyase un diagrama del indicador para un motor V6 de cuatro ciclos que tiene un diámetro interior de 100 mm, una carrera de 90 mm y una razón de compresión de 8.40. Este motor desarrolla 150 kW a 4 400 rpm. Úsese una eficiencia mecánica del 75%, un factor de gráfica de 0.88 y un exponente politrópico de 1.30.

14-4 Un motor de gasolina de dos ciclos y un solo cilindro desarrolla 30 kW a 4 500 rpm. Dicho motor posee un diámetro interior de 80 mm, una carrera de 70 mm y una razón de compresión de 7.0. Desarróllese un diagrama del indicador redondeado para este motor, empleando un factor de gráfica de 0.90, una eficiencia mecánica del 65% y un exponente politrópico de 1.30. Úsese 100 kPa para la presión de succión.

14-5 El motor del problema 14-1 tiene una biela de $3\frac{1}{8}$ de longitud y pesa 0.214 lb, teniendo el centro de masa a 0.40 pulg del extremo del pasador de la manivela. El pistón pesa 0.393 lb. Hállense las reacciones en los cojinetes y el par de torsión del cigüeñal durante la carrera de expansión correspondiente a un desplazamiento del pistón de $X = 30\%$ ($\omega t = 60°$). Véase la lista de las respuestas para p_c.

14-6 Repítase el problema 14-5; pero háganse los cálculos para el ciclo de compresión ($\omega t = 660°$).

14-7 Hágase un análisis completo de fuerzas del motor del problema 14-5. Trácese una gráfica del momento de torsión del cigüeñal contra el ángulo de la manivela para una rotación de la manivela de 720°.

14-8 El motor del problema 14-3 utiliza una biela de 350 mm de largo. Las masas son $m_{3A} = 0.80$ kg, $m_{3B} = 0.38$ kg y $m_4 = 1.64$ kg. Hállense todas las reacciones en los cojinetes y el momento de torsión del cigüeñal para un cilindro del motor durante la carrera de expansión en un desplazamiento del pistón de $X = 30\%$ ($\omega t = 63.2°$). La presión se debe obtener en el diagrama de indicador que aparece en la lista de respuestas.

14-9 Repítase el problema 14-8, efectuando los cálculos para la misma posición en el ciclo de compresión ($\omega t = 656.8°$).

14-10 Algunos datos más para el motor del problema 14-4 son $l_3 = 110$ mm, $AG_3 = 15$ mm, $m_4 = 0.24$ kg y $m_3 = 0.13$ kg. Hágase un análisis completo de fuerzas del motor y una gráfica del momento de torsión del cigüeñal contra el ángulo de la manivela para una rotación de la manivela de 360°.

14-11 El motor de cuatro ciclos del ejemplo 14-1 tiene una carrera de 2.60 pulg y una biela de 7.20 pulg de longitud. El peso de la biela es 0.850 lb y el centro de masa está a 1.66 pulg del pasador de la manivela. El conjunto del pistón pesa 1.27 lb. Hágase un análisis completo de fuerzas para un cilindro de este motor, suponiendo una rotación de la manivela de 720°. Úsese una presión de expulsión de 16 lb/pulg^2 y 10 lb/pulg^2 para la presión de succión. Hágase una gráfica en la que se muestre la variación del momento de torsión del cigüeñal en función del ángulo de la manivela. Para las presiones, úsese la figura 14-23.

CAPÍTULO

QUINCE

BALANCEO

El balanceo es la técnica de corregir o eliminar fuerzas o momentos de inercia indeseables. En los capítulos anteriores se ha visto que las fuerzas en el armazón pueden variar de manera significativa durante un ciclo completo de operación. Estas fuerzas pueden provocar vibraciones que a veces pueden alcanzar amplitudes peligrosas. Incluso aunque no lo fueran, las vibraciones aumentan los esfuerzos componentes y someten a los cojinetes a cargas repetidas que provocan la falla prematura por fatiga de las piezas. Por tanto, en el diseño de maquinaria no basta simplemente con evitar la operación cercana a las velocidades críticas; también es preciso eliminar, o por lo menos reducir, en primera instancia, las fuerzas de inercia que producen estas vibraciones.

Las tolerancias de producción que se aplican en la fabricación de maquinaria se ajustan tan cerradas como sea posible sin elevar el costo de fabricación en forma prohibitiva. En general, resulta más económico producir piezas que no sean excesivamente verdaderas y luego sujetarlas a un procedimiento de balanceo, que producir piezas tan perfectas que no requieran corrección alguna. Debido a esto, cada pieza producida es un caso individual en el sentido de que normalmente no se puede esperar que dos piezas requieran las mismas medidas correctivas. Por consiguiente, el problema principal en el estudio del balanceo es la determinación del desbalanceo y la aplicación de correcciones.

15-1 DESBALANCEO ESTÁTICO

La configuración ilustrada en la figura 15-1*a* se compone de una combinación de disco y árbol, o eje, que descansa sobre rieles rígidos y duros, de tal manera que el

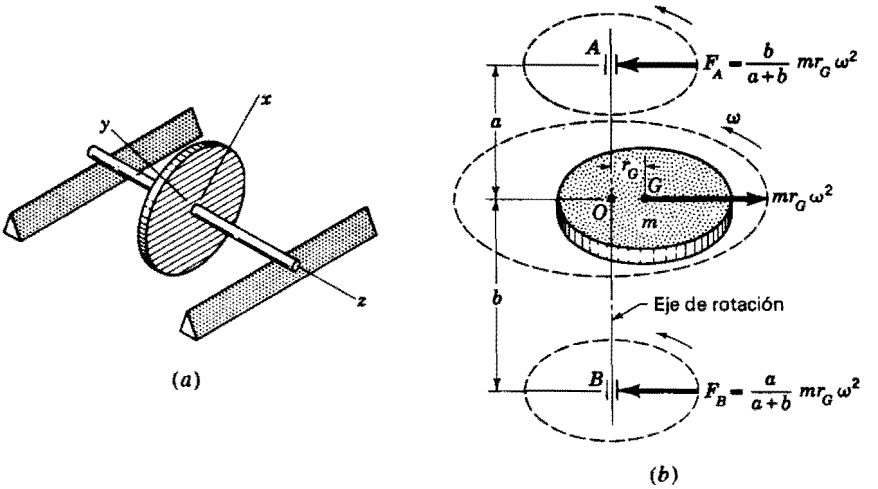


Figura 15-1

eje, que se supone es perfectamente recto, pueda rodar sin fricción. Se fija un sistema de referencia *xyz* en el disco que se mueve con él. Se pueden conducir experimentos sencillos para determinar si el disco está estáticamente desbalanceado, de la manera siguiente. Ruédese el disco suavemente impulsándolo con la mano y déjese rodar libremente hasta que vuelva al reposo. Luego márquese con una tiza el punto más bajo de la periferia del disco. Repítase la operación cuatro o cinco veces. Si las marcas quedan dispersas en lugares diferentes alrededor de la periferia, el disco se encuentra balanceado estáticamente. Si todas las marcas coinciden, el disco se encuentra estáticamente desbalanceado, lo que significa que el eje del árbol y el centro de masa del disco no coinciden. La posición de las marcas con respecto al sistema *xy* indica la ubicación angular del desbalanceo; pero *no* su magnitud.

Es improbable que cualquiera de las marcas quede localizada a 180° de las restantes, aun cuando es teóricamente posible obtener equilibrio estático con el desbalanceo por encima del eje del árbol.

Si se descubre que existe desbalanceo estático, éste se puede corregir eliminando material mediante una perforación en las marcas señaladas, o bien, agregando masa a la periferia a 180° de la marca. Puesto que se desconoce la magnitud del desequilibrio, estas correcciones se deben hacer por tanteos.

15-2 ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

Si se montan un disco y un eje desbalanceados sobre cojinetes, y se hacen girar, existe la fuerza centrífuga $mr_G\omega^2$ como se ilustra en la figura 15-1*b*. Esta fuerza que actúa sobre el eje produce las reacciones giratorias en los cojinetes indicadas en la figura.

Para determinar la ecuación del movimiento del sistema, se especifica m como la masa total y m_u como la masa no balanceada. Asimismo, sea k la rigidez del eje, un número que describe la magnitud de una fuerza necesaria para doblar al eje una distancia unitaria cuando se aplica en O. Por tanto, k tiene las unidades de libras fuerza por pulgada o newtons por metro. Sea c el coeficiente de amortiguamiento viscoso como se definió en la sección 12-11. Si se selecciona cualquier coordenada x normal al eje del árbol, ahora se puede escribir

$$\sum F_O = -kx - c\dot{x} - m\ddot{x} + m_u r_G \omega^2 \cos \omega t = 0 \qquad (a)$$

Se puede hallar la solución de esta ecuación diferencial en cualquier texto que se ocupe de ecuaciones diferenciales o vibraciones mecánicas. Esta solución es

$$x = \frac{m_u r_G \omega^2 \cos (\omega t - \phi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \qquad (b)$$

en donde ϕ es el ángulo comprendido entre la fuerza $m_u r_G \omega^2$ y la amplitud X de la vibración del árbol o eje; por tanto, ϕ es el *ángulo de fase*; y su valor es

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \qquad (c)$$

Se pueden hacer ciertas simplificaciones con la ecuación (b), para aclarar su significado.

En primer lugar, considérese el término $k - m\omega^2$ del denominador de la ecuación (b). Si este término fuera cero, la amplitud de x sería muy grande debido a que sólo estaría limitada por la constante de amortiguamiento c, que por lo general es muy pequeña. El valor de ω que hace que el término $k - m\omega^2$ sea cero, recibe el nombre de *velocidad angular natural, velocidad crítica* y también *frecuencia circular natural*. Este valor se designa como ω_n y se ve que es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (15\text{-}1)$$

En el estudio de las vibraciones libres o no forzadas, se encuentra que cierto valor del factor viscoso c no conducirá a vibración alguna en lo absoluto. Este valor especial se conoce como *coeficiente crítico del amortiguamiento viscoso* y se expresa mediante la ecuación

$$c_c = 2m\omega_n \qquad (15\text{-}2)$$

La *razón de amortiguamiento* ζ es la que existe entre el amortiguamiento real y el crítico, y es

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \qquad (15\text{-}3)$$

Para la mayor parte de los sistemas de máquinas en los que no se introduce deliberadamente amortiguamiento, ζ estará en el intervalo aproximado de $0.015 \leq \zeta \leq 0.120$.

A continuación, obsérvese que la (*b*) se puede expresar en la forma

$$x = X \cos(\omega t - \phi) \qquad (d)$$

Si ahora se divide el numerador y el denominador de la amplitud X de la (*b*) entre k, se designa la excentricidad como $e = r_G$, y se introducen las ecuaciones (15-1) y (15-3), se obtiene la razón

$$\frac{mX}{m_u e} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \qquad (15\text{-}4)$$

Ésta es la ecuación para la razón de amplitudes de la vibración de una combinación giratoria de disco y eje. Si se hace caso omiso del amortiguamiento, se hace $m = m_u$, y se sustituye e con r_G una vez más, se obtiene

$$X = r_G \frac{(\omega/\omega_n)^2}{1-(\omega/\omega_n)^2} \qquad (15\text{-}5)$$

en donde r_G es la excentricidad y X es la amplitud de la vibración correspondiente a cualquier razón de frecuencias ω/ω_n. Ahora si, en la figura 15-1*b*, se designa O como el centro del árbol en el disco y G como el centro de masa del disco, se puede llegar a algunas conclusiones interesantes al hacer la gráfica de la (15-5). Esto aparece ilustrado en la figura 15-2, en donde la amplitud se representa gráficamen-

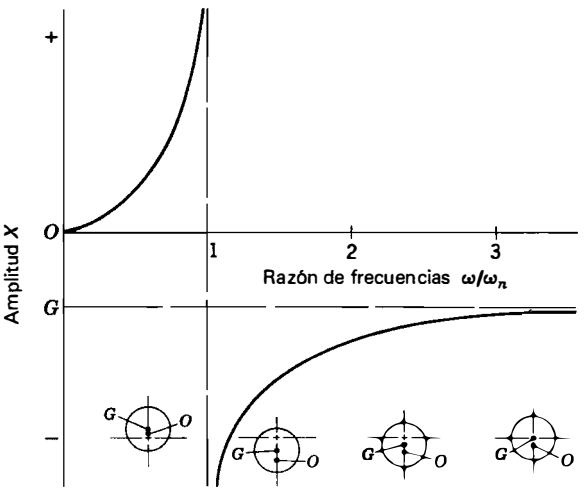


Figura 15-2 Las pequeñas figuras que aparecen debajo de la gráfica indican la posición relativa de tres puntos, para diversas razones de frecuencia. El centro de masa del disco está en *G*, el centro del árbol se localiza en *O* y el eje de rotación está en la intersección de las líneas de los centros. Por consiguiente, esta figura muestra tanto las relaciones de amplitud como de fase.

te sobre el eje vertical y la razón de frecuencias a lo largo de la abscisa. La frecuencia natural es ω_n, que corresponde a la velocidad crítica, en tanto que ω es la velocidad real del árbol. Cuando apenas principia la rotación, ω es mucho menor que ω_n y la gráfica indica que la amplitud de la vibración es muy pequeña. Conforme aumenta la velocidad del árbol, también se incrementa la amplitud y se hace infinita en la velocidad crítica. Conforme el eje pasa por la velocidad crítica, la amplitud cambia hacia un valor negativo y disminuye conforme aumenta la velocidad. La gráfica revela que la amplitud nunca regresa a cero, sin importar cuánto se aumente la velocidad del árbol, pero alcanza un valor límite de $-r_G$. Nótese en este intervalo, que el disco está girando en torno a su propio centro de gravedad, que entonces coincide con la línea central del cojinete.

El análisis precedente demuestra que los sistemas giratorios estáticamente desbalanceados producen vibraciones indeseables y reacciones giratorias en los cojinetes. Se puede reducir la excentricidad r_G utilizando equipos de balanceo estático, pero es imposible reducirla a cero. En consecuencia, por más pequeño que se logre hacer a r_G, siempre se pueden esperar problemas cuando $\omega = \omega_n$. Cuando la frecuencia de operación es mayor que la frecuencia natural, la máquina se debe diseñar de tal modo que pase por la frecuencia natural tan rápidamente como sea posible, con el fin de evitar que se desarrollen vibraciones peligrosas.

15-3 MÁQUINAS DE BALANCEO ESTÁTICO

El propósito de una máquina para balancear es indicar, en primer lugar, si una pieza está balanceada. En caso de no estarlo, la máquina debe medir el desbalanceo, indicando su *magnitud* y *ubicación*.

Las máquinas para balanceo estático se utilizan sólo para piezas cuyas dimensiones axiales son pequeñas, como por ejemplo, engranes, ventiladores e impulsores, y con frecuencia reciben el nombre de *máquinas para balancear en un solo plano*, porque la masa debe estar prácticamente en un solo plano. En las secciones que siguen se estudiará el balanceo en varios planos; pero es importante hacer notar aquí que si se deben montar varias ruedas sobre un eje que va a girar, las piezas deben balancearse estáticamente en forma individual antes de montarlas. En tanto que es posible balancear el conjunto en dos planos, después de que se montan las piezas, inevitablemente se presentan momentos de flexión adicionales cuando se hace esto.

El balanceo estático es esencialmente un proceso de pesado en el que se aplica a la pieza una fuerza de gravedad o una fuerza centrífuga. Ya se ha visto que el disco y el eje de la sección anterior se podían balancear colocándolo sobre dos rieles paralelos, haciéndolo oscilar y dejándolo encontrar el equilibrio. En este caso, la localización del desbalanceo se encuentra con la ayuda de la fuerza de la gravedad. Otro método para balancear el disco sería hacerlo girar a una velocidad predeterminada. Entonces se podrían medir las reacciones en los cojinetes y utilizar sus magnitudes para indicar la magnitud del desbalanceo. Puesto que la pieza está

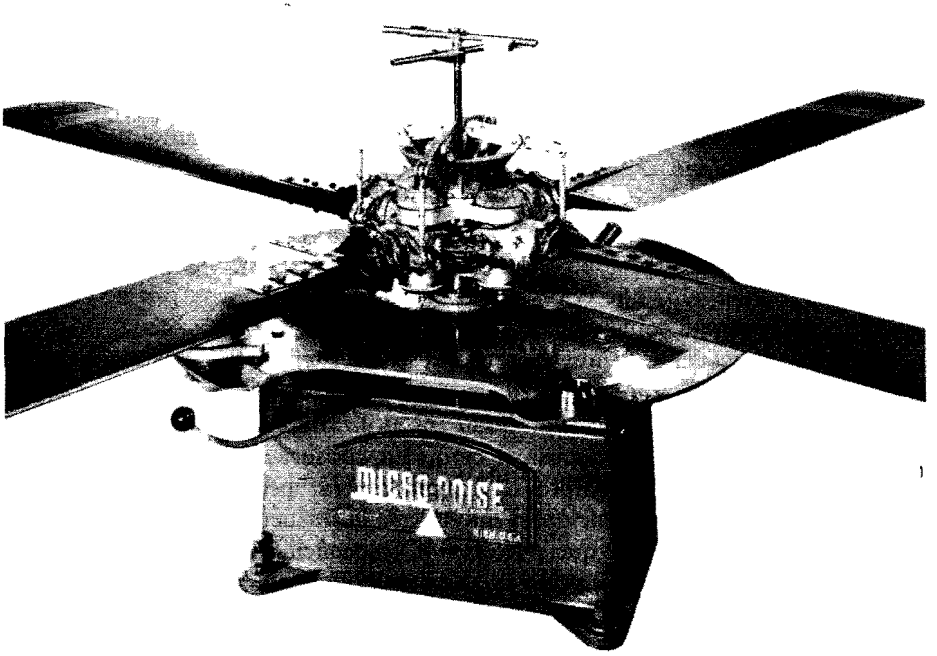


Figura 15-3 Máquina para balancear el conjunto del rotor de un helicóptero. (*Micro-Poise Engineering and Sales Company, Detroit, Michigan.*)

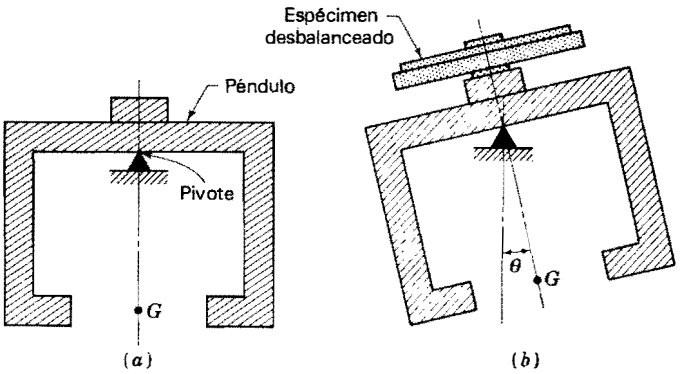


Figura 15-4 Operación de una máquina para balanceo estático.

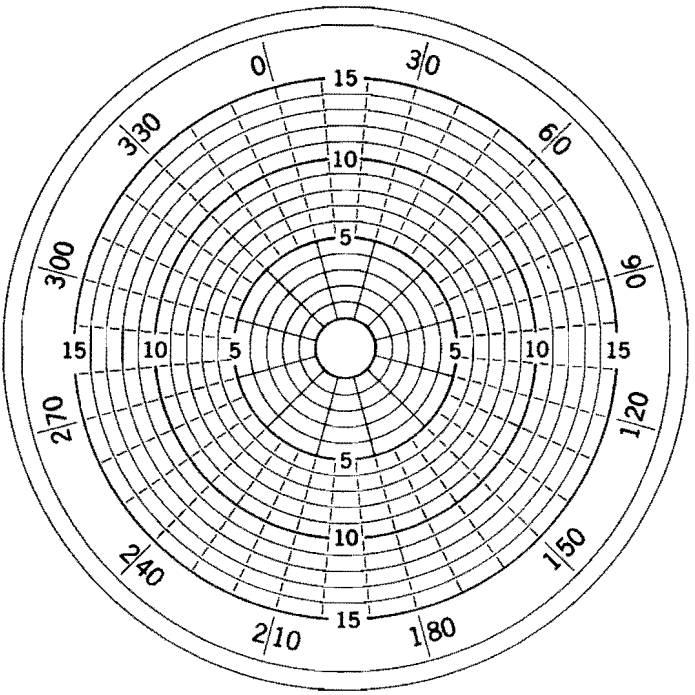


Figura 15-5 Dibujo del nivel universal utilizado en la máquina para balancear Micro-Poise. Los números de la periferia son grados, las distancias radiales están calibradas en unidades proporcionales a onzas-pulgadas. La posición de la burbuja indica tanto la ubicación como la magnitud del desbalanceo. (*Micro-Poise Engineering and Sales Company, Detroit, Michigan.*)

girando mientras se toman las mediciones, se usa un estroboscopio para indicar la ubicación de la corrección requerida.

Cuando se fabrican piezas de máquina en grandes cantidades se necesita una máquina para balancear que mida tanto la magnitud como la ubicación del desbalanceo, y proporcione la corrección en forma directa y rápida. También se puede ahorrar tiempo si no es necesario hacer girar la pieza. En la figura 15-3 se muestra una máquina para balancear de este tipo. Esta máquina es esencialmente un péndulo que se puede inclinar en cualquier dirección, como lo ilustra el dibujo esquemático de la figura 15-4*a*. Cuando se monta en la plataforma de la máquina un espécimen desbalanceado, el péndulo se inclina. La dirección de la inclinación da la ubicación del desbalanceo, en tanto que el ángulo θ (Fig. 15-4*b*) indica la magnitud. Se recurre a cierto amortiguamiento para eliminar las oscilaciones del péndulo. En la figura 15-5 aparece un nivel universal que se monta sobre la plataforma de la máquina para balancear. Una burbuja, que se muestra en el centro, se mueve e indica tanto la ubicación como la magnitud de la corrección.

15-4 DESBALANCEO DINÁMICO

En la figura 15-6 se presenta un rotor largo que se va a montar en cojinetes en A y B. Se podría suponer que se colocan dos masas iguales m_1 y m_2 en los extremos opuestos del rotor, y a distancias iguales r_1 y r_2 del eje de rotación. Puesto que las masas son iguales y se encuentran en lados opuestos del eje de rotación, se puede colocar el rotor sobre rieles como se describió con anterioridad, para mostrar que se encuentra estáticamente balanceado en todas las posiciones angulares.

Si el rotor de la figura 15-6 se coloca en cojinetes y se hace girar a una velocidad angular ω rad/s, actúan las fuerzas centrífugas $m_1r_1\omega^2$ y $m_2r_2\omega^2$, respectivamente, en m_1 y m_2 sobre los extremos del rotor. Estas fuerzas centrífugas producen las reacciones desiguales en los cojinetes $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$, y todo el sistema de fuerzas gira con el rotor a la velocidad angular ω. Por consiguiente, una parte puede estar estáticamente balanceada y, al mismo tiempo, dinámicamente desbalanceada (Fig. 15-7).

En el caso general, la distribución de la masa a lo largo del eje de la pieza depende de la configuración de la misma, pero se tienen errores al maquinar, y

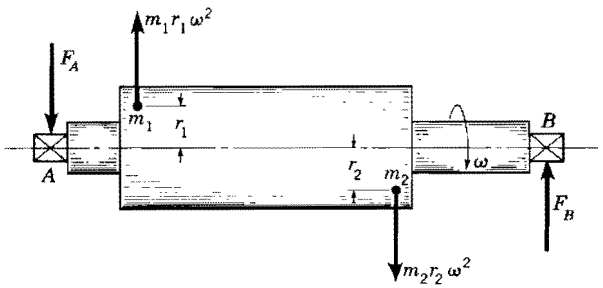


Figura 15-6 El rotor se encuentra estáticamente balanceado si $m_1 = m_2$ y $r_1 = r_2$; pero tiene un desbalanceo dinámico.

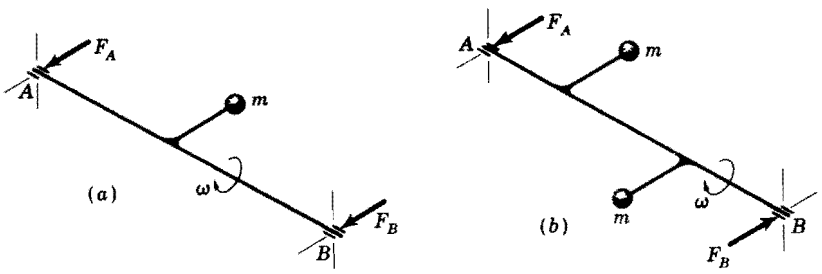


Figura 15-7 *a*) Desbalanceo estático; cuando el árbol gira, las dos reacciones en los cojinetes están en el mismo plano y tienen la misma dirección. *b*) Desbalanceo dinámico; cuando el árbol gira, el desbalanceo crea un par que tiende a voltear el árbol. El árbol se encuentra en equilibrio debido al par opuesto formado por las reacciones en los cojinetes. Nótese que las reacciones en los conjuntos siguen estando en el mismo plano, pero tienen direcciones opuestas.

también al fundir y forjar. Se pueden provocar otros errores o desbalanceos por un calibrado inapropiado, por la existencia de chavetas y por el montaje. Es responsabilidad del diseñador la de proyectar de tal manera que la línea que una a todos los centros de masa sea una recta que coincida con el eje de rotación. Sin embargo, rara vez se obtienen piezas perfectas y conjuntos perfectos y, en consecuencia, una línea que vaya de uno de los extremos de la pieza al otro, uniendo todos los centros de masa, casi siempre será una curva espacial que en ocasiones puede cruzar el eje de rotación o coincidir con él. Por consiguiente, una pieza desbalanceada estará casi siempre fuera de balance tanto estática como dinámicamente. Éste es el tipo de desbalanceo más general, y si la pieza está sostenida por dos cojinetes, es de esperar que las magnitudes así como las direcciones de estas reacciones giratorias en los cojinetes sean diferentes.

15-5 ANÀLISIS DEL DESBALANCEO

En esta sección se muestra cómo analizar cualquier sistema giratorio desbalanceado, y la manera de determinar las correcciones apropiadas aplicando métodos gráficos, métodos vectoriales y programaciones en computadora o calculadora.

Análisis gráfico Se usan las dos ecuaciones

$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum \mathbf{M} = 0 \tag{a}$$

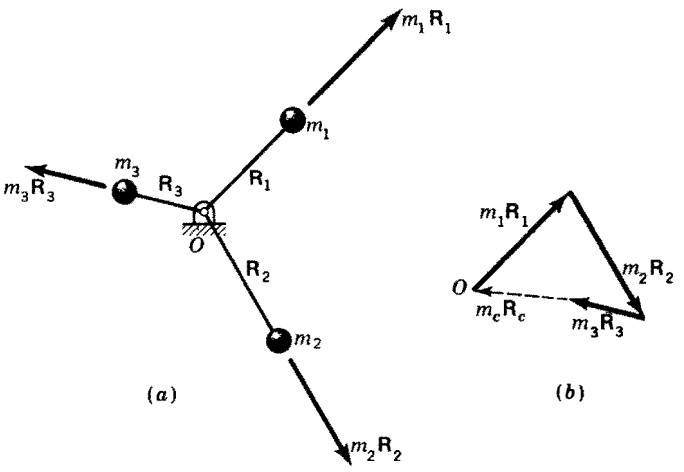


Figura 15-8 *a*) Sistema de tres masas que giran en un solo plano. *b*) Polígono de fuerzas centrífugas que da a $m_c\mathbf{R}_c$ como la corrección requerida.

para determinar la magnitud y ubicación de las correcciones. Se principia observando que la fuerza centrífuga es proporcional al producto mr de una masa excéntrica giratoria. Por tanto, las cantidades vectoriales, proporcionales a la fuerza centrífuga de cada una de las tres masas $m_1\mathbf{R}_1$, $m_2\mathbf{R}_2$, y $m_3\mathbf{R}_3$ de la figura 15-8*a*, actuarán en las direcciones radiales como se indica. La primera de las ecuaciones (*a*) se aplica construyendo un polígono de fuerzas (Fig. 15-8*b*). Puesto que este polígono requiere de otro vector, $m_c\mathbf{R}_c$ para cerrarse, la magnitud de la corrección es $m_c\mathbf{R}_c$ y su dirección es paralela a $\mathbf{R}_c$. Se supone que las tres masas de la figura 15-8 giran en un solo plano y, por tanto, es un caso de desbalanceo estático.

Cuando las masas giratorias se encuentran en planos diferentes, se deben usar las dos ecuaciones (*a*). La figura 15-9*a* es una vista desde un extremo de un eje en que se han montado las tres masas m_1, m_2, y m_3 a las distancias radiales respectivas R_1, R_2, y R_3. La figura 15-9*b* es una vista lateral del mismo eje, o árbol, mos-

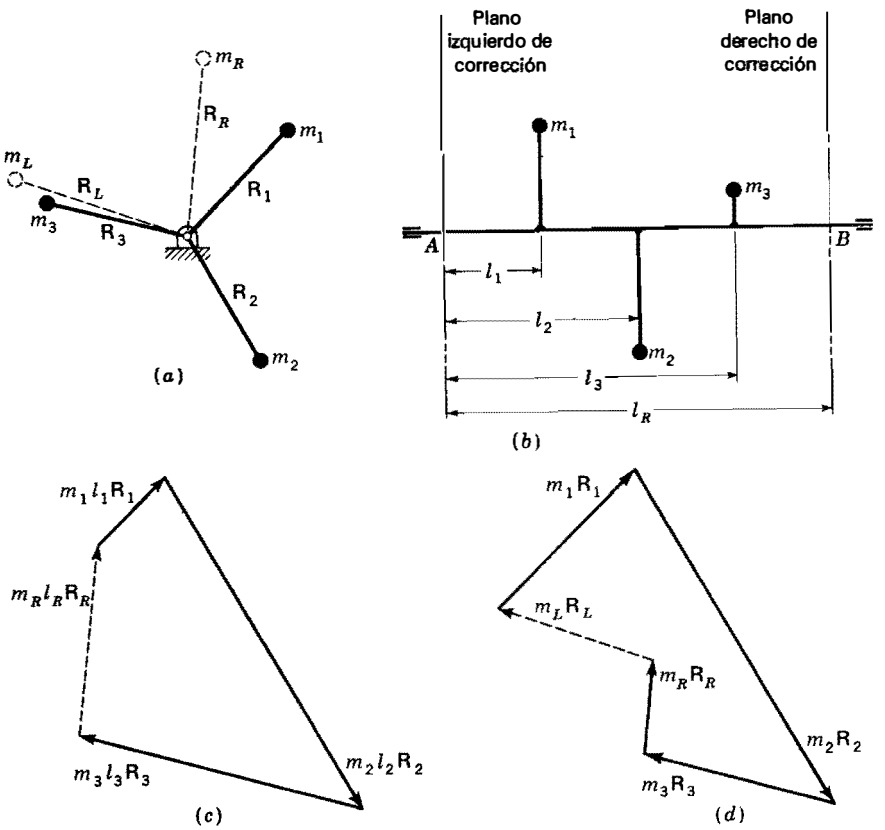


Figura 15-9 Análisis gráfico del desbalanceo.

trando los planos de corrección izquierdo y derecho, así como las distancias a las tres masas. Se desea hallar la magnitud y la ubicación angular de las correcciones para cada plano.

El primer paso de la solución es tomar una suma de los momentos de las fuerzas centrífugas en torno a algún punto, incluyendo las correcciones. Se decide tomar esta suma en torno a A en el plano izquierdo de corrección, para eliminar el momento de la masa izquierda de corrección. Por ende, al aplicar la segunda de las ecuaciones (a), da

$$\sum \mathbf{M}_A = m_1 l_1 \mathbf{R}_1 + m_2 l_2 \mathbf{R}_2 + m_3 l_3 \mathbf{R}_3 + m_R l_R \mathbf{R}_R = 0 \qquad (b)$$

Ésta es una ecuación vectorial en la que las direcciones de los vectores son paralelas, respectivamente, a los vectores $\mathbf{R}_N$ de la figura 15-9a. Como consecuencia, se puede construir el polígono de momentos de la figura 15-9c. El vector de cierre $m_R l_R \mathbf{R}_R$ da la magnitud y dirección de la corrección requerida para el plano derecho. Ahora ya es factible hallar las cantidades m_R y $\mathbf{R}_R$ porque generalmente se da en el problema la magnitud de $\mathbf{R}_R$. Por consiguiente, se puede escribir la ecuación

$$\sum \mathbf{F} = m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 + m_3 \mathbf{R}_3 + m_R \mathbf{R}_R + m_L \mathbf{R}_L = 0 \qquad (c)$$

Puesto que se da la magnitud de $\mathbf{R}_L$, esta ecuación se resuelve para la corrección izquierda $m_L \mathbf{R}_L$, contruyendo el polígono de fuerzas de la figura 15-9d.

Aunque a la figura 15-9c se le conoce como polígono de momentos, es conveniente destacar que los vectores que componen este polígono constan de la magnitud del momento y las direcciones del vector de posición. Se obtendría un verdadero polígono de momentos, haciendo girar el polígono 90° mmr, puesto que un vector momento es igual a $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$.

Análisis vectorial A continuación se presentan dos ejemplos que ilustran el procedimiento vectorial.

Ejemplo 15-1 En la figura 15-10 se representa un sistema giratorio que se ha idealizado con fines de ilustración. Un eje sin peso está apoyado en cojinetes en A y B, y gira a $\boldsymbol{\omega} = 100\hat{\mathbf{i}}$ rad/s. Cuando se emplean unidades inglesas usuales en EUA., los desbalanceos se describen en onzas. Se conectan tres pesos, w_1, w_2, y w_3 al eje y se hacen girar con él, produciendo un desbalanceo. Determínense las reacciones en los cojinetes en A y B para la posición particular que se ilustra.

SOLUCIÓN Se principia calculando la fuerza centrífuga debida a cada peso en rotación:

$$m_1 r_1 \omega^2 = \frac{2(3)(100)^2}{386(16)} = 9.72 \text{ lb} \qquad m_2 r_2 \omega^2 = \frac{1(2)(100)^2}{386(16)} = 3.24 \text{ lb}$$

$$m_3 r_3 \omega^2 = \frac{1.5(2.5)(100)^2}{386(16)} = 6.07 \text{ lb}$$

Estas tres fuerzas son paralelas al plano yz y se les puede escribir en forma vectorial por simple observación,

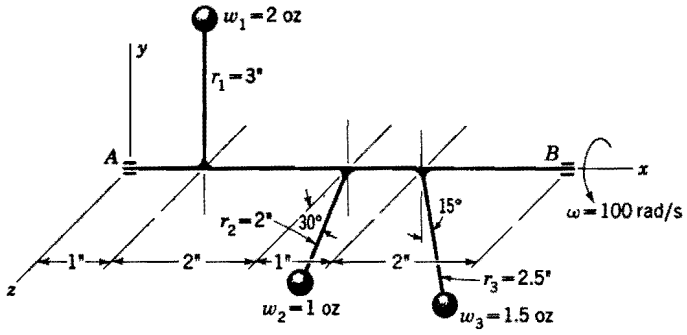


Figura 15-10

$$\mathbf{F}_1 = m_1 r_1 \omega^2 \underline{/\theta_1} = 9.72 \underline{/0°} = 9.72\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{F}_2 = m_2 r_2 \omega^2 \underline{/\theta_2} = 3.24 \underline{/120°} = -1.62\hat{\mathbf{j}} + 2.81\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{F}_3 = m_3 r_3 \omega^2 \underline{/\theta_3} = 6.07 \underline{/195°} = -5.86\hat{\mathbf{j}} - 1.57\hat{\mathbf{k}}$$

en donde θ se mide, en este ejemplo, en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj a partir de y, cuando se ve desde el extremo positivo de x. Los momentos de estas fuerzas tomadas alrededor del cojinete en A deben ser equilibrados por el momento de la rotación en el cojinete en B. Por lo tanto,

$$\sum \mathbf{M}_A = 1\hat{\mathbf{i}} \times 9.72\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{i}} \times (-1.62\hat{\mathbf{j}} + 2.81\hat{\mathbf{k}}) + 4\hat{\mathbf{i}} \times (-5.86\hat{\mathbf{j}} - 1.57\hat{\mathbf{k}}) + 6\hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{F}_B = 0$$

Al resolver, da la reacción en el cojinete en B, como

$$\mathbf{F}_B = 3.10\hat{\mathbf{j}} - 0.358\hat{\mathbf{k}} \text{ lb}$$

Para hallar la reacción en A, se repite el análisis. Cuando se toman momentos en torno a B se obtiene

$$\sum \mathbf{M}_B = -2\hat{\mathbf{i}} \times (-5.86\hat{\mathbf{j}} - 1.57\hat{\mathbf{k}}) + (-3\hat{\mathbf{i}}) \times (-1.62\hat{\mathbf{j}} + 2.81\hat{\mathbf{k}}) + (-5\hat{\mathbf{i}}) \times 9.72\hat{\mathbf{j}} + (-6\hat{\mathbf{i}}) \times \mathbf{F}_A = 0$$

Y al resolver una vez más, da

$$\mathbf{F}_A = -5.34\hat{\mathbf{j}} - 0.882\hat{\mathbf{k}} \text{ lb}$$

Se encuentra que las magnitudes de las dos reacciones son $F_A = 5.41$ lb y $F_B = 3.12$ lb. Nótese que éstas son las reacciones giratorias y que no se incluyen las componentes estáticas o estacionarias debidas a la fuerza de gravedad.

Ejemplo 15-2 *a*) ¿Cuáles son las reacciones en los cojinetes para el sistema ilustrado en la figura 15-11, si la velocidad es de 750 rpm?

b) Determínese la ubicación y la magnitud de una masa para balancear si se debe colocar a un radio de 0.25 m.

SOLUCIÓN *a*) La velocidad angular a este sistema es $\omega = 2\pi n/60 = 2\pi(750)/60 = 78.5$ rad/s. Las fuerzas centrífugas debidas a las masas son

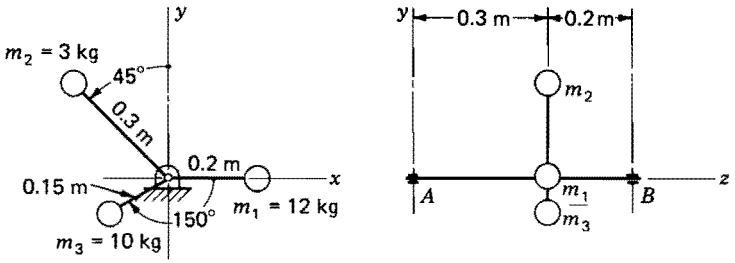


Figura 15-11

$$F_1 = m_1 r_1 \omega^2 = 12(0.2)(78.5)^2(10)^{-3} = 14.8 \text{ kN}$$
$$F_2 = m_2 r_2 \omega^2 = 3(0.3)(78.5)^2(10)^{-3} = 5.55 \text{ kN}$$
$$F_3 = m_3 r_3 \omega^2 = 10(0.15)(78.5)^2(10)^{-3} = 9.24 \text{ kN}$$

En forma vectorial, estas fuerzas son

$$\mathbf{F}_1 = 14.8\angle 0° = 14.8\hat{\mathbf{i}} \qquad \mathbf{F}_2 = 5.55\angle 135° = -3.92\hat{\mathbf{i}} + 3.92\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{F}_3 = 9.24\angle -150° = -8.00\hat{\mathbf{i}} - 4.62\hat{\mathbf{j}}$$

Para hallar la reacción en el cojinete en B, se toman momentos en torno al cojinete en A. Esta ecuación se escribe

$$\sum \mathbf{M}_A = 0.3\hat{\mathbf{k}} \times [(14.8\hat{\mathbf{i}}) + (-3.92\hat{\mathbf{i}} + 3.92\hat{\mathbf{j}}) + (-8.00\hat{\mathbf{i}} - 4.62\hat{\mathbf{j}})] + 0.5\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{F}_B = 0$$

Al tomar los productos vectoriales y reordenar da

$$0.5\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{F}_B = -0.21\hat{\mathbf{i}} - 0.864\hat{\mathbf{j}}$$

Cuando se resuelve esta ecuación para $\mathbf{F}_B$, se obtiene

$$\mathbf{F}_B = 1.73\hat{\mathbf{i}} + 0.42\hat{\mathbf{j}} \qquad \text{y} \qquad F_B = 1.78 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Se puede encontrar la reacción en A sumando las fuerzas. De donde,

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_3 - \mathbf{F}_B$$
$$= -14.8\hat{\mathbf{i}} - (-3.92\hat{\mathbf{i}} + 3.92\hat{\mathbf{j}}) - (-8.00\hat{\mathbf{i}} - 4.62\hat{\mathbf{j}}) - (1.73\hat{\mathbf{i}} + 0.42\hat{\mathbf{j}})$$
$$= -4.61\hat{\mathbf{i}} + 0.28\hat{\mathbf{j}}$$

y $$F_A = 4.62 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

b) Sea F_C la fuerza correctora. Entonces, para tener reacciones cero en los cojinetes,

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_C = 0$$

Por lo tanto
$$\mathbf{F}_C = -14.8\hat{\mathbf{i}} - (-3.92\hat{\mathbf{i}} + 3.92\hat{\mathbf{j}}) - (-8.00\hat{\mathbf{i}} - 4.62\hat{\mathbf{j}})$$
$$= -2.88\hat{\mathbf{i}} + 0.7\hat{\mathbf{j}} = 2.96\angle 166° \text{ kN}$$

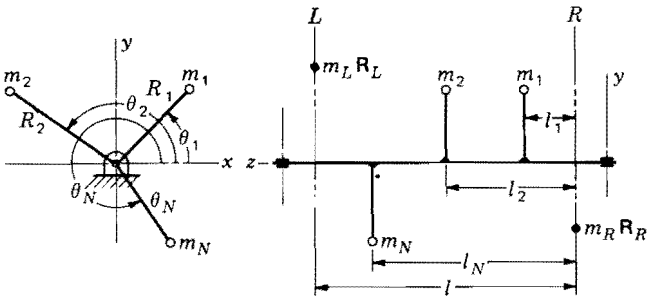


Figura 15-12 Notación para la solución en computadora; en la vista desde el extremo no se presentan las correcciones.

de modo que $$m_C = \frac{F_C}{r_C \omega^2} = \frac{2.96(10)^3}{0.25(78.5)^2} = 1.92 \text{ kg} \qquad \textit{Resp.}$$

Solución en computadora Para hacer un análisis en computadora, conviene escoger el plano *xy* como el de rotación, haciendo que *z* sea el eje de rotación, como se muestra en la figura 15-12. De esta manera los vectores de desbalanceo $m_i\mathbf{R}_i$ y los dos vectores de corrección, $m_L\mathbf{R}_L$ en el plano izquierdo y $m_R\mathbf{R}_R$ en el plano derecho, se pueden expresar en la notación polar bidimensional $m\mathbf{R} = mR/\underline{\theta}$. Esto facilita el empleo de la característica de conversión polar-rectangular y su inversa, que se encuentra en calculadoras programables.

Nótese que la figura 15-12 tiene $m_1, m_2, \ldots, m_N$ desbalanceos. Al resolver las ecuaciones (*b*) y (*c*) para las correcciones, se obtiene

$$m_L\mathbf{R}_L = -\sum_{i=1}^{i=N} \frac{m_i l_i}{l}\mathbf{R}_i \tag{15-6}$$

$$m_R\mathbf{R}_R = -m_L\mathbf{R}_L - \sum_{i=1}^{i=N} m_i\mathbf{R}_i \tag{15-7}$$

Estas dos ecuaciones se pueden programar con suma facilidad para obtener su solución en una computadora. Si se utiliza la calculadora programable, se sugiere que se emplee la tecla de suma de varios términos con cada término de la suma introducido mediante una tecla definida por el usuario.

15-6 BALANCEO DINÁMICO

Las unidades en que se mide el desbalanceo por costumbre han sido la onza-pulgada (oz·pulg), el gramo-centímetro (g·cm) y la unidad híbrida de gramo-pulgada (g·pulg). Si se sigue la práctica correcta en el uso de las unidades SI la unidad más apropiada de desbalanceo en este sistema es el miligramo-metro

(mg·m) porque en el SI se prefieren los prefijos en múltiplos de 1 000; en consecuencia, no se recomienda el prefijo *centi*. Es más, no se debe emplear más de un prefijo en una unidad compuesta y, de preferencia, la primer cantidad nombrada debe tener prefijo. Por consiguiente, no se deben utilizar el gramo-centímetro ni el kilogramo-milímetro, aunque ambos tienen magnitudes aceptables.

En este libro se uzará la onza-pulgada (oz·pulg) y el miligramo-metro (mg·m) como unidades de desbalanceo.

Se ha visto que basta el balanceo estático para discos, ruedas, engranes y elementos semejantes giratorios, cuando se puede suponer que la masa existe en un solo plano de rotación. En el caso de elementos de máquina más largos, como rotores de turbinas o armaduras de motores, las fuerzas centrífugas desbalanceadas conducen a pares cuyo efecto es tender a que el rotor se voltee. El propósito del balanceo es medir el par desbalanceado y agregar un nuevo par en la dirección opuesta y de la misma magnitud. Se introduce el nuevo par mediante la adición de masas en dos planos de corrección preseleccionados, o bien, restando masas (haciendo perforaciones) de los dos planos. Se va a balancear un rotor que por lo común tendrá desbalanceo tanto estático como dinámico y, en consecuencia, las masas de corrección, su ubicación radial o ambas cosas no serán las mismas para los dos planos de corrección. Esto significa también que la separación angular de las masas de corrección en los dos planos rara vez será de 180°. Por consiguiente, para balancear un rotor, se debe medir la magnitud y ubicación angular de la masa de corrección para cada uno de los dos planos de corrección.

Tres métodos de medir las correcciones para dos planos son de uso general: de la *cuna pivotada*, del *punto nodal* y de la *compensación mecánica*.

En la figura 15-13 se presenta un espécimen que se debe balancear montado sobre medios cojinetes o rodillos que están sujetos a una cuna. El extremo derecho

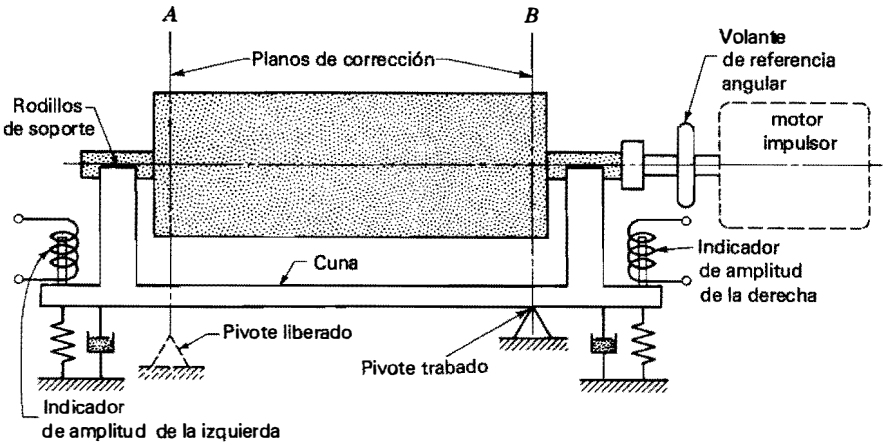


Figura 15-13 Dibujo esquemático de una máquina para balancear de cuna pivotada.

del espécimen se conecta a un motor impulsor por medio de una articulación universal. Se puede hacer oscilar la cuna alrededor de cualquiera de los dos puntos que se ajustan para coincidir con los planos de corrección del espécimen que se va a balancear. En la figura, el pivote izquierdo se muestra en la posición liberada, y la cuna y el espécimen pueden oscilar libremente en torno al pivote derecho, que aparece en la posición de trabajo. Los resortes y los amortiguadores se aseguran en cada extremo de la cuna para proporcionar un sistema vibrante de un solo grado de libertad. Con frecuencia se hacen ajustables de manera que se pueda ajustar la frecuencia natural con la velocidad del motor. También se muestran los indicadores de amplitud en cada extremo de la cuna. Estos transductores son transformadores diferenciales, como se describen en la sección 17-4, o bien, pueden constar de un imán permanente montado sobre la cuna que se mueve en relación con una bobina estacionaria, para generar un voltaje proporcional al desbalanceo.

Cuando los pivotes están localizados en los dos planos de corrección, se puede trabar cualquiera de ellos y se toman lecturas de la magnitud y ángulo de ubicación de la corrección. Las lecturas obtenidas serán totalmente independientes de las mediciones tomadas en el otro plano de corrección, porque un desbalanceo en el plano del pivote trabado no tendrá momento alguno en torno al mismo. Con el pivote de la derecha trabado, un desbalanceo corregible en el plano izquierdo de corrrección producirá vibración cuya amplitud se mide mediante el indicador izquierdo de amplitud. Cuando se hace (o se mide) esta corrección, se suelta el pivote de la derecha, se traba el de la izquierda y se hace otro conjunto de mediciones para el plano de corrección de la derecha, empleando el indicador de amplitud de la derecha.

La relación entre la magnitud del desbalanceo y la amplitud medida está dada por la ecuación (15-4). Al reordenar y sustituir e por r, da

$$X = \frac{m_u r(\omega/\omega_n)^2}{m\sqrt{(1-\omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \tag{15-8}$$

en donde $m_u r$ = desbalanceo
m = masa de la cuna y espécimen
X = amplitud

Esta ecuación muestra que la amplitud del movimiento X es directamente proporcional al desbalanceo $m_u r$. En la figura 15-14*a* se tiene una gráfica de ella para una razón de amortiguamiento en particular, ζ. La figura muestra que la máquina será más sensible cerca de la resonancia $(\omega = \omega_n)$, puesto que en esta región la amplitud máxima se registra para un desbalanceo dado. En las máquinas para balancear se introduce el amortiguamiento deliberadamente con el fin de filtrar ruidos y otras vibraciones que podrían afectar los resultados. El amortiguamiento ayuda también a mantener calibración contra efectos de la temperatura y otras condiciones del medio ambiente.

En la figura 15-13 no se incluye un generador de señales senoidales que se conecta al eje impulsor. Si la onda senoidal resultante se compara en un oscilos-

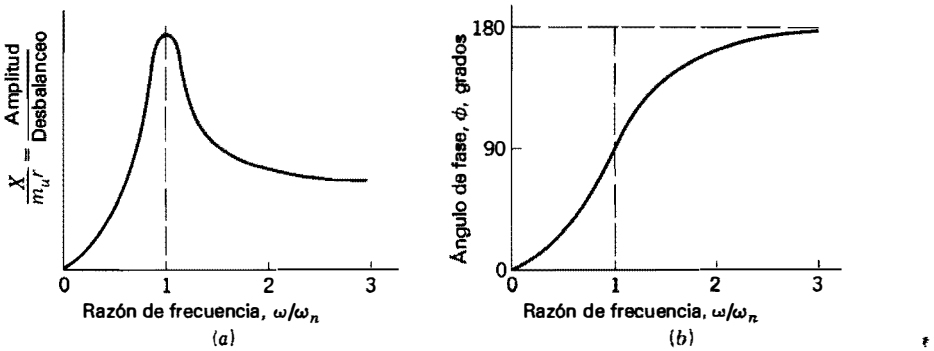


Figura 15-14

copio de haz dual, con la onda generada por uno de los indicadores de amplitud, se encontrará una diferencia de fase. Esta diferencia de fase angular es la ubicación angular del desbalanceo. En una máquina para balancear, un fasómetro electrónico mide el ángulo de fase y da el resultado en otro medidor calibrado en grados. Para localizar la corrección sobre el espécimen (Fig. 15-13) se hace girar con la mano el volante de referencia angular hasta que el ángulo indicado esté en línea con un indicador de referencia. Esto coloca el lado pesado del espécimen en cualquier posición preseleccionada y permite hacer la corrección.

Operando con la (*c*) de la sección 15-2, se obtiene la ecuación para el ángulo de fase en forma paramétrica. Por tanto,

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \tag{15-9}$$

En la figura 15-4*b* se muestra una gráfica de esta ecuación para una sola razón de amortiguamiento y varias razones de frecuencias. Esta curva muestra que, en la resonancia, cuando la velocidad ω del eje y la frecuencia natural ω_n del sistema del eje son las mismas, el desplazamiento va atrás del desbalanceo en un ángulo $\phi = 90°$. Si la parte superior del espécimen está girando alejándose del operador, el desbalanceo será horizontal y quedará directamente frente al propio operador, cuando el desplazamiento es máximo hacia abajo. En la figura se señala también que la ubicación angular tiende a 180° conforme la velocidad de árbol ω aumenta por encima de la resonancia.

15-7 BALANCEO DE MÁQUINAS

En la figura 15-15 se ilustra una máquina para balancear de cuna pivotada, para producción a alta velocidad. En el extremo izquierdo se puede ver el generador de señales montado en el eje.

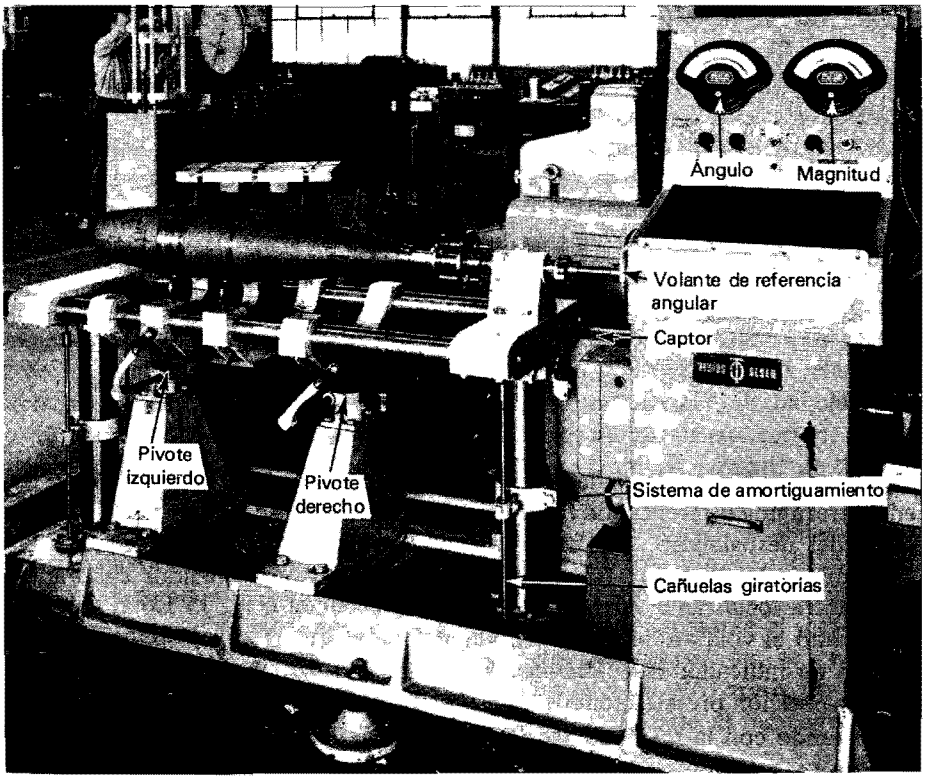


Figura 15-15 Máquina para balanceo estático y dinámico de cuna pivotada, marca Tinius Olsen, con un espécimen montado para su balanceo. (*Tinius Olsen Testing Machine Company, Willow Grove, Pennsylvania.*)

Balanceo de punto nodal La separación de los planos utilizando un punto de vibración cero o mínima recibe el nombre de *método del punto nodal* de balanceo. Examínese la figura 15-16 con el fin de ver cómo funciona este método. Aquí el espécimen que se va a balancear se muestra montado sobre cojinetes que están sujetos a una barra nodal. Se supone que el espécimen ya está balanceado en el plano de corrección de la izquierda y que todavía existe un desbalanceo en el plano derecho, tal como se indica. Debido a este desbalanceo, se produce una vibración en todos el conjunto, haciendo que la barra nodal oscile en torno a algún punto *O*, ocupando primero la posición *CC* y luego *DD*. Se localiza con facilidad el punto *O*, deslizando un indicador de carátula a lo largo de la barra nodal; entonces se encuentra fácilmente un punto de movimiento cero o de movimiento mínimo; éste es el punto nulo o nodal. Su localización es el centro de oscilación para un centro de percusión en el plano de corrección de la derecha.

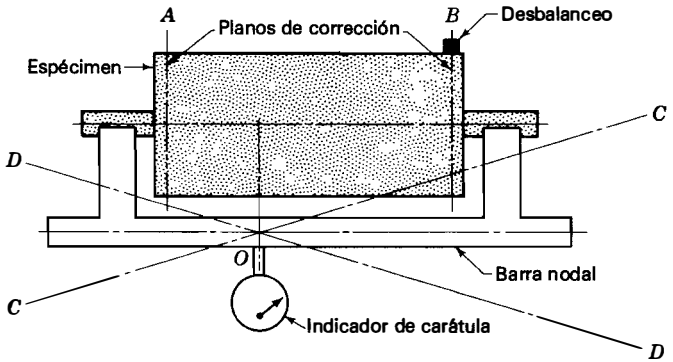


Figura 15-16 Separación de los planos aplicando el método del punto nodal. La barra nodal experimenta la misma vibración que el espécimen.

Al principio de esta exposición se supuso que no existía desbalanceo en el plano de corrección de la izquierda; sin embargo, si existe algún desbalanceo, su magnitud la dará el indicador de carátula ubicado en el punto nodal que se acaba de encontrar. Por ende, al localizar el indicador de carátula en este punto nodal, se mide el desbalanceo en el plano de la izquierda sin interferencia alguna del que existe en el plano de la derecha. De manera semejante, se puede encontrar otro punto nodal que sólo medirá el desbalanceo en el plano de corrección de la derecha sin interferencia alguna de la que existe en el plano de la izquierda.

En máquinas para balancear de tipo comercial que utilizan el principio del punto nodal, la separación de los planos se logra en redes eléctricas. Como ejemplo típico de estas se puede citar el *Micro Dynamic Balancer*, un esquema del cual aparece en la figura 15-17. En esta máquina se tiene una perilla de conmutación que selecciona cualquier de los planos de corrección y presenta el desbalanceo en un voltímetro calibrado, el cual está calibrado en unidades apropiadas de desbalanceo.

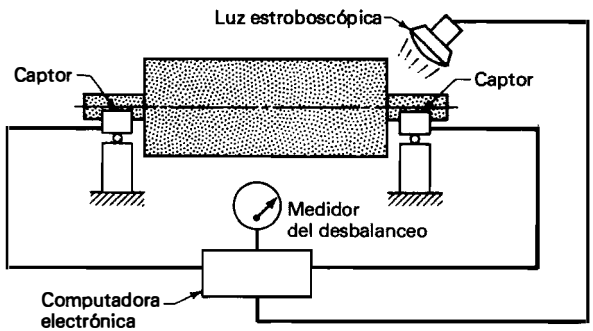


Figura 15-17 Diagrama del circuito eléctrico en una máquina para balancear Micro Dynamic. (*Micro Balancing, Inc., Garden City Park, New York.*)

La computadora de la figura 15-17 contiene un filtro que elimina los ruidos de los cojinetes y otras frecuencias no relacionadas con el desbalanceo. Se emplea una red multiplicadora para dar cualquier sensibilidad deseada y para hacer que el medidor indique la lectura en unidades de balanceo preseleccionadas. La luz estroboscópica es impulsada por un oscilador que se sincroniza con la velocidad del rotor.

El rotor se impulsa a una velocidad mucho mayor que la frecuencia natural del sistema y, puesto que el amortiguamiento es muy reducido, la figura 15-14*b* muestra que el ángulo de fase será de 180° aproximadamente. En el extremo derecho del rotor aparecen marcados grados o números que se pueden leer y son estacionarios bajo la luz estroboscópica durante la rotación del rotor. En consecuencia, lo único que se requiere es observar el número o grado de la estación particular que se marca bajo la luz estroboscópica para localizar el punto pesado. Cuando se cambia el conmutador hacia el otro plano de corrección, el medidor vuelve a indicar la magnitud y la luz estroboscópica ilumina la estación. A veces bastan cinco números de estación, distribuidos uniformemente en torno a la periferia, para lograr un balanceo adecuado.

La dirección de la vibración es horizontal y el ángulo de fase es casi de 180°; de donde, una rotación en que la parte superior del rotor se aleja del operador hará que el punto pesado quede en un plano horizontal y en el lado cercano del eje cuando se ilumina mediante la lámpara estroboscópica. Generalmente se coloca aquí un señalador para indicar su ubicación. Si, durante el balanceo de producción, se descubre que el ángulo de fase es menor que 180°, se puede desplazar ligeramente el señalador de tal manera que indique la posición apropiada para observar.

Compensación mecánica Un rotor desbalanceado localizado en una máquina para balancear al girar desarrolla una vibración. Se pueden introducir en la máquina de balancear contrafuerzas en cada plano de corrección que balanceen exactamente las fuerzas que provocan la vibración. El resultado de introducir estas fuerzas es un motor que funciona con suavidad. Al detenerse, se miden la ubicación y magnitud de la contrafuerza, para obtener la corrección exacta que se requiere. Este método recibe el nombre de *compensación mecánica.*

Cuando se utiliza la compensación mecánica, no importa la velocidad del rotor durante el balanceo debido a que el equipo estará calibrado para todas las velocidades. El rotor se puede impulsar por medio de una banda, a través de una articulación universal, o bien, puede autoimpulsarse si se trata, por ejemplo, de un motor de gasolina. El equipo electrónico es simple, no requiere amortiguamiento incluido y la máquina es fácil de operar debido a que el desbalanceo en ambos planos de corrección se mide simultáneamente, y la magnitud y ubicación se leen en forma directa.

Si se examina con cuidado la figura 15-18*a*, se puede entender cómo se aplica la compensación mecánica. Al observar el extremo del rotor, se ve uno de los planos de corrección con el desbalanceo que se va a corregir representado con wr.

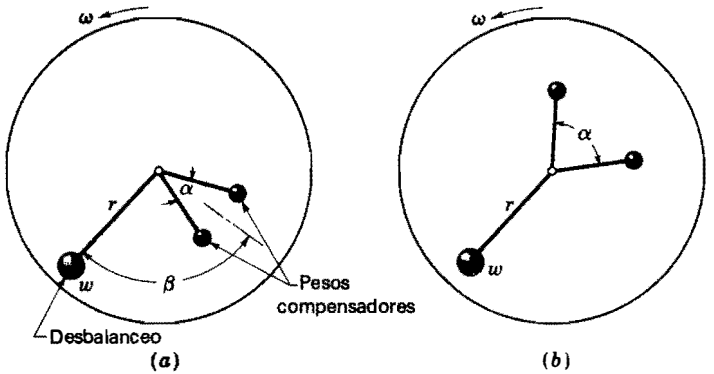


Figura 15-18 Plano de corrección visto a lo largo del eje de rotación, para mostrar el desbalanceo y los pesos compensadores: *a*) la posición de los pesos compensadores aumenta la vibración; *b*) sistema compensado.

En la figura aparecen también dos pesos compensadores. Estos tres pesos deben girar con la misma velocidad angular ω, pero se pueden hacer variar la posición de los pesos compensadores en relación el uno con el otro, y en relación con el peso no balanceado, por medio de dos controles. Uno de estos controles hace variar el ángulo α, es decir, el comprendido entre los pesos compensadores. El otro control cambia la posición angular de los pesos compensadores en relación con el desbalanceo, es decir, el ángulo β. La perilla que cambia el ángulo β es el control de *ubicación* y, cuando se compensa (balancea) el rotor en este plano, un indicador en la perilla señala la ubicación angular exacta del desbalanceo. La perilla que cambia el ángulo α es el control de *magnitud*, y también da una lectura directa cuando se compensa el desbalanceo del rotor. La magnitud de la vibración se mide eléctricamente y se presenta en un voltímetro. Por consiguiente, se asegura la compensación cuando se manipulan los controles de tal modo que la lectura en el voltímetro sea cero.

15-8 BALANCEO DE CAMPO CON LA CALCULADORA PROGRAMABLE†

Se puede balancear una máquina en el campo, balanceando un solo plano a la vez. Pero los efectos cruzados y la interferencia de los planos de corrección a menudo requieren que se balancee cada extremo del rotor dos o tres veces, a fin de obtener resultados satisfactorios. Algunas máquinas pueden requerir hasta una hora para lograr que alcancen su velocidad plena, lo que conduce incluso a más demoras en el procedimiento de balanceo.

† Los autores expresan su gratitud a W. B. Fagerstrom, de E. I. du Pont de Nemours, Wilmington, Delaware, por haber contribuido con algunas ideas para esta sección.

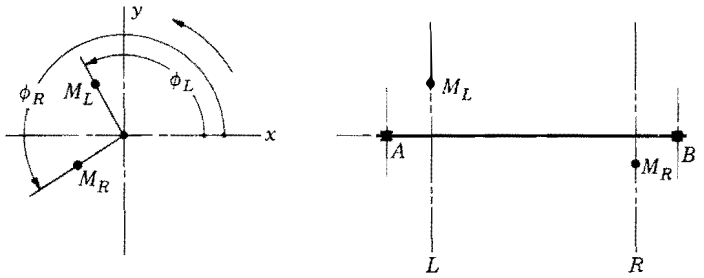


Figura 15-19 Notación para el balanceo de campo en dos planos. El sistema *xy* es la referencia giratoria.

El balanceo de campo es necesario para rotores muy grandes, para los que las máquinas de balanceo no son prácticas; e incluso, aun cuando los rotores de alta velocidad se balanceen en el taller durante su fabricación, con frecuencia resulta necesario volverlos a balancear en el campo debido a ligeras deformaciones producidas por el embarque, por fluencia o por altas temperaturas de operación.

Tanto Rathbone como Thearle‡ han desarrollado métodos de balanceo en dos planos en el campo que ahora se pueden expresar en notación de números complejos y se resuelven con una calculadora programable. El tiempo que se ahorra el usar una calculadora programable es de varias horas cuando se compara con los métodos gráficos o el análisis con números complejos usando una calculadora científica ordinaria.

En el análisis que sigue, se usarán letras en negritas para representar números complejos:

$$\mathbf{R} = R\underline{/\theta} = Re^{j\theta} = x + \hat{\mathbf{j}}y$$

En la figura 15-19 se supone que existen los desbalanceos desconocidos $\mathbf{M}_L$ y $\mathbf{M}_R$ en los planos de corrección izquierdo y derecho, respectivamente. Las magnitudes de estos desbalanceos son M_L y M_R y se localizan en los ángulos ϕ_L y ϕ_R a partir de la referencia de la rotación. Cuando se han encontrado estos desbalanceos, se localizan sus negativos en los planos izquierdo y derecho para lograr el balanceo.

Los desbalanceos giratorios $\mathbf{M}_L$ y $\mathbf{M}_R$ producen perturbaciones en los cojinetes *A* y *B*. Si se usa un equipo comercial para balanceo en el campo, se pueden medir las amplitudes y las ubicaciones angulares de estas perturbaciones. Se usará la notación $\mathbf{X} = X\underline{/\phi}$, con los subíndices apropiados, para designar estas amplitudes.

En el balanceo de campo, se hacen tres corridas o pruebas, como sigue:

‡T.C. Rathbone, "Turbine Vibration and Balancing", *Trans, ASME,* 1929, p. 267; *E.L. Thearle, "Dynamic Balancing in the Field", Trans ASME,* 1934, p. 745.

Primera corrida. Mídase la amplitud $\mathbf{X}_A = X_A/\underline{\phi_A}$ en el cojinete A y la amplitud $\mathbf{X}_B = X_B/\underline{\phi_B}$ en el cojinete B, debidas sólo a los desbalanceos originales $\mathbf{M}_L = M_L/\underline{\phi_L}$ y $\mathbf{M}_R = M_R/\underline{\phi_R}$.

Segunda corrida. Agréguese la masa de ensayo $\mathbf{m}_L = m_L/\underline{\theta_L}$ al plano de corrección de la izquierda y mídanse las amplitudes $\mathbf{X}_{AL} = X_{AL}/\underline{\phi_{AL}}$ y $\mathbf{X}_{BL} = X_{BL}/\underline{\phi_{BL}}$ en los cojinetes izquierdo y derecho (A y B), respectivamente.

Tercera corrida. Elimínese la masa de ensayo $\mathbf{m}_L = m_L/\underline{\theta_L}$. Agréguese la masa de ensayo $\mathbf{m}_R = m_R/\underline{\theta_R}$ al plano de corrección del lado derecho y mídanse nuevamente las amplitudes en los cojinetes. Estos resultados se designan como $\mathbf{X}_{AR} = X_{AR}/\underline{\phi_{AR}}$ para el cojinete A y $\mathbf{X}_{BR} = X_{BR}/\underline{\phi_{BR}}$ para el cojinete B.

Nótese que en las corridas anteriores, el término "masa de ensayo" significa lo mismo que desbalanceo de ensayo, a condición de que se utilice una distancia unitaria desde el eje de rotación.

Para desarrollar las ecuaciones para el desbalanceo que se deben encontrar definamos primero la *rigidez compleja*, con lo cual se quiere dar a entender la amplitud que resultaría en cualquiera de los cojinetes debida a un desbalanceo unitario ubicado en la intersección de la marca de referencia giratoria y uno de los planos de corrección. Por tanto, es necesario encontrar las rigideces complejas $\mathbf{A}_L$ y $\mathbf{B}_L$ debidas a un desbalanceo unitario ubicado en la intersección de la marca de referencia giratoria y el plano L. Además, se requieren las rigideces complejas $\mathbf{A}_R$ y $\mathbf{B}_R$ debidas a un desbalanceo unitario localizado en la intersección de la marca de referencia giratoria y el plano R.

Si se conocieran estas rigideces, se podrían escribir los conjuntos siguientes de ecuaciones complejas:

$$\mathbf{X}_{AL} = \mathbf{X}_A + \mathbf{A}_L\mathbf{m}_L \qquad \mathbf{X}_{BL} = \mathbf{X}_B + \mathbf{B}_L\mathbf{m}_L \tag{a}$$

$$\mathbf{X}_{AR} = \mathbf{X}_A + \mathbf{A}_R\mathbf{m}_R \qquad \mathbf{X}_{BR} = \mathbf{X}_B + \mathbf{B}_R\mathbf{m}_R \tag{b}$$

Después de que se efectúan las tres corridas, las rigideces serán las únicas incógnitas en estas ecuaciones; de donde,

$$\mathbf{A}_L = \frac{\mathbf{X}_{AL} - \mathbf{X}_A}{\mathbf{m}_L} \qquad \mathbf{B}_L = \frac{\mathbf{X}_{BL} - \mathbf{X}_B}{\mathbf{m}_L}$$

$$\mathbf{A}_R = \frac{\mathbf{X}_{AR} - \mathbf{X}_A}{\mathbf{m}_R} \qquad \mathbf{B}_R = \frac{\mathbf{X}_{BR} - \mathbf{X}_B}{\mathbf{m}_R} \tag{15-10}$$

Luego, a partir de la definición de rigidez, de la primera corrida se tiene

$$\mathbf{X}_A = \mathbf{A}_L\mathbf{M}_L + \mathbf{A}_R\mathbf{M}_R \qquad \mathbf{X}_B = \mathbf{B}_L\mathbf{M}_L + \mathbf{B}_R\mathbf{M}_R \tag{c}$$

Al resolver simultáneamente este par de ecuaciones, da

$$\mathbf{M}_L = \frac{\mathbf{X}_A\mathbf{B}_R - \mathbf{X}_B\mathbf{A}_R}{\mathbf{A}_L\mathbf{B}_R - \mathbf{A}_R\mathbf{B}_L} \qquad \mathbf{M}_R = \frac{\mathbf{X}_B\mathbf{A}_L - \mathbf{X}_A\mathbf{B}_L}{\mathbf{A}_L\mathbf{B}_R - \mathbf{A}_R\mathbf{B}_L} \tag{15-11}$$

Estas ecuaciones se pueden programar en la forma polar compleja, o bien, en la forma rectangular compleja. Las sugerencias que siguen se propusieron suponiendo una forma rectangular compleja para la solución.

Puesto que los datos originales se plantearon en coordenadas polares, se debe escribir una subrutina para transformar los datos a coordenadas rectangulares, antes de almacenarlos.

Las ecuaciones revelan que con frecuencia se utilizan la sustracción, división y multiplicación complejas. Estas operaciones se pueden plantear como subrutinas que deben pedirse del programa principal. Si $\mathbf{A} = a + \hat{\mathbf{j}}b$ y $\mathbf{B} = c + \hat{\mathbf{j}}d$, para la sustracción compleja es

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a - c) + \hat{\mathbf{j}}(b - d) \tag{15-12}$$

Para la multiplicación compleja, se tiene

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (ac - bd) + \hat{\mathbf{j}}(bc + ad) \tag{15-13}$$

y para la división compleja la fórmula es

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{(ac + bd) + \hat{\mathbf{j}}(bc - ad)}{c^2 + d^2} \tag{15-14}$$

Con estas subrutinas resulta sencillo programar las ecuaciones (15-10) y (15-11). La dirección indirecta puede ahorrar espacio.

Como verificación de la programación, utilícense los siguientes datos: $\mathbf{X}_A = 8.6/\underline{63°}$, $\mathbf{X}_B = 6.5/\underline{206°}$, $\mathbf{m}_L = 10/\underline{270°}$, $\mathbf{m}_R = 12/\underline{180°}$, $\mathbf{X}_{AL} = 5.9/\underline{123°}$, $\mathbf{X}_{BL} = 4.5/\underline{228°}$, $\mathbf{X}_{AR} = 6.2/\underline{36°}$, $\mathbf{X}_{BR} = 10.4/\underline{162°}$. Las respuestas son $\mathbf{M}_L = 10.76/\underline{146.6°}$ y $\mathbf{M}_R = 6.20/\underline{245.4°}$.

Según Fagerstrom, los ángulos de vibración utilizados se pueden expresar en dos sistemas diferentes. El primero de ellos es el *sistema de marca estacionaria y transportador giratorio*. (RPSM-*rotating-protractor-stationary-mark system*). Éste es el sistema que se usó en el análisis anterior y el que preferiría un teórico. En la práctica real, casi siempre resulta más fácil tener el transportador estacionario y utilizar una marca giratoria, como una cuña o un cuñero. Éste se conoce como sistema de transportador estacionario y marca giratoria (RMSP *rotating-mark-stationary-protractor-system*)). La única diferencia entre ambos sistemas está en el signo del ángulo de vibración, pero no hay cambio de signo en la masa de ensayo o corrección.

15-9 BALANCEO DEL MOTOR DE UN SOLO CILINDRO

Las masas giratorias en un motor de un solo cilindro se pueden balancear aplicando los métodos ya analizados en este capítulo. Sin embargo, las masas de movimiento alternativo no se pueden balancear en lo absoluto y, en consecuencia, el contenido de esta sección se refiere en realidad al desbalanceo.

Aunque las masas con movimiento alternativo no se pueden balancear usando un simple contrapeso, es posible modificar las fuerzas de sacudimiento (véase la sección 14-9) desbalanceando las masas giratorias. Como ejemplo de esto, agréguese un contrapeso opuesto al pasador de la manivela cuya masa exceda a la giratoria en la mitad de la masa con movimiento alternativo (por lo general se agrega al contrapeso entre un medio y dos tercios de la masa con movimiento alternativo para alterar las características de balanceo en los motores de un solo cilindro). Se designará la masa del contrapeso por m_C, sustitúyase esta masa en la ecuación (14-24) y úsese un signo negativo porque el contrapeso está opuesto al pasador de la manivela, entonces la fuerza de inercia debida a este contrapeso es

$$\mathbf{F}_C = -m_C r\omega^2 \cos \omega t\, \hat{\mathbf{i}} - m_C r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\, \hat{\mathbf{j}} \qquad (a)$$

Nótese que tanto la masa para balancear como el pasador de la manivela tienen el mismo radio. Designando por m_A y m_B las masas de las piezas giratorias y con movimiento alternativo, respectivamente, como en el capítulo 14, se tiene

$$m_C = m_A + \frac{m_B}{2} \qquad (b)$$

según la suposición anterior. Ahora la (a) se puede escribir

$$\mathbf{F}_C = -\left(m_A + \frac{m_B}{2}\right) r\omega^2 \cos \omega t\, \hat{\mathbf{i}} - \left(m_A + \frac{m_B}{2}\right) r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\, \hat{\mathbf{j}} \qquad (c)$$

La fuerza de inercia debida a las masas giratorias y con movimiento alternativo es, según las ecuaciones (14-28) y (14-29),

$$\mathbf{F}_{A,B} = F^x \hat{\mathbf{i}} + F^y \hat{\mathbf{j}} = [(m_A + m_B) r\omega^2 \cos \omega t + m_B r\omega^2 \frac{r}{l} \cos 2\omega t]\hat{\mathbf{i}} + m_A r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\, \hat{\mathbf{j}} \qquad (d)$$

Al sumar las ecuaciones (c) y (d), se obtiene la fuerza de inercia resultante como

$$\mathbf{F} = \left(\frac{m_B}{2} r\omega^2 \cos \omega t + m_B r\omega^2 \frac{r}{l} \cos 2\omega t\right)\hat{\mathbf{i}} - \frac{m_B}{2} r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\, \hat{\mathbf{j}} \qquad (15\text{-}15)$$

El vector

$$\frac{m_B}{2} r\omega^2 (\cos \omega t\, \hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen} \omega t\, \hat{\mathbf{j}})$$

se denomina *componente primaria* de la (15-15). Esta componente tiene la magnitud $m_B r\omega^2/2$ y se puede representar como un vector giratorio *hacia atrás* (en el mismo sentido que el movimiento de las manecillas del reloj) con velocidad angular ω. La componente restante de la (15-15) recibe el nombre de *componente secundaria*; es la proyección x de un vector cuya longitud es $m_B r\omega^2(r/l)$ y que gira *hacia adelante* (en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj) con una velocidad angular 2ω.

La fuerza de inercia máxima se produce cuando $\omega t = 0$ y, según la (15-15), se ve que

$$F_{\text{máx}} = m_B r\omega^2\left(\frac{r}{l} + \frac{1}{2}\right) \qquad (e)$$

porque cos $\omega t =$ cos $2\omega t = 1$ cuando $\omega t = 0$. Antes que se agregara el contrapeso adicional, la fuerza de inercia máxima era

$$F_{\text{máx}} = m_B r\omega^2\left(\frac{r}{l} + 1\right) \qquad (f)$$

Por ende, en este caso, el efecto del contrapeso adicional es reducir la fuerza máxima de sacudimiento en un 50% de la componente primaria y agregar fuerzas de inercia verticales en donde antes no existían. En la figura 15-20 se tiene la representación gráfica de la ecuación (15-15) como un diagrama polar, para un valor r/l de $\frac{1}{4}$. Aquí el vector OA gira en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj con una velocidad angular 2ω. La proyección horizontal de este vector OA' es la componente secundaria. El vector OB, la componente primaria, gira en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj con una velocidad angular ω. Se muestra la fuerza total de sacudimiento F para la posición de 30° y es la suma de los vectores OB y $BB' = OA'$.

Método de la masa imaginaria Stevensen ha redefinido y ampliado un método de balanceo de motores que aquí recibe el nombre de *método de la masa imaginaria*.† Es probable que este sistema se conozca en algunos círculos como *método del rotor virtual*, porque utiliza lo que se podría llamar un rotor virtual que contragira para recibir parte del efecto del pistón en un motor de movimiento alternativo.

Antes de entrar en detalles, es necesario explicar un cambio en el método de ver el círculo de la manivela de un motor. Al desarrollar el método de la masa

† La presentación que se da aquí se debe a Edward N. Stevensen, Universidad de Hartford, tomada de sus notas de clase con su autorización. Aunque se han hecho algunos cambios para conformarse a la notación de este libro, todo el material le pertenece a Stevensen. Él hace referencia a Maleev y Lichty [V. L. Maleev, *Internal Combustion Engines,* McGraw-Hill, New York, 1933, y L.C. Lichty, *Internal Combustion Engines,* 5d. ed., McGraw-Hill, New York, 1939] y aclara que vio por primera vez el método en los libros de Maleev y Lichty.

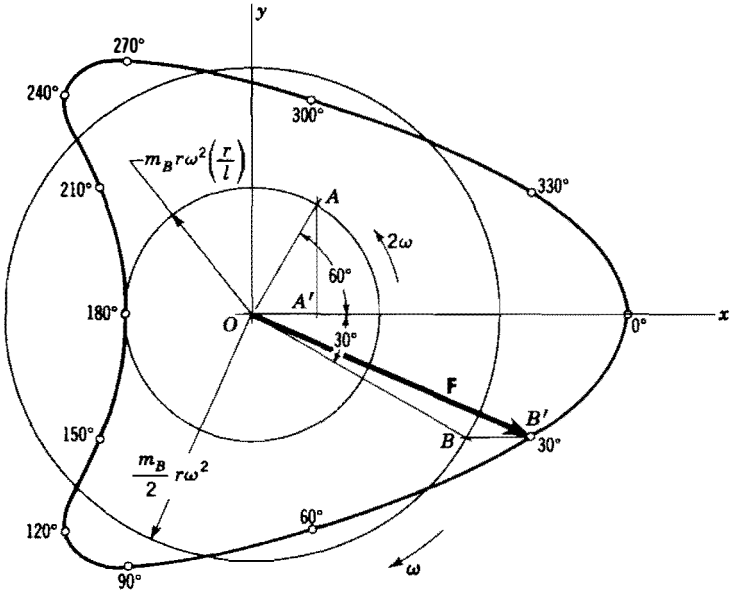


Figura 15-20 Diagrama polar de las fuerzas de inercia en un motor de un solo cilindro, para $r/l = \frac{1}{4}$. El contrapeso incluye la mitad de la masa con movimiento alternativo.

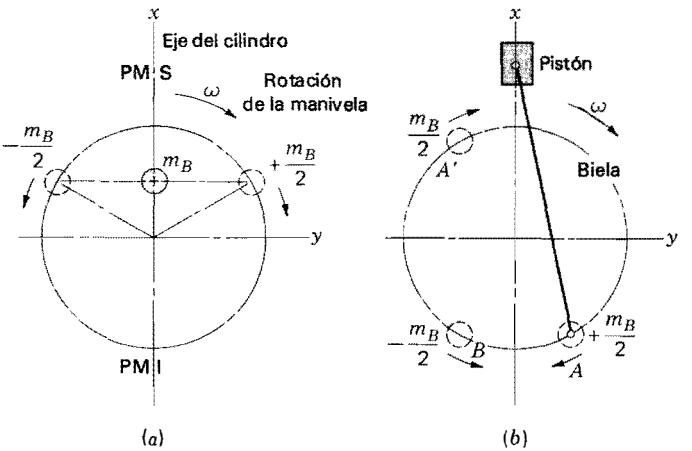


Figura 15-21 Nótese que los ejes son derechos, pero la vista del círculo de la manivela es desde eje z negativo.

imaginaria en esta sección y la que sigue, se utiliza el sistema coordenadas de la figura 15-21*a*. Éste parece ser un sistema izquierdo porque el eje y se localiza girando en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj a partir de x, y porque la rotación positiva se muestra con tal sentido. Se adopta esta notación porque se ha utilizado desde hace mucho tiempo en las industrias automovilística.‡ Si el lector lo prefiere, puede considerar que este sistema es uno tridimensional derecho, visto desde el eje z negativo.

El método de la masa imaginaria emplea dos masas ficticias, cada una de las cuales es igual a la mitad de la masa equivalente con movimiento alternativo en el armónico particular estudiado. El propósito de estas masas ficticias es reemplazar los efectos de la masa con movimiento alternativo. Estas masas imaginarias giran alrededor del centro de la manivela, en direcciones opuestas y con velocidades iguales. Están acomodadas de tal modo que se reúnen tanto en el *punto muerto superior* (PMS) como en el *punto muerto inferior* (PMI) como se ve en la figura 15-21*a*. La masa $+m_B/2$ gira *con* el movimiento de la manivela; la otra masa $-m_B/2$, gira en sentido *opuesto* al movimiento de la manivela. La masa que gira con la manivela está designada en la figura por medio de un signo más y la que gira en la dirección opuesta, con un signo menos. El centro de masa de las dos masas giratorias queda siempre sobre el eje del cilindro. El método de la masa imaginaria se concibió porque el movimiento del pistón y la fuerza de inercia resultante siempre se pueden representar mediante una serie de Fourier. Este tipo de serie tiene un número infinito de términos, cada uno de los cuales representa un movimiento armónico simple de frecuencia y amplitud conocidas. Resulta que las amplitudes de frecuencias más altas son tan pequeñas que se puede hacer caso omiso de ellas y, por ende, sólo se necesitan un número pequeño de amplitudes de frecuencia más baja. Asimismo, no están presentes las armónicas impares (tercera, quinta, etc.) debido a la simetría del movimiento del pistón.

Cada armónica, la primera, segunda, cuarta, etc., se representa mediante un par de masas imaginarias. Las velocidades angulares de estas masas son $\pm\omega$ para la primera armónica, $\pm 2\omega$ para la segunda, $\pm 4\omega$ para la cuarta, y así sucesivamente. Rara vez es necesario tomar en cuenta de la sexta armónica en adelante.

Stevensen sugiere la siguiente regla para ubicar las masas imaginarias:

> *Para cualquier posición dada de las manivelas, las ubicaciones de las masas imaginarias se encuentran, en primer lugar, determinando los ángulos de recorrido de cada manivela a partir de su punto muerto superior y, en segundo lugar, moviendo sus masas imaginarias, una en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj y la otra en el sentido opuesto, describiendo ángulos iguales al ángulo de la manivela multiplicado por el número de la armónica.*

Todos estos ángulos se deben medir a partir de la misma posición de punto muerto de la manivela.

‡ Los lectores que sean aficionados a los automóviles antiguos comprenderán esta convención, porque es la dirección en la que se mueve la manivela para arrancar ese tipo de motores.

Tabla 15-1 Fuerzas de inercia en un motor de un solo cilindro

Tipo	Masa equivalente	Radio	Con el eje del cilindro (x)	Transversal al del cilindro (y)
Centrífuga	m_A	r	$m_A r\omega^2 \cos \omega t$	$m_A r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$
	m_{AC}	r_C	$m_{AC} r_C \omega^2 \cos(\omega t + \pi)$	$m_{AC} r_C \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \pi)$
Del movimiento alternativo	m_B	r	$m_B r\omega^2 \cos \omega t$	0
Primera armónica	m_{BC}	r_C	$m_{BC} r_C \omega^2 \cos(\omega t + \pi)$	$m_{BC} r_C \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \pi)$
Segundo armónica	$\frac{m_B r}{4l}$	r	$\frac{m_B r}{4l}(r)(2\omega)^2 \cos 2\omega t$	0

Apliquemos este método al motor de un solo cilindro, tomando en cuenta únicamente la primera armónica. En la figura 15-21*b*, la masa $+m_B/2$ localizada en A gira a la velocidad ω con la manivela, en tanto que la masa $-m_B/2$ en B gira a la velocidad $-\omega$ opuesta a la rotación de la manivela. Se puede balancear la masa imaginaria en A agregando una masa igual en A', para que gire con el cigüeñal. Sin embargo, la masa que está en B no se puede balancear por la adición ni por la sustracción de masas en cualquier parte del cigüeñal, porque está girando en dirección opuesta. Cuando la mitad de la masa de partes con movimiento alternativo se balancea de esta manera, es decir, agregando la masa en A', la parte no balanceada de la primera armónica, debida a la masa en B, hace que el motor vibre en el plano de rotación en forma igual en todas las direcciones, como una verdadera masa giratoria no balanceada.

Es interesante saber que en los motores de motocicleta de un solo cilindro, un desbalanceo de adelante hacia atrás es menos objetable que un desbalanceo de arriba hacia abajo. Por esta razón, esos motores están *sobrebalanceados* utilizando un contrapeso cuya masa es más de la mitad de la masa con movimiento alternativo.

Es imposible balancear la segunda armónica y armónicas superiores con masas giratorias a las velocidades del cigüeñal, puesto que la frecuencia del desbalanceo es superior a la de la rotación del cigüeñal. Se ha realizado el balanceo de las segundas armónicas usando ejes engranados para que giren al doble de la velocidad del cigüeñal del motor, como en el caso del motor Plymouth Arrow 1976; pero al costo de complicación tremendo. Por lo común, no se hace esto.

Para tener un medio de consulta rápido, en la tabla 15-1, se da un resumen de las fuerzas de inercia en el motor de un solo cilindro, con masas de balanceo. Se han obtenido las ecuaciones indicadas partiendo de las ecuaciones (14-24) y (14-27), y se han reescrito de tal modo que el efecto de la segunda armónica se presente como una masa igual a $m_B r/4l$ con movimiento alternativo a la velocidad de 2ω. Nótese que se utiliza el subíndice C para designar los contrapesos (masas para balancear) y sus radios. Puesto que las masas centrífugas de balanceo se seleccionarán y colocarán para contrabalancear las fuerzas centrífugas, el único

balanceo que se produce a lo largo del eje del cilindro será la suma de las tres últimas entradas. Del mismo modo, el único desbalanceo a través del eje del cilindro será el valor en el cuarto renglón. Se pueden predeterminar los valores máximos del desbalanceo en estas dos direcciones, en cualquier razón deseada entre sí, como se indicó con anterioridad, y obtenerse una solución para m_{BC} en el radio r_C.

Si se utiliza este método para incluir el efecto de la cuarta armónica, se tendrá una masa adicional de $m_B r^3/16l^3$ con movimiento alternativo a una velocidad de 2ω, y una masa de $-m_B r^3/64l^3$ con movimiento alternativo a una velocidad de 4ω, ilustrando la importancia decreciente de las armónicas superiores.

15-10 BALANCEO DE MOTORES CON VARIOS CILINDROS

Para lograr una comprensión básica del problema de balanceo en motores con varios cilindros, consideremos un motor de dos cilindros en línea cuyas manivelas tienen una separación de 180° y las partes giratorias ya balanceadas mediante contrapesos. Este tipo de motor aparece ilustrado en la figura 15-22. Al aplicar el método de la masa imaginaria para las primeras armónicas se obtiene el diagrama de la figura 15-22*a*. En ella se muestra que las masas $+1$ y $+2$, que giran en el mismo sentido del movimiento de manecillas del reloj, se balancean entre sí, como lo hacen las masas -1 y -2, que giran en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj. Por consiguiente, las fuerzas de las primeras armónicas están inherentemente balanceadas para esta disposición de la manivela. Sin embargo, en la figura 15-22*b* se muestra que estas fuerzas no están en el mismo plano. Por esta

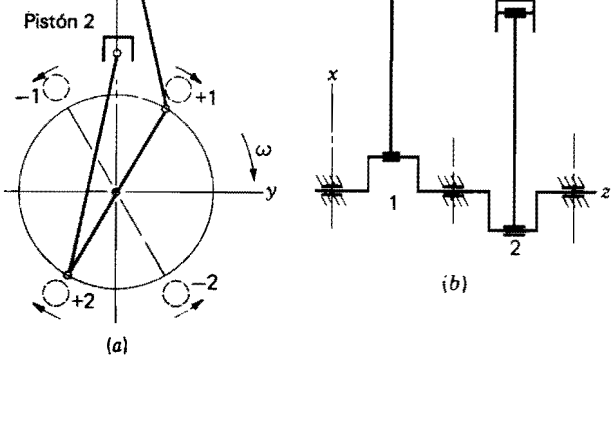


Figura 15-22 *a*) Primeras armónicas; *b*) cigüeñal de dos codos con tres cojinetes principales.

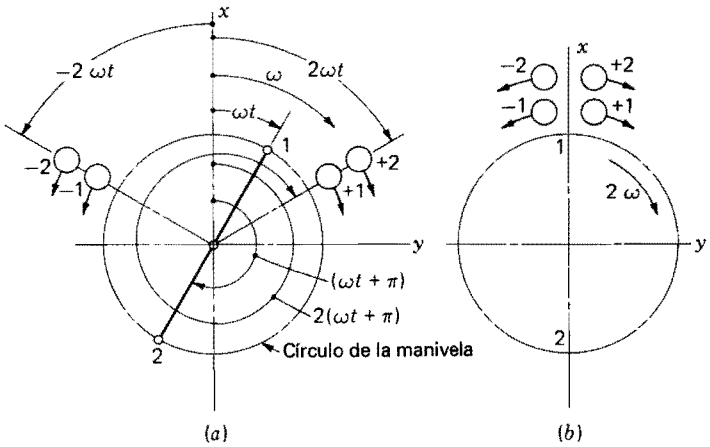


Figura 15-23 Posiciones de la segunda armónica de las masas imaginarias; *a*) posiciones para el mismo ángulo de la manivela que el de la figura 15-22*a; b*) posiciones extremas o de punto muerto.

razón se deberán establecer pares desbalanceados que tiendan a hacer girar el motor alrededor del eje *y*. Se pueden determinar los valores de estos pares usando las expresiones de fuerza de la tabla 15-1, junto con la distancia de acoplamiento, porque se pueden aplicar las ecuaciones a cada cilindro por separado. Es posible balancear el par debido a las masas giratorias reales, lo mismo que a las semimasas imaginarias que giran con el motor; sin embargo, no se puede balancear el par debido a la semimasa de la primera armónica que está contragirando.

En la figura 15-23*a* se muestra la ubicación de las masas imaginarias para la segunda armónica, empleando la regla de Stevensen. En este diagrama se muestra que no están balanceadas las fuerzas de las segundas armónicas. Puesto que los desbalanceos máximos se presentan en los puntos muertos, casi siempre se trazan los diagramas para esta posición extrema, colocando la manivela 1 en el PMS, como en la figura 15-23*b*. Este desbalanceo produce una vibración en el plano *xz* con la frecuencia 2ω.

El diagrama para las cuartas armónicas, que no se ilustra, es el mismo que el de la figura 15-23*b,* sólo que, por supuesto, la velocidad es 4ω.

Motor de cuatro cilindros En la figura 15-24*c* se ilustra un motor de cuatro cilindros en línea cuyas manivelas están espaciadas a 180°. Este motor se puede tratar como si fueran dos motores de dos cilindros uno contra el otro. Por consiguiente, las fuerzas de la primera armónica siguen balanceadas y, además, como lo indican las figuras 15-24*a* y *c,* también están balanceados los pares de la primera armónica. No obstante, estos pares tenderán a desviar el cojinete central de un cigüeñal de tres cojinetes, hacia arriba y hacia abajo, y a doblar el centro de un eje de dos cojinetes, en la misma forma.

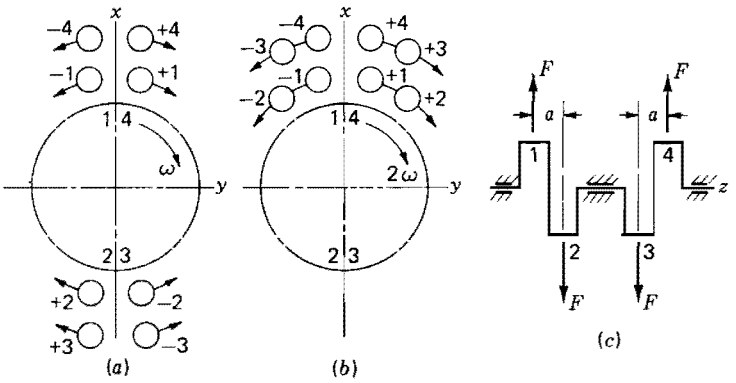


Figura 15-24 Motor de cuatro cilindros; *a*) posiciones de las primeras armónicas; *b*) posiciones de las segundas armónicas; *c*) cigüeñal al que se le agregaron los pares de las primeras armónicas.

En la figura 15-24*b* se consigna el hecho de que cuando las manivelas 1 y 4 se encuentran en el punto muerto superior, todas las masas que representan a la segunda armónica y que se desplazan en ambas direcciones, se acumulan en ese punto muerto, produciendo una fuerza desbalanceada. El centro de masa de todas las masas siempre está sobre el eje x y, por tanto, las segundas armónicas desbalanceadas provocan una vibración vertical con una frecuencia igual al doble de la velocidad del motor. Esta característica es típica de todos los motores de cuatro cilindros con esta disposición de las manivelas. Puesto que todas las masas y todas las fuerzas actúan en la misma dirección, no hay acción de acoplamiento.

Un diagrama de las cuartas armónicas sería idéntico al que aparece en la figura 15-24*b*, y los efectos son los mismos, pero tienen una frecuencia más elevada y ejercen menos fuerza.

Motor de tres cilindros. En la figura 15-25 se ilustra un motor de tres cilindros en línea con manivelas espaciadas a 120°. Nótese que los cilindros están numerados de acuerdo con el orden en el que llegan al punto muerto superior. En la figura 15-26 se muestra que las fuerzas de las primeras, segundas y cuartas armónicas están completamente balanceadas y sólo las fuerzas de las sextas armónicas están completamente desbalanceadas. Estas fuerzas no balanceadas tenderán a crear una vibración en el plano de las líneas centrales de los cilindros; pero la magnitud de las fuerzas es muy pequeña y se pueden despreciar por lo que respecta a la vibración.

Un análisis de los pares de las fuerzas de la primera armónica muestra que cuando la manivela 1 se encuentra en el punto muerto superior (Fig. 15-25), existe una componente vertical de las fuerzas en las manivelas 2 y 3, cuya magnitud es igual a la mitad de la fuerza sobre la manivela 1. La resultante de estas dos componentes hacia abajo es equivalente a una fuerza hacia abajo, con igual magnitud a la de la fuerza sobre la manivela 1 y localizada a la mitad entre las manivelas 2 y

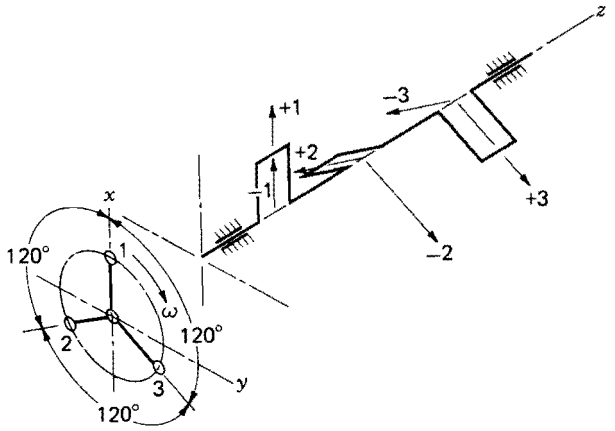


Figura 15-25 Disposición de las manivelas de un motor de tres cilindros; se muestran las fuerzas de las primeras armónicas.

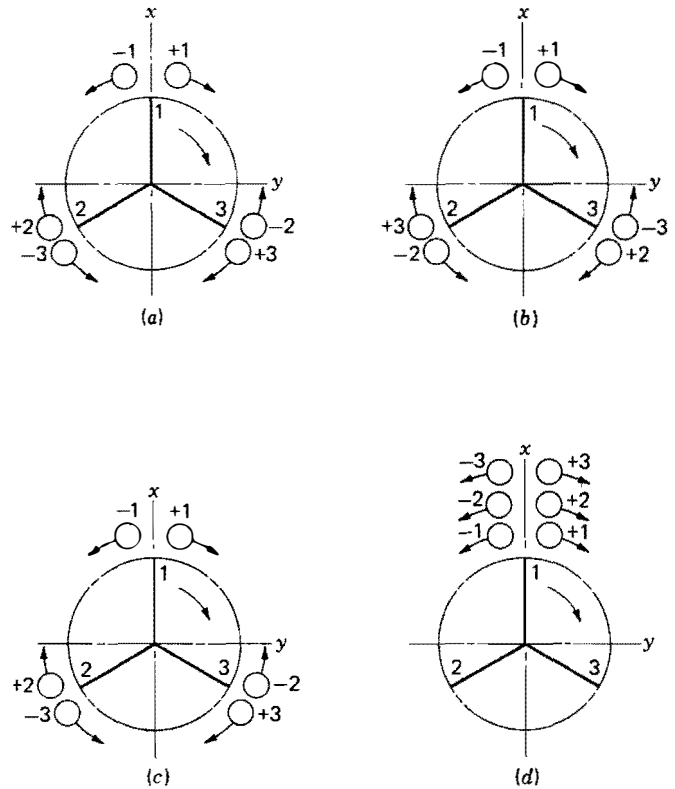


Figura 15-26 Posiciones de las masas imaginarias del motor de tres cilindros: *a*) primeras armónicas; *b*) segundas armónicas; *c*) cuartas armónicas; *d*) sextas armónicas.

3. Así pues, se establece un par con un brazo igual a la distancia entre el centro de la manivela 1 y la línea central entre las manivelas 2 y 3. Al mismo tiempo, las componentes horizontales de las fuerzas $+2$ y -2 se cancelan entre sí, como también lo hacen las componentes horizontales de las fuerzas $+3$ y -3 (Fig. 15-25). Por lo tanto, no existe par horizontal. Se encuentran pares similares para las segundas como para las cuartas armónicas; de donde, aunque un motor de tres cilindros ya está inherentemente balanceado por lo que respecta a las fuerzas de las primeras, segundas y cuartas armónicas, no queda todavía libre de vibraciones debido a la presencia de pares en estas armónicas.

Motor de seis cilindros. Si se concibe un motor de seis cilindros en línea como una combinación de dos motores de tres cilindros espalda con espalda, con los cilindros en paralelo, tendrá el mismo balanceo inherente de las primeras, segundas y cuartas armónicas. Y, en virtud de la simetría, los pares de cada motor de tres cilindros actuarán en direcciones opuestas y se balancearán entre sí. Estos pares, aunque estén perfectamente balanceados, tienden a doblar el cigüeñal y la caja del cigüeñal (llamada también cárter) y requieren el uso de una construcción rígida para la operación a alta velocidad. Al igual que antes, las sextas armónicas están completamente desbalanceadas y tienden a crear una vibración en el plano vertical, con una frecuencia de 6ω. Sin embargo, la magnitud de estas fuerzas es muy pequeña y prácticamente despreciable como fuente de vibración.

Otros motores. Tomando en consideración la disposición de los cilindros y el espaciamiento de las manivelas, se pueden obtener una gran cantidad de configuraciones. Para cualquier combinación, se puede investigar la situación del balanceo para cualquier armónica deseada, mediante los métodos que se delinearon en esta sección. Se debe prestar una atención especial al análisis de esa parte de la regla de Stevensen que exige la determinación del ángulo de recorrido a partir del punto muerto superior del cilindro que se está considerando, y moviendo las masas imaginarias describiendo los ángulos apropiados a partir de ese mismo punto muerto superior. Esto es particularmente importante cuando se investigan motores radiales y de pistones opuestos.

Como problemas prácticos, es posible que el lector desee aplicar estos métodos para confirmar los siguientes hechos:

1. En un motor radial de tres cilindros con una manivela y tres bielas que tienen el mismo pasador, las masas negativas están inherentemente balanceadas para las fuerzas de las primeras armónicas, en tanto que las masas positivas se localizan siempre en el pasador de la manivela. Estos dos hallazgos son inherentemente verdaderos para todos los motores radiales. Asimismo, puesto que el motor radial tiene sus cilindros en un solo plano, no se producen pares desbalanceados. El motor de tres cilindros tendrá fuerzas no balanceadas en las segundas armónicas y armónicas superiores.

2. Un motor de dos cilindros con pistones opuestos, con un espaciamiento de las manivelas de 180°, está balanceado para las fuerzas en las primeras, segundas y cuartas armónicas; pero no está balanceado para los pares.
3. Un motor de cuatro cilindros en línea con manivelas a 90° está balanceado para las fuerzas en las primeras armónicas; pero no está balanceado para los pares. En la segunda armónica está balanceado tanto para las fuerzas como para los pares.
4. Un motor de ocho cilindros en línea con manivela a 90° está inherentemente balanceado tanto para las fuerzas como para los pares en la primera y segunda armónicas; pero no está balanceado en la cuarta armónica.
5. Un motor de ocho cilindros en V con manivelas a 90° está inherentemente balanceado para las fuerzas en la primera y segunda armónica y para los pares en la segunda. Los pares no balanceados en la primera armónica se pueden balancear por medio de contrapesos que introducen un par igual y opuesto. Este tipo de motor está desbalanceado para las fuerzas en la cuarta armónica.

15-11 BALANCEO DE ESLABONAMIENTOS†

Los dos problemas que surgen al balancear eslabonamientos son el balanceo de la fuerza de sacudimiento y el balanceo del momento de sacudimiento.

En el balanceo de fuerzas de un eslabonamiento nos debe importar la posición del centro total de masa. Si se puede encontrar una manera de hacer que este centro total de masa se mantenga estacionario, la suma vectorial de todas las fuerzas sobre el armazón será siempre cero. Lowen y Berkof‡ han catalogado cinco métodos para balancear fuerzas:

1. El método del balanceo estático, en el que las masas concentradas de los eslabones se sustituyen con sistemas de masas que son estáticamente equivalentes.
2. El método de los vectores principales, en el que se obtiene una expresión analítica para el centro de masa y luego se manipula para saber cómo se puede influir en su trayectoria.
3. El método de los vectores linealmente independientes, en el que el centro de masa de un mecanismo se hace estacionario, provocando que se anulen los coeficientes de los términos dependientes del tiempo de la ecuación que describe la trayectoria del centro total de masa.

† Quienes deseen investigar este tema con mayor detalle deben principiar con la siguiente referencia, en la que todo un número está dedicado al tema del balanceo de eslabonamientos: G.G. Lowen y R.S. Berkof, "Survey of Investigations into the Balancing of Linkages", *J. Mech.*, vol. 3, no. 4, p. 221, 1968. Este número contiene 11 traducciones del tema tomadas de publicaciones alemanas y rusas.
‡ Ibid.

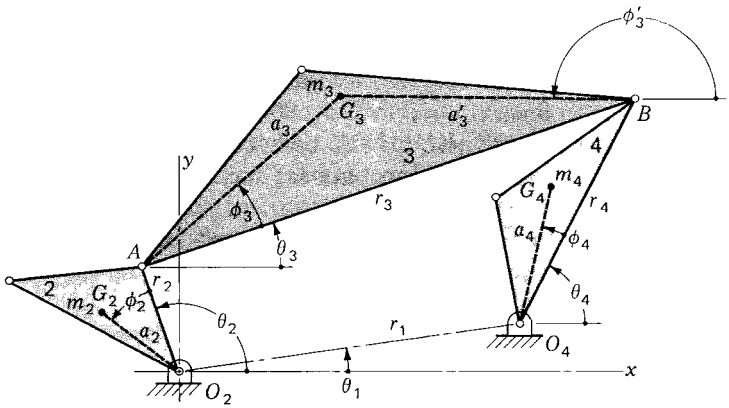


Figura 15-27 Eslabonamiento de cuatro barras en el que se muestran las posiciones arbitrarias de las masas de los eslabones.

4. El uso de masas impulsadas por levas para mantener estacionario el centro total de masa.
5. La adición de un mecanismo duplicado axialmente mediante el cual se hace estacionario el nuevo centro total combinado.

Lowen y Berkof afirman que se ha informado de apenas unos cuantos estudios sobre el problema del balanceo del momento de sacudimiento. Este problema se analiza más en la sección 15-12.

Aquí sólo se presenta el método de Berkof-Lowen,† que emplea el método de los vectores linealmente independientes. Este método se desarrollará por completo para el eslabonamiento de cuatro barras, pero sólo se dan los resultados finales para un eslabonamiento de seis barras típico. He aquí el procedimiento: en primer lugar, se encuentra la ecuación que describe la trayectoria del centro total de masa del eslabonamiento. Esta ecuación contendrá ciertos términos cuyos coeficientes dependen del tiempo. Luego, se hace estacionario el centro total de masa cambiando la posición de las masas de los eslabones individuales, de modo que se anulen los coeficientes de todos los términos que dependen del tiempo. Para lograr esto, es necesario escribir la ecuación en tal forma que los vectores unitarios que dependen del tiempo contenidos en la ecuación sean linealmente independientes.

En la figura 15-27 se ilustra un eslabonamiento general de cuatro barras que tiene las masas de los eslabones m_2 localizada en G_2, m_3 localizada en G_3, y m_4 localizada en G_4. Las coordenadas a_i, ϕ_i, describen las posiciones de estos puntos dentro de cada eslabón. Princípiese por definir la posición del centro total de masa del eslabonamiento por vector $\mathbf{r}_s$:

† R.S. Berkof y G.G. Lowen, "A New Method for Completely Force Balancing Simple Linkages", *J. Eng. Ind. Trans. ASME*, ser. B, vol. 91, no. 1, pp. 21-26, February 1969.

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{\mathcal{M}}(m_2\mathbf{r}_{s2} + m_3\mathbf{r}_{s3} + m_4\mathbf{r}_{s4}) \qquad (a)$$

en donde $\mathbf{r}_{s2}$, $\mathbf{r}_{s3}$, y $\mathbf{r}_{s4}$ son los vectores que describen las posiciones de m_2, m_3, y m_4, respectivamente, en el sistema de coordenadas xy. Por consiguiente, según la figura 15-27

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{s2} &= a_2 e^{j(\theta_2+\phi_2)} \\ \mathbf{r}_{s3} &= r_2 e^{j\theta_2} + a_3 e^{j(\theta_3+\phi_3)} \\ \mathbf{r}_{s4} &= r_1 e^{j\theta_1} + a_4 e^{j(\theta_4+\phi_4)} \end{aligned} \qquad (b)$$

La masa total del mecanismo $\mathcal{M}$ es

$$\mathcal{M} = m_2 + m_3 + m_4 \qquad (c)$$

Al sustituir la (b) en la (a) da

$$\mathcal{M}\mathbf{r}_s = (m_2 a_2 e^{j\phi_2} + m_3 r_2)e^{j\theta_2} + (m_3 a_3 e^{j\phi_3})e^{j\phi_3} + (m_4 a_4 e^{j\phi_4})e^{j\theta_4} + m_4 r_1 e^{j\theta_1} \qquad (d)$$

en donde se ha usado la identidad $e^{j(\alpha+\beta)} = e^{j\alpha}e^{j\beta}$. Para un eslabonamiento de cuatro barras, la ecuación vectorial de cierre del circuito es

$$r_2 e^{j\theta_2} + r_3 e^{j\theta_3} - r_4 e^{j\theta_4} - r_1 e^{j\theta_1} = 0 \qquad (e)$$

Por tanto, los términos que dependen del tiempo $e^{j\theta_2}$, $e^{j\theta_3}$, y $e^{j\theta_4}$ de la (d) no son linealmente independientes; para hacer que lo sean, resuélvase la (e) para uno de los vectores unitarios, póngase por caso, $e^{j\theta_3}$, y sustitúyase el resultado en la (d). De donde,

$$e^{j\theta_3} = \frac{1}{r_3}(r_1 e^{j\theta_1} - r_2 e^{j\theta_2} + r_4 e^{j\theta_4}) \qquad (f)$$

La (d) se convierte ahora en

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathbf{r}_s = &\left(m_2 a_2 e^{j\phi_2} + m_3 r_2 - m_3 a_3 \frac{r_2}{r_3} e^{j\phi_3}\right)e^{j\theta_2} + \left(m_4 a_4 e^{j\phi_4} + m_3 a_3 \frac{r_4}{r_3} e^{j\phi_3}\right)e^{j\theta_4} \\ &+ \left(m_4 r_1 + m_3 a_3 \frac{r_1}{r_3} e^{j\phi_3}\right)e^{j\theta_1} \end{aligned} \qquad (g)$$

La (g) muestra que el centro de masa puede hacerse estacionario en la posición

$$\mathbf{r}_s = \frac{r_1}{r_3 \mathcal{M}}(m_4 r_3 + m_3 a_3 e^{j\phi_3})e^{j\theta_1} \qquad (15\text{-}16)$$

si se anulan los siguientes coeficientes de los términos que dependen del tiempo

$$m_2 a_2 e^{j\phi_2} + m_3 r_2 - m_3 a_3 \frac{r_2}{r_3} e^{j\phi_3} = 0 \qquad (h)$$

$$m_4 a_4 e^{j\phi_4} + m_3 a_3 \frac{r_4}{r_3} e^{j\phi_3} = 0 \qquad (i)$$

Pero la (*h*) se puede simplificar localizando G_3 respecto al punto B, en lugar de hacerlo en relación con el punto A (Fig. 15-27). Así, pues,

$$a_3 e^{j\phi_3} = r_3 + a_3' e^{j\phi_3'}$$

Con esta sustitución, la ecuación (*h*) se convierte en

$$m_2 a_2 e^{j\phi_2} - m_3 a_3' \frac{r_2}{r_3} e^{j\phi_3'} = 0 \qquad (j)$$

Se deben satisfacer las ecuaciones (*i*) y (*j*) para obtener el balance total de las fuerzas. Estas ecuaciones conducen a los dos conjuntos de condiciones:

$$\begin{aligned} m_2 a_2 &= m_3 a_3' \frac{r_2}{r_3} \qquad \text{y} \qquad \phi_2 = \phi_3' \\ m_4 a_4 &= m_3 a_3 \frac{r_4}{r_3} \qquad \text{y} \qquad \phi_4 = \phi_3 + \pi \end{aligned} \qquad (15\text{-}17)$$

Un estudio de estas condiciones mostrará que se pueden especificar de antemano la masa y su ubicación para cualquier eslabón individual; y luego se puede obtener el balance completo reacomodando la masa de los otros dos eslabones.

El problema usual en el balanceo de un eslabonamiento de cuatro barras es que las longitudes de los eslabones r_i se especifican con anticipación en términos de la función por efectuarse. Para esta situación, se pueden agregar contrapesos a los eslabones de entrada y salida, con el objeto de redistribuir sus masas, en tanto que no se altera la geometría del tercer eslabón móvil.

Cuando se agregan contrapesos se deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$m_i a_i \underline{/\phi_i} = m_i^0 a_i^0 \underline{/\phi_i^0} + m_i^* a_i^* \underline{/\phi_i^*} \qquad (15\text{-}18)$$

en donde m_i^0, a_i^0, ϕ_i^0 son los parámetros del eslabonamiento no balanceado, m_i^*, a_i^*, ϕ_i^* son los parámetros del contrapeso y m_i, a_i, ϕ_i son los parámetros que se obtienen de las ecuaciones (15-17). Una segunda condición que es preciso satisfacer en general es

$$m_i = m_i^0 + m_i^* \qquad (15\text{-}19)$$

Si la solución para un problema de balanceo puede permanecer como el producto masa-distancia $m_i^* a_i^*$, no es necesario usar la ecuación (15-19), y se puede resolver la (15-18) para llegar a

$$m_i^* a_i^* = \sqrt{(m_i a_i)^2 + (m_i^0 a_i^0)^2 - 2(m_i a_i) m_i^0 a_i^0)[\cos(\phi_i - \phi_i^0)]} \qquad (15\text{-}20)$$

$$\phi_i^* = \tan^{-1} \frac{m_i a_i \operatorname{sen}\phi_i - m_i^0 a_i^0 \operatorname{sen}\phi_i^0}{m_i a_i \cos\phi_i - m_i^0 a_i^0 \cos\phi_i^0} \qquad (15\text{-}21)$$

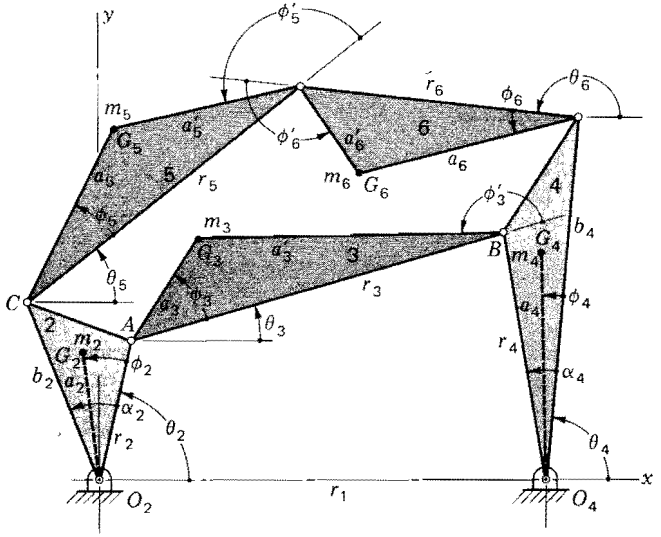


Figura 15-28 Notación para un eslabonamiento de seis barras.

En la figura 15-28 se ilustra un eslabonamiento típico de seis barras y la notación correspondiente. Para este caso, las condiciones de Berkof-Lowen para el balanceo total son

$$m_2 \frac{a_2}{r_2} e^{j\phi_2} = m_5 \frac{a'_5}{r_5} \frac{b_2}{r_2} e^{j(\phi'_5+\alpha_2)} + m_3 \frac{a'_3}{r_3} e^{j\phi'_3} \tag{15-22a}$$

$$m_4 \frac{a_4}{r_4} e^{j\phi_4} = m_6 \frac{a'_6}{r_6} \frac{b_4}{r_4} e^{j\phi'_6} - m_3 \frac{a_3}{r_3} e^{j(\phi_3+\alpha_4)} \tag{15-22b}$$

$$m_5 \frac{a_5}{r_5} e^{j\phi_5} = -m_6 \frac{a_6}{r_6} e^{j\phi_6} \tag{15-22c}$$

Se pueden idear relaciones similares para otros eslabonamientos de seis barras para el balanceo total, las ecuaciones (15-22) muestran que es preciso satisfacer una determinada relación masa-geometría entre los eslabones 5 y 6, después de lo cual es factible especificar las masas de dos eslabones cualesquiera así como sus ubicaciones. Entonces se logra el balanceo mediante una redistribución de las masas de los tres eslabones movibles restantes.

Es importante hacer notar que la adición de contrapesos para balancear las fuerzas de sacudimiento quizá incrementará las fuerzas internas en los cojinetes así como el momento de sacudimiento. Por consiguiente, solo un balanceo parcial puede representar la solución más adecuada posible entre estos tres efectos.

Tabla 15-2 Parámetros de un eslabonamiento de cuatro barras desbalanceado

Eslabón i	1	2	3	4
r_i, mm	140	50	150	75
a_i^0, mm	—	25	80	40
ϕ_i^0	—	0°	15°	0°
a'^0, mm	—	—	75.6	—
$\phi_i'^0$	—	—	164.1°	—
m_i^0, kg	—	0.046	0.125	0.054

Ejemplo 15-3 En la tabla 15-2 se presenta una tabulación de las dimensiones, masas y ubicaciones de los centros de masa de un mecanismo de cuatro barras cuyo eslabón 2 es el de entrada y el eslabón 4 es el de salida. Se desea obtener un balanceo completo de las fuerzas agregando contrapesos a los eslabones de entrada y salida. Hállense los valores masa-distancia y las ubicaciones angulares de cada contrapeso.

SOLUCIÓN Partiendo de las ecuaciones (15-17), primero se encuentra

$$m_2a_2 = m_3^0 a_3'^0 \frac{r_2}{r_3} = (0.125)(75.6)\frac{50}{150} = 3.15 \text{ g} \cdot \text{m}$$

$$\phi_2 = \phi_3'^0 = 164.1°$$

$$m_4a_4 = m_3^0 a_3^0 \frac{r_4}{r_3} = (0.125)(80)\frac{75}{150} = 5.0 \text{ g} \cdot \text{m}$$

$$\phi_4 = \phi_3^0 + 180 = 15 + 180 = 195°$$

Nótese que m_2a_2 y m_4a_4 son los valores masa-distancia *después* de que se han agregado los contrapesos. Asimismo, nótese que no se obtendrán los parámetros del eslabón 3.

A continuación calcúlese

$$m_2^0a_2^0 = (0.046)(25) = 1.5 \text{ g} \cdot \text{m} \qquad m_4^0a_4^0 = (0.054)(40) = 2.16 \text{ g} \cdot \text{m}$$

Si se aplica la (15-20), se calculan los valores masa-distancia para el contrapeso del eslabón 2 como

$$m_2^*a_2^* = \sqrt{(m_2a_2)^2 + (m_2^0a_2^0)^2 - 2(m_2a_2)(m_2^0a_2^0)\cos(\phi_2 - \phi_2^0)}$$
$$= \sqrt{(3.15)^2 + (1.15)^2 - 2(3.15)(1.15)\cos(164.1° - 0°)}$$
$$= 4.27 \text{ g} \cdot \text{m}$$

A partir de la (15-21) se encuentra que la ubicación de este contrapeso es

$$\phi_2^* = \tan^{-1}\frac{m_2a_2 \operatorname{sen}\phi_2 - m_2^0a_2^0 \operatorname{sen}\phi_2^0}{m_2a_2\cos\phi_2 - m_2^0a_2^0\cos\phi_2^0}$$
$$= \tan^{-1}\frac{3.15 \operatorname{sen} 164.1° - 1.15 \operatorname{sen} 0°}{3.15\cos 164.1° - 1.15\cos 0°} = 168.3°$$

Si se usa el mismo procedimiento para el eslabón 4, se lleva a

$$m_4^*a_4^* = 7.11 \text{ g} \cdot \text{m} \qquad \text{at } \phi_4^* = 190.5°$$

En la figura 15-29 se tiene un dibujo a escala del eslabonamiento completo con los dos contrapesos agregados.

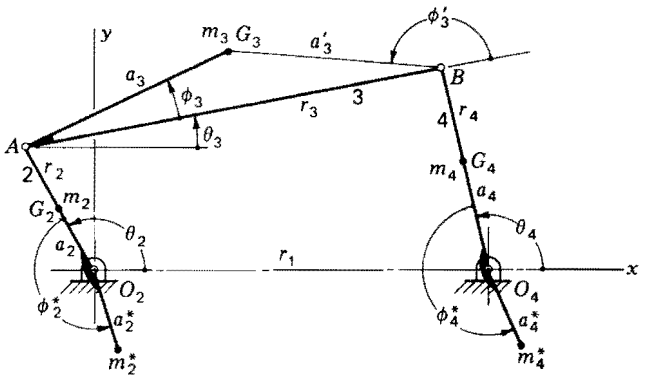


Figura 15-29 Eslabonamiento de cuatro barras de corredera y oscilador en el que se muestran los contrapesos agregados a los eslabones de entrada y salida, con el fin de lograr el balanceo completo de las fuerzas.

15-12 BALANCEO DE MÁQUINAS†

En la sección anterior se explicó la forma en que se balancean las fuerzas de un eslabonamiento simple, utilizando dos o más contrapesos, dependiendo del número de eslabones que la componen. Por desgracia, esto no balancea los momentos de sacudimiento y, de hecho, es probable que los empeoren debido a la adición de los contrapesos. Si se imagina una máquina como si estuviera compuesta de varios mecanismos, se podría considerar el balanceo de la misma, balanceando cada mecanismo por separado. Sin embargo, pudiera ser que esto no conduzca al mejor balanceo para la máquina, debido a que la adición de un gran número de contrapesos puede hacer que el momento de torsión de inercia sea completamente inaceptable. Es más, el desbalanceo de un mecanismo puede contrarrestar el desbalanceo de otro, eliminando en primera instancia la necesidad de algunos contrapesos.

Stevensen muestra que cualquier armónica simple de fuerzas, momentos de fuerzas y momentos de torsión no balanceados en una máquina, se pueden balancear agregando seis contrapesos. Éstos se disponen sobre tres árboles, dos por árbol, impulsados a la velocidad constante de la armónica, y que tengan los ejes paralelos, respectivamente, a cada uno de los tres ejes mutuamente perpendiculares que pasan por el centro de masa de la máquina. Este método es demasiado complejo como para incluirlo en este libro, pero vale la pena examinar el planteamiento general.

Si se aplican los métodos sugeridos en este libro en combinación con los medios de computación actualmente disponibles, se calculan las aceleraciones

† El material de esta sección se tomó del artículo de E.N. Stevensen, Jr. "Balancing of Machines", *J. Eng. Ind., Trans. ASME,* ser. B. vol. 95, pp. 650-656, May 1973. Se incluye aquí con la asesoría y consentimiento del profesor Stevensen.

lineales y angulares de cada uno de los centros de masa móviles de una máquina, para puntos en todo un ciclo de movimiento. También se deben calcular, o determinarse en forma experimental, las masas y los momentos de inercia de las masas de la máquina. Luego se calculan las fuerzas de inercia, los momentos de torsión de inercia y los momentos de las fuerzas, con referencia a los tres ejes de coordenadas mutuamente perpendiculares que pasan por el centro de masa de la máquina. Cuando se suman éstos para cada punto del ciclo, se llegará a seis funciones del tiempo, tres para las fuerzas y tres para los momentos. Luego, con la computadora digital, se puede usar el análisis armónico numérico para definir las armónicas componentes de las fuerzas no balanceadas, paralelas a los tres ejes, y los momentos no balanceados en torno a estos ejes.

Para balancear una sola armónica, cada componente del desbalanceo de la máquina se representa ahora en la forma $A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$ con los subíndices apropiados. Entonces se escriben seis ecuaciones de equilibrio que incluyan los desbalanceos así como los efectos de los seis contrapesos desconocidos. Estas ecuaciones se disponen de tal manera que cada uno de los términos en sen ωt y cos ωt queden multiplicados por grupos de términos entre paréntesis. Entonces se logra el balanceo igualando a cero los términos entre paréntesis, casi como se hizo en la sección precedente. Esto conduce a 12 ecuaciones para los seis productos mr y los seis ángulos de fase, necesarios para los seis pesos de balanceo. Stevensen prosigue con la demostración de que cuando se dispone de menos de los tres árboles o ejes necesarios, se hace necesario optimizar algún efecto del desbalanceo, como, por ejemplo, el movimiento de un punto de la máquina.

PROBLEMAS

15-1 Determínense las reacciones en los cojinetes en A y B para el sistema ilustrado en la figura, si la velocidad es de 300 rpm. Determínense la magnitud y la ubicación angular de la masa de balanceo, si se localiza a un radio de 50 mm.

15-2 En la figura se muestran tres pesos conectados a un eje que gira un cojinete en A y B. Determínese la magnitud de las reacciones en los cojinetes si la velocidad del eje es de 300 rpm. Se debe ubicar un contrapeso a un radio de 10 pulg. Encuéntrense el valor del peso y su ubicación angular.

15-3 En la figura se presentan dos pesos conectados a un eje giratorio y que están montados en el exterior de los cojinetes A y B. Si el eje gira a 120 rpm, ¿cuáles son las magnitudes de las reacciones en los cojinetes en A y B? Supóngase que el sistema se debe balancear quitando un peso a un radio de 5 pulg. Determínense la magnitud y la ubicación angular del peso que es preciso eliminar.

15-4 Para una velocidad de 220 rpm, calcúlense la magnitud y la dirección angular relativa de las reacciones en los cojinetes en A y B para el sistema de dos masas que se muestra.

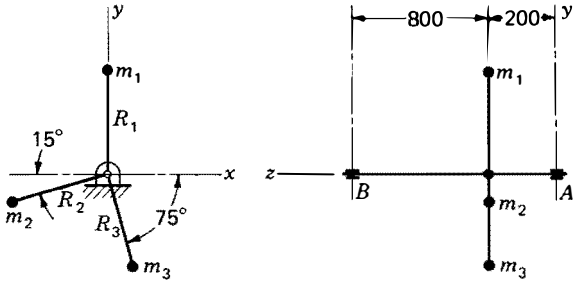
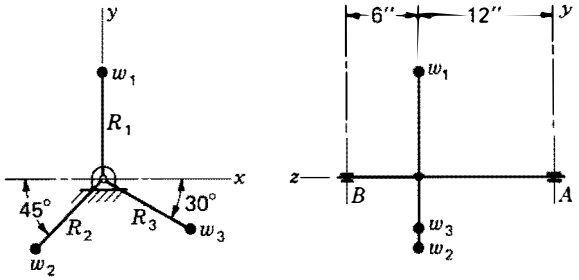
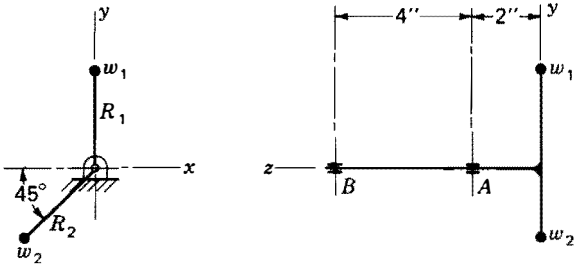


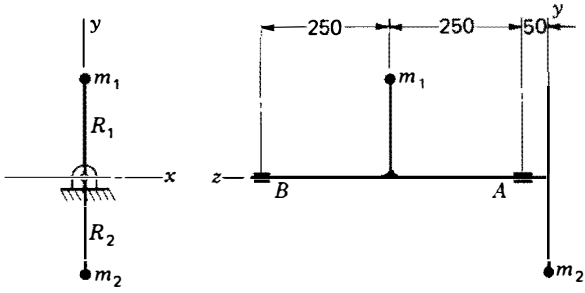
Figura 15-1 Dimensiones en milímetros: $R_1 = 25$, $R_2 = 35$, $R_3 = 40$; $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1.5$ kg, $m_3 = 3$ kg.



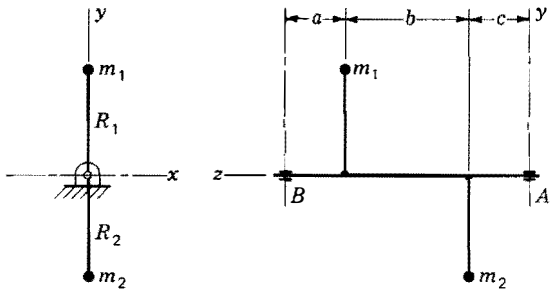
Problema 15-2 $R_1 = 8$ pulg $R_2 = 12$ pulg, $R_3 = 6$ pulg, $w_1 = 2$ oz, $w_2 = 1.5$ oz, $w_3 = 3$ oz.



Problema 15-3 $R_1 = 4$ pulg, $R_2 = 6$ pulg, $w_1 = 4$ lb, $w_2 = 3$ lb.



Problema 15-4 Dimensiones en milímetros: $R_1 = 60$, $R_2 = 40$, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1.5$ kg.



Problemas 15-5 y 15-6

15-5 El sistema giratorio ilustrado en la figura tiene $R_1 = R_2 = 60$ mm, $a = c = 300$ mm, $b = 600$ mm, $m_1 = 1$ kg, y $m_2 = 3$ kg. Encuéntrense las reacciones en los cojinetes en A y B, así como sus ubicaciones angulares, medidas a partir de una marca de referencia giratoria, si la velocidad del eje es de 100 rpm.

15-6 El eje rotatorio ilustrado en la figura sostiene dos masas, m_1 y m_2, cuyos pesos son 4 y 6 lb, respectivamente. Las dimensiones son $R_1 = 4$ pulg, $R_2 = 3$ pulg, $a = 2$ pulg, $b = 8$ pulg y $c = 3$ pulg. Encuéntrese la magnitud de las reacciones giratorias en los cojinetes, en A y B, y sus ubicaciones angulares, a partir de una marca de referencia giratoria, suponiendo que el eje gira a 360 rpm.

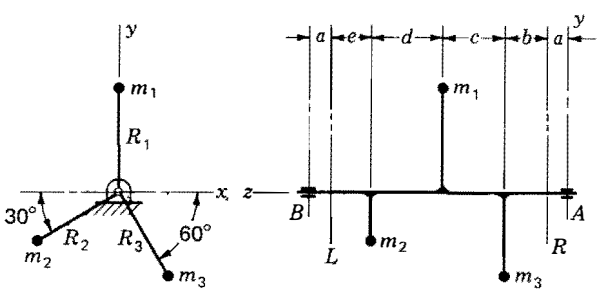
15-7 El eje que se muestra en la figura se debe balancear colocando masas de corrección en los planos de corrección L y R. Los pesos de las tres masas m_1, m_2, y m_3 son 4, 3 y 4 oz, respectivamente. Las dimensiones en pulgadas son: $R_1 = 5$, $R_2 = 4$, $R_3 = 5$, $a = 1$, $b = e = 8$, $c = 10$ y $d = 9$. Calcúlense la magnitud de las correcciones en onzas-pulgadas así como sus ubicaciones angulares.

15-8 El eje del problema 15-7 se debe balancear eliminando peso de los dos planos de corrección. Determínense las correcciones que se deben restar, en onzas-pulgadas, así como sus ubicaciones angulares.

15-9 El eje ilustrado en la figura de este problema se debe balancear restando masas de corrección en los dos planos de corrección L y R. Las tres masas son $m_1 = 6$ g, $m_2 = 7$ g, y $m_3 = 5$ g. Las dimensiones en milímetros son $R_1 = 125$, $R_2 = 150$, $R_3 = 100$, $a = 25$, $b = 300$, $c = 600$, $d = 150$, y $e = 75$. Calcúlense la magnitud y las ubicaciones angulares de las correcciones.

15-10 Repítase el problema 15-9, suponiendo que se deben agregar masas de corrección a los dos planos.

15-11 Resuélvase el problema de balanceo en dos planos como se enunció en la sección 15-8.



Problemas 15-7 a 15-10

15-12 Un rotor que se debe balancear en el campo dio una amplitud de 5 a un ángulo de 142°, en el cojinete de la izquierda, y una amplitud de 3 a un ángulo de −22°, en el cojinete de la derecha, debido al desbalanceo. Para corregir esto, se agregó una masa de ensayo de 12 al plano izquierdo de corrección, a un ángulo de 210° en relación con la referencia de rotación. Entonces, una segunda corrida dio las respuestas a izquierda y derecha de $8\angle 160°$ y $4\angle 260°$, respectivamente. Luego se quitó la primera masa de ensayo y se agregó una segunda masa de 6 al plano derecho de corrección, a un ángulo de −70°. Las respuestas a esto fueron $2\angle 74°$ y $4.5\angle -81°$ para los cojinetes izquierdo y derecho, respectivamente. Determínense los desbalanceos originales.

CAPÍTULO

DIECISEIS

DINÁMICA DE LEVAS

16-1 SISTEMAS DE LEVAS DE CUERPOS RÍGIDOS Y ELÁSTICOS

En la figura 16-1*a* se tiene la vista de una sección transversal en la que se muestra la disposición de una válvula en la culata en un motor de automóvil. Cuando se analiza la dinámica de éste, o cualquier otro, sistema de levas, se esperaría determinar la fuerza de contacto en la superficie de la leva, la fuerza del resorte y el momento de torsión en el eje de la leva, todo para una rotación completa de la misma. En un método de análisis, el tren completo de leva y seguidor, compuesto por la varilla de empuje, el brazo oscilante y el vástago de la válvula junto con el eje de la leva, se consideran rígidos. Si, en efecto, los elementos son bastante rígidos, y si la velocidad es moderada, este tipo de análisis por lo común producirá resultados bastante satisfactorios. En cualquier caso, siempre se debe llevar a cabo en primer lugar este tipo de análisis de cuerpo rígido.

Hay ocasiones en que las velocidades son tan elevadas, o los elementos tan elásticos (quizá debido a una longitud extrema), que es preciso aplicar un análisis de cuerpo elástico. Por lo común, se descubre este hecho cuando se comienzan a presentar problemas con el sistema de levas. Estos problemas se ponen de manifiesto casi siempre a través de ruido, traqueteo, desgaste poco usual, calidad deficiente del producto o quizá falla por fatiga de algunas de las piezas. En otros casos, la investigación de laboratorio del funcionamiento de un sistema prototipo de la leva puede revelar diferencias sustanciales entre el rendimiento teórico y el observado.

En la figura 16-1*b* se da un modelo matemático de un sistema de leva de cuerpo elástico. En este caso, m_3 es la masa de la leva y una porción del eje de la misma. El movimiento maquinado en la leva es la coordenada y, una función del ángulo θ del eje de la leva. La rigidez a la flexión del eje de la leva se designa como

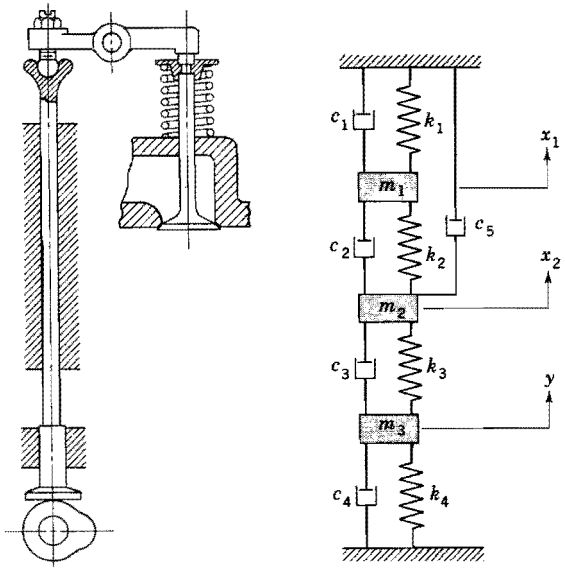


Figura 16-1

k_4. El resorte de retención del seguidor es k_1. Las masas m_1 y m_2, así como las rigideces k_2 y k_3, son características globales del tren del seguidor. Se introducen los amortiguadores c_i para representar la fricción que, en el análisis, puede indicar una fricción viscosa o de deslizamiento, o bien, cualquier combinación de ambas. El sistema de la figura 16-1*b* es un tanto complicado y requiere la solución de tres ecuaciones diferenciales simultáneas. En esta obra se considerarán sistemas más sencillos.

16-2 ANÁLISIS DE UNA LEVA EXCÉNTRICA

Una leva de placa excéntrica es un disco circular que tiene el orificio para el eje perforado fuera del centro. La distancia e entre el centro del disco y el centro del eje recibe el nombre de *excentricidad.* En la figura 16-2*a* se muestra un sistema sencillo de leva excéntrica y seguidor de movimiento alternativo que se compone de una leva de placa, una masa de seguidor de cara plana y un resorte de retención de rigidez k. La coordenada y designa el movimiento del seguidor en tanto la leva esté en contacto. Aquí se elige arbitrariamente el valor $y = 0$ en el punto inferior de la carrera. Luego, las cantidades cinemáticas de interés son

$$y = e - e\cos\omega t \qquad y = e\omega \operatorname{sen}\omega t \qquad \ddot{y} = e\omega^2 \cos\omega t \tag{16-1}$$

en donde ωt es lo mismo que el ángulo de la leva θ.

Para llevar a cabo un análisis de cuerpo rígido, se supone que no existe fricción y se construye un diagrama de cuerpo libre del seguidor (Fig. 16-2*b*). En esta

figura, F_{23} es la fuerza de contacto de la leva y F_S es la fuerza del resorte. En general, F_{23} y F_S no tienen la misma línea de acción y, por tanto, un par de fuerzas del armazón, $F_{13,A}$ y $F_{13,B}$ actúan en los cojinetes A y B.

Antes de escribir la ecuación del movimiento, investiguemos la fuerza del resorte con más detalle. La expresión *rigidez del resorte k,* llamada también *coeficiente del resorte,* se refiere a la magnitud de la fuerza necesaria para deformar el resorte en una unidad de longitud. Por consiguiente, las unidades de k por lo común serán newtons por metro o libras por pulgada. El propósito del resorte es mantener o retener al seguidor en contacto con la leva. Así pues, el resorte debe ejercer cierta fuerza, incluso en el punto inferior de la carrera, en donde se extiende al máximo. Esta fuerza, llamada *precarga P,* es la fuerza que ejerce el resorte cuando $y = 0$. Por lo tanto, $P = k\delta$, en donde δ es la distancia que se debe comprimir el resorte para ensamblarlo.

Al sumar las fuerzas sobre la masa del seguidor en la dirección y, da

$$\sum F^y = F_{23} - k(y + \delta) - m\ddot{y} = 0 \qquad (a)$$

Nótese en particular que F_{23} sólo puede tener valores positivos. Al resolver la (a) para la fuerza de contacto y sustituyendo la primera y tercera de las ecuaciones (16-1), da

$$F_{23} = (ke + P) + (m\omega^2 - k)e \cos \omega t \qquad (16\text{-}2)$$

En la figura 16-2*c* se tiene un diagrama de cuerpo libre de la leva. El momento de torsión T, aplicado por el eje a la leva, es

$$T = F_{23}e \operatorname{sen} \omega t = [(ke + P) + (m\omega^2 - k)e \cos \omega t]e \operatorname{sen} \omega t$$

$$= e(ke + P) \operatorname{sen} \omega t + \frac{e^2}{2}(m\omega^2 - k) \operatorname{sen} 2\omega t \qquad (16\text{-}3)$$

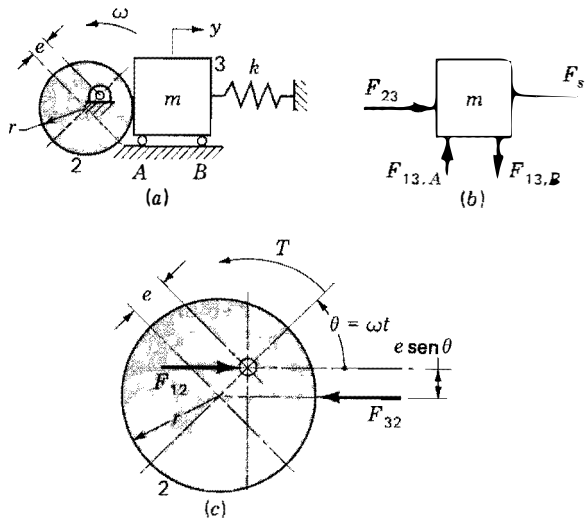


Figura 16-2 *a)* Leva de placa excéntrica y seguidor de cara plana; *b)* diagrama de cuerpo libre del seguidor; *c)* diagrama de cuerpo libre de la leva.

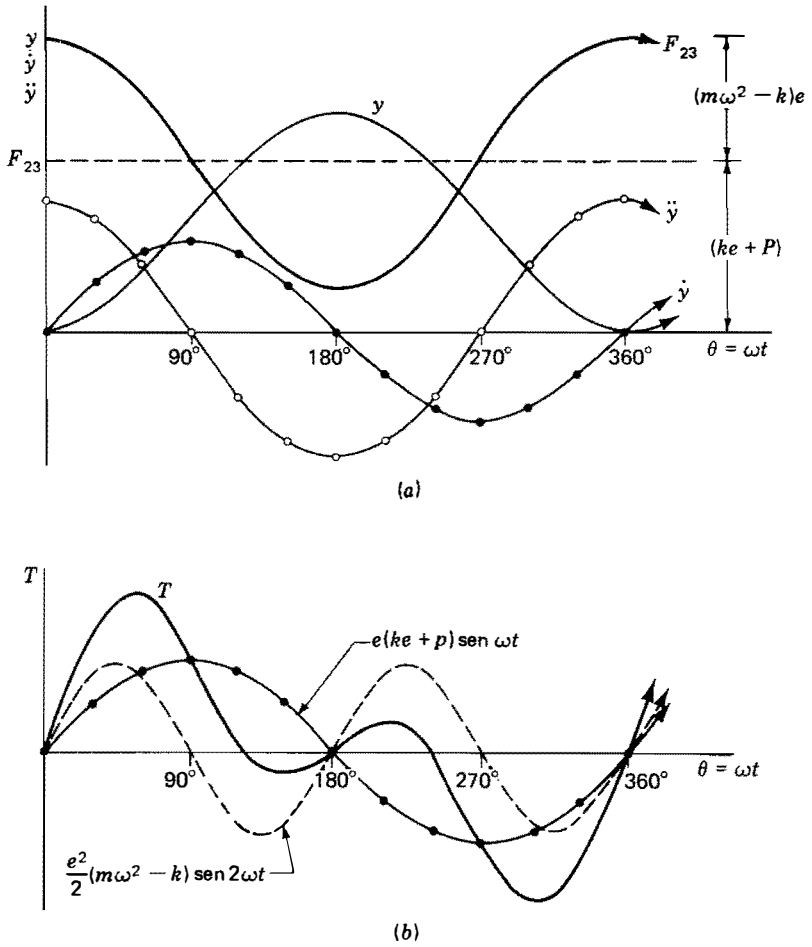


Figura 16-3 *a*) Gráfica de desplazamientos, velocidad, aceleración y fuerza de contacto para un sistema de leva excéntrica; *b*) gráfica de las componentes del momento de torsión y el momento de torsión total del eje de la leva.

La ecuación (16-2) y la figura 16-3*a* muestran que la fuerza de contacto F_{23} consta de un término constante $ke + P$ con una onda cosenoidal sobrepuesta a éste. El máximo ocurre en $\theta = 0°$ y el mínimo en $\theta = 180°$. La componente cosenoidal o variable tiene una amplitud que depende del cuadrado de la velocidad del eje de la leva. Por consiguiente, este término se incrementa con una mayor rapidez conforme se incrementa la velocidad. A cierta velocidad, la fuerza de contacto podría hacerse cero en $\theta = 180°$. Cuando esto sucede, por lo general existe algún impacto entre la leva y el seguidor, produciendo golpeteo, traqueteo o una operación muy ruidosa. De hecho, la lentitud o inercia del seguidor le evitan seguir a la leva. A menudo, el resultado se conoce como *salto* o *flotación.* Se produce el

ruido cuando se reestablece el contacto; por supuesto, el propósito del resorte de retención es evitar esto. Puesto que la fuerza de contacto consta de una onda cosenoidal sobrepuesta a un término constante, todo lo que se necesita para evitar el salto es mover o elevar la onda cosenoidal alejándola de la posición de cero. Para lograrlo, se incrementa el término $ke + P$, incrementando la precarga P, o bien, el coeficiente del resorte k, o ambos.

Sabiendo que el salto se inicia en $\omega t = -1$ con $F_{23} = 0$, se puede resolver la ecuación (16-2) para la velocidad de salto; y el resultado es

$$\omega = \sqrt{\frac{2ke + P}{me}} \tag{16-4}$$

Utilizando el mismo procedimiento, se encuentra que no ocurrirá salto alguno si

$$P > e(m\omega^2 - 2k) \tag{16-5}$$

En la figura 16-3*b* se muestra una gráfica de la ecuación (16-3). Nótese que el momento de torsión consta de una componente de doble frecuencia cuya amplitud es una función de la velocidad de la leva al cuadrado, sobrepuesta a una componente de una sola frecuencia cuya amplitud es independiente de la velocidad. En este ejemplo, el área del diagrama de momento de torsión contra desplazamiento, en la dirección de T positivo es la misma que en la dirección de T negativo. Esto significa que la energía requerida para impulsar al seguidor en la dirección hacia adelante se recupera cuando regresa el seguidor. Se puede usar un volante o inercia sobre el eje de la leva para manejar esta necesidad de energía fluctuante. Por supuesto, si se conecta una carga externa de alguna manera al sistema del seguidor, la energía requerida para impulsar esta carga elevaría la curva del momento de torsión en la dirección positiva e incrementaría el área en el circuito positivo de la curva T.

Ejemplo 16-1 Un mecanismo de leva y seguidor similar al de la figura 16-2*a* tiene la leva maquinada de tal modo que moverá al seguidor hacia la derecha en una distancia de 40 mm con movimiento parabólico, en 120° de rotación de la leva, hará que permanezca detenido por 30°, y entonces lo regresará con movimiento parabólico a la posición de partida en el ángulo restante de la leva. El coeficiente del resorte es 5 kN/m y el mecanismo se monta con una precarga de 35 N. La masa del seguidor es de 18 kg. Supóngase que no hay fricción. *a*) Sin calcular valores numéricos, háganse gráficas aproximadas del movimiento de desplazamiento, la aceleración y la fuerza de contacto con la leva, todo contra el ángulo de la leva para el ciclo completo de eventos desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 360°$ de rotación de la leva. Sobre esta gráfica muéstrese en dónde es más probable que se inicie el salto o levantamiento. *b*) ¿A qué velocidad de la leva se iniciaría el salto? Muéstrense los cálculos.

SOLUCIÓN *a*) Resolviendo la ecuación (*a*) de la sección 16-2 para la fuerza de contacto, da

$$F = ky + P + m\ddot{y} \tag{1}$$

que se compone de un término constante P, un término en ky que varía como el desplazamiento y un término $m\ddot{y}$ que varía como la aceleración. En la figura 16-4 se muestra el diagrama de desplazamientos, la aceleración $\ddot{y}$, y la fuerza de contacto de la leva, F. Nótese que el salto ocurriría primero en $\omega t = 60°$ ya que éste es el acercamiento más grande de F a la posición cero.

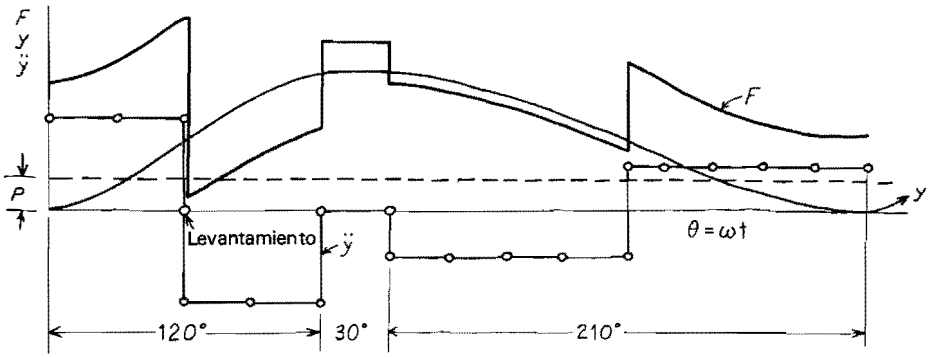


Figura 16-4

b) El levantamiento ocurriría en el punto medio de la subida en donde $\theta = \beta/2 = 60°$ cuando la aceleración pasa a negativa. Los términos para la ecuación (1) son $y = 20$ mm y $ky = 5(20) = 100$ N. La aceleración es

$$\ddot{y} = -\frac{4L\omega^2}{\beta^2} = -\frac{4(0.040)\omega^2}{(120\pi/180)^2} = -0.0365\omega^2 \text{ m/s}^2$$

Al sustituir estos valores en la (1) con $F = 0$, da

$$F = ky + P + m\ddot{y} = 100 + 35 + 18(-0.0365\omega^2) = 0$$

o bien,
$$\omega = \sqrt{\frac{100+35}{18(0.365)}} = 14.3 \text{ rad/s}$$

o bien,
$$n = \frac{\omega}{2\pi}(60) = \frac{14.3(60)}{2\pi} = 137 \text{ rpm} \qquad \textit{Resp.}$$

16-3 EFECTO DE LA FRICCIÓN DE DESLIZAMIENTO

Sea F_μ la fuerza de fricción de deslizamiento tal y como la define la ecuación (12-23). Puesto que la fuerza de fricción tiene siempre una dirección opuesta a la de la velocidad, definamos una función signo como sigue:

$$\text{signo } \dot{y} = \begin{cases} +1 & \dot{y} \geq 0 \\ -1 & \dot{y} < 0 \end{cases} \tag{16-6}$$

Una vez establecida esta notación, la ecuación (*a*) de la sección 16-2 se puede escribir

$$\sum F^y = F_{23} - F_\mu \text{ signo } \dot{y} - k(y + \delta) - m\ddot{y} = 0 \tag{a}$$

o bien,
$$F_{23} = F_\mu \text{ signo } \dot{y} + k(y + \delta) + m\ddot{y} \tag{16-7}$$

En la figura 16-5 se muestra la gráfica de esta ecuación para un movimiento armónico simple sin detenciones. Estudiénse ambas partes de este diagrama; nótese que F_μ es positiva cuando $\dot{y}$ es positiva y véase cómo se obtiene F_{23} sumando gráficamente las cuatro curvas componentes.

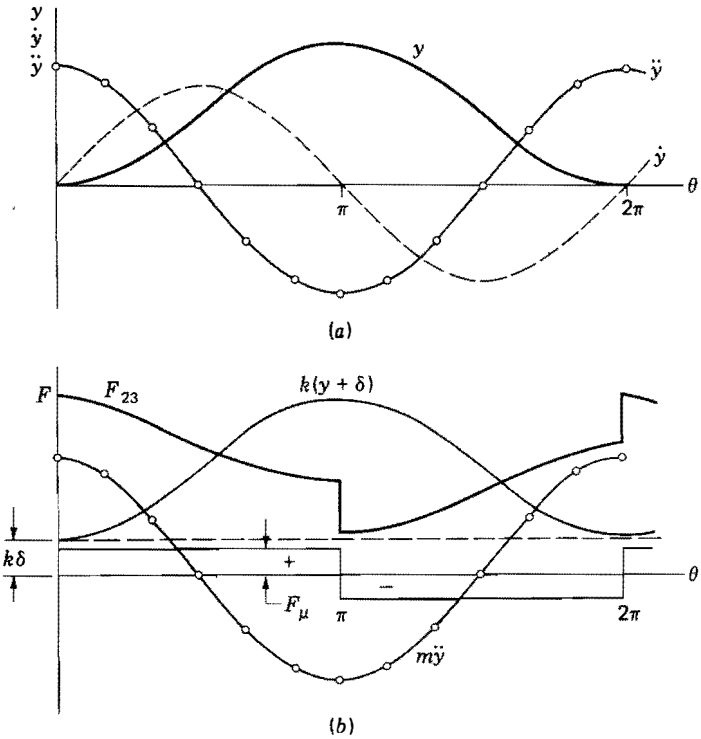


Figura 16-5 Efecto de la fricción por deslizamiento sobre un sistema de leva con movimiento armónico: *a*) gráfica de desplazamientos, velocidad y aceleración para un ciclo del movimiento; *b*) diagrama de fuerzas en el que se muestra la gráfica de las componentes F_μ, $k\delta$, $k(y + \delta)$, $m\ddot{y}$. y la fuerza de contacto resultante F_{23}.

16-4 ANÁLISIS DE UNA LEVA DE DISCO CON SEGUIDOR OSCILANTE DE RODILLO

En el capítulo 12 se analizó un sistema de leva que incorpora un seguidor de rodillo con movimiento alternativo. En esta sección se presenta un planteamiento analítico para un problema similar en el que se incluye también una fricción por deslizamiento. La geometría de este sistema aparece ilustrada en la figura 16-6*a*. En el análisis que sigue se hace caso omiso del efecto del peso del seguidor sobre los cojinetes B y C.

En la figura 16-6*b* se presenta un diagrama de cuerpo libre del seguidor y el rodillo. Si y es cualquier movimiento maquinado en la leva y $\theta = \omega t$ es el ángulo de la leva, en $y = 0$ el seguidor se encuentra en la parte baja de su carrera, de manera que $O_2A = R + r$. Por consiguiente,

$$a = R + r + y \tag{16-8}$$

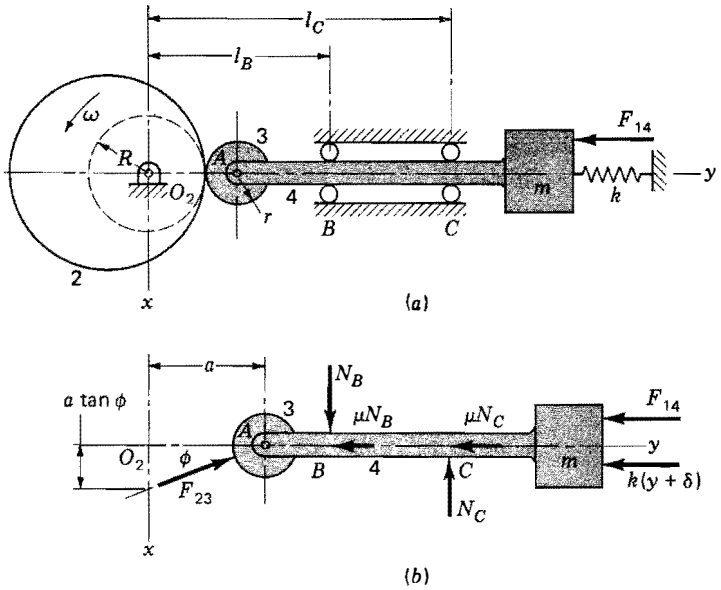


Figura 16-6 *a*) Leva de placa que impulsa a un sistema de seguidor con rodillo de movimiento alternativo. El radio del círculo base es R. *b*) Diagrama de cuerpo libre del sistema del seguidor.

En la figura 16-6*b* la fuerza de contacto del rodillo forma el ángulo ϕ, el ángulo de presión, con el eje x. Puesto que la dirección de F_{23} es la misma que la de la normal a las superficies en contacto, la intersección de esta recta con el eje x es el centro instantáneo común de la leva y el seguidor. Esto significa que la velocidad de este punto es la misma, no importa que se considere como un punto del seguidor o un punto de la leva. De donde,

$$\dot{y} = a\omega \tan \phi$$

y, por tanto

$$\tan \phi = \frac{\dot{y}}{a\omega} \tag{16-9}$$

En el análisis que sigue, las dos reacciones en los cojinetes son N_B y N_C, el coeficiente de fricción de deslizamiento es μ, y δ es la precomprensión del resorte de retención. Sumando las fuerzas en las direcciones x y y, da

$$\sum F^x_{3,4} = F^x_{23} - N_B + N_C = 0 \tag{a}$$

$$\sum F^y_{3,4} = F^y_{23} - \mu \operatorname{sign} \dot{y}\,(N_B + N_C) - F_{14} - k(y + \delta) - m\ddot{y} = 0 \tag{b}$$

Un tercio de la ecuación se obtiene tomando momentos alrededor de A

$$\sum M_A = -N_B(l_B - a) + N_C(l_C - a) = 0 \tag{c}$$

Con la ayuda de la (16-9), se pueden resolver estas tres ecuaciones para las incógnitas F_{23}, N_B y N_C.

En primer lugar, resuélvase la (*c*) para N_C.

$$N_C = N_B \frac{l_B - a}{l_C -} \tag{d}$$

Ahora sustitúyase la (*d*) en la (*a*) y despéjese N_B

$$N_B = \frac{l_C -}{l_C - l_B} \quad {}_{23} \tag{e}$$

Pero como $F_{23}^x = F_{23}^y \tan \phi$,

$$N_B = \frac{F_{23}^y(}{l_C} \qquad \text{(1}$$

A continuación, sustitúyanse las ecuaciones (*d*) y (16-10) en el término de fricción de la (*b*).

$$\mu \text{ signo } \dot{y} (N_B + \quad _C = \mu \quad _{23} \tan \phi \text{ signo } \dot{y} \frac{l_C}{l_C \quad l} \tag{f}$$

Sustituyendo este resultado una vez más en la (*b*) y despejando F_{23}^y, da

$$F_{23}^y = \frac{F_{14} + k(y + \delta) + m\ddot{y}}{1 - \mu \tan \phi \text{ signo } \dot{y} [(l_C \quad - 2a)/(l_C - l_B)]} \qquad \text{(1}$$

Para resolver en computadora o calculadora, una solución sencilla para función signo es

$$\text{signo } \dot{y} = \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \tag{16-12}$$

Finalmente, el momento de torsión en el eje de la leva es

$$T = -aF_{23}^y \tan \phi \qquad \text{(1}$$

Las ecuaciones de esta sección requieren las relaciones cinemáticas para los movimientos apropiados de subida y retorno que se desarrollaron en el capítulo 6.

16-5 PROGRAMACIÓN PARA SOLUCIONES EN COMPUTADORA O CALCULADORA

En el curso de esta obra se ha tenido un cuidado especial en desarrollar soluciones tanto gráficas como analíticas para los problemas, antes de presentar las técnicas para las computadoras o calculadoras programables. Todos los buenos ingenieros saben que este tipo de rutinas se deben verificar de manera rigurosa; las soluciones gráficas son casi siempre el medio más satisfactorio de comprobación. Es particularmente importante verificar las rutinas de computadora cuando se deben en-

tregar a un subordinado para que ejecute la solución; muchas personas aceptan ciegamente las soluciones por computadora como algo infalible, de manera que no llegan a detectar incluso errores "obvios".

Aparentemente, la programación es una cuestión más bien personal, debido a la variedad de planteamientos que se pueden seguir para resolver un solo problema, cuando se presenta a varias personas. Para dar lugar a una variedad de procedimientos de programación, aquí se presentaban sólo los elementos o partes de los programas para levas. El lector puede conjuntar estas partes en la forma más apropiada, según sus referencias de programación y los medios de que disponga para correr sus programas.

Si se restringe este estudio a un seguidor de movimiento alternativo que comprenda subida, detención, retorno y detención, será conveniente designar los ángulos para cada uno de estos eventos como β_1, β_2, β_3, β_4, respectivamente. En el caso de una leva con un solo lóbulo, estos ángulos sumarían 360°. Así pues, se puede denotar por θ_1 el ángulo de la leva durante la subida; por ende, θ_1 está en el intervalo $0 \leq \theta_1 \leq \beta_1$. Si se usa $\theta_3 = \theta - \beta_1 - \beta_2$ como en ángulo de la leva para el movimiento de retorno, se observa que estará en el intervalo $0 \leq \theta_3 \leq \beta_3$. Si se va a utilizar una calculadora programable, se debe colocar en el modo de radianes.

Primero se tienen que resolver las relaciones cinemáticas. Para fines de ilustración, aquí se presentan sólo los movimientos básicos de la leva: parabólico, armónico simple y cicloidal. Es probable que el lector desee emplear subrutinas para éstos, uno para cada subida y otro para el retorno. No obstante, el movimiento parabólico requeriría cuatro subrutinas, dos para el movimiento de subida y dos para el retorno. A continuación se dan las relaciones para estos tres movimientos básicos.

Movimiento parabólico La primera mitad de la subida está en $0 \leq y \leq L/2$. Las ecuaciones son (1), $y = 2L(\theta_1/\beta_1)^2$; (2), $\dot{y} = 4L\omega\theta_1/\beta_1^2$; (3), $\ddot{y} = 4L\omega^2/\beta_1^2$. La segunda mitad de la subida corresponde al intervalo $L/2 < y \leq L$; las ecuaciones son: (4), $y = L\{1 - 2[1 - (\theta_1/\beta_1)]^2\}$; (5), $\dot{y} = 4L\omega[1 - (\theta_1/\beta_1)]/\beta_1$; (6), $\ddot{y} = -4L\omega^2/\beta_1^2$. La primera mitad del movimiento de retorno es en el intervalo $L \geq y \geq L/2$; y las ecuaciones son: (7), $y = L[1 - 2(\theta_3/\beta_3)^2]$; (8), $\dot{y} = -4L\omega\theta_3/\beta_3^2$; (9), $\ddot{y} = -4L\omega^2/\beta_3^2$. El intervalo para la segunda mitad del movimiento de retorno es $L/2 > y \geq 0$, y las ecuaciones para este caso son: (10), $y = 2L[1 - (\theta_3/\beta_3)]^2$; (11), $\dot{y} = 4L\omega[(\theta_3/\beta_3) - 1]/\beta_3$; (12), $\ddot{y} = 4L\omega^2/\beta_3^2$.

Movimiento armónico simple Las ecuaciones para el movimiento de subida son: (13), $y = L[1 - \cos(\pi\theta_1/\beta_1)]/2$; (14), $\dot{y} = \pi L\omega[\operatorname{sen}(\pi\theta_1/\beta_1)]/2\beta_1$; (15), $\ddot{y} = L[(\pi\omega/\beta_1)^2 \cos(\pi\theta_1/\beta_1)]/2$. Para el retorno, las ecuaciones son: (16), $y = L[1 + \cos(\pi\theta_3/\beta_3)]/2$; (17), $\dot{y} = -\pi L\omega[\operatorname{sen}(\pi\theta_3/\beta_3)]/2\beta_3$; (18), $\ddot{y} = -L(\pi\omega/\beta_3)^2[\cos(\pi\theta_3/\beta_3)]/2$.

Movimiento cicloidal Las ecuaciones para la subida son: (19), $y = L[(\theta_1/\beta_1) - (1/2\pi) \operatorname{sen}(2\pi\theta_1/\beta_1)]$; (20), $\dot{y} = L\omega[1 - \cos(2\pi\theta_1/\beta_1)]/\beta_1$; (21), $\ddot{y} = 2\pi L(\omega/\beta_1)^2 \operatorname{sen}(2\pi\theta_1/\beta_1)$.

Para el caso del retorno, (22), $y = L[1 - (\theta_3/\beta_3) + (1/2\pi)\,\text{sen}\,(2\pi\theta_3/\beta_3)]$; (23), $y = L\omega[\cos(2\pi\theta_3/\beta_3) - 1]/\beta_3$; (24), $\ddot{y} = -2\pi L(\omega/\beta_3)^2\,\text{sen}\,(2\pi\theta_3/\beta_3)$.

Programa de la dinámica El paso final de la programación es desarrollar la subrutina de la dinámica. Si se usa la solución de la sección anterior, el orden en el que podrían resolverse las ecuaciones es: (16-12), (16-8), (16-9), (16-11), (16-13), F^x_{23}, (16-10), (*d*).

Discontinuidades Se deben tomar precauciones especiales cuando el movimiento tiene una discontinuidad. Por ejemplo, cuando una detención precede a un movimiento armónico simple, se provoca una discontinuidad en la aceleración al principio de la subida. Se tienen discontinuidades al principio y al final del movimiento parabólico, y también en el punto medio de la subida. Un método para resolver este tipo de problemas consiste en eliminar los cálculos en un ángulo infinitesimal, en la discontinuidad.

Nótese también que las ecuaciones de esta sección no se aplican a los periodos de detención del movimiento.

16-6 ANÁLISIS DE SISTEMAS ELÁSTICOS DE LEVAS

En la figura 16-7 se ilustra el efecto de la elasticidad del seguidor sobre las características de desplazamiento y velocidad de un sistema de seguidor impulsado por una leva cicloidal. Para ver lo que ha sucedido, compárense estos diagramas con

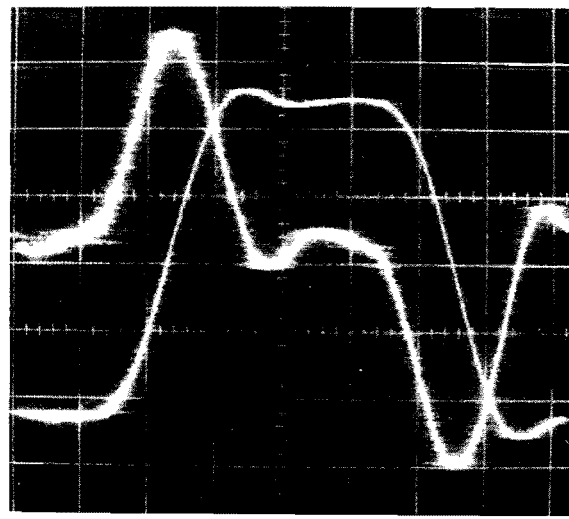


Figura 16-7 Fotografía de las líneas osciloscópicas de las características de desplazamiento y velocidad de un sistema de leva y seguidor con detención-subida-detención-retorno, para el movimiento cicloidal. El eje cero del diagrama de desplazamientos se ha trasladado hacia abajo para obtener un diagrama más amplio en el espacio disponible.

los teóricos que aparecen en el capítulo 6. Aunque el efecto de la elasticidad es más pronunciado para la característica de velocidad, por lo común la modificación de la característica de desplazamiento, sobre todo en la porción superior de la subida, es la que provoca la mayor parte de los problemas en las situaciones prácticas. En general, estos problemas se manifiestan en una calidad deficiente o no digna de confianza de un producto, cuando se usan los sistemas en la fabricación, o bien, ruido, desgaste poco usual y fallas por fatiga, si se trata de líneas de montaje.

Para hacer un análisis completo de los sistemas elásticos de levas se requiere tener una buena base de estudios en vibración. Para evitar esta situación, y desarrollar, al menos, una comprensión básica, usaremos un sistema de leva extremadamente simplificado, que aplique sólo un movimiento lineal. Sin embargo, cabe hacer la observación de que nunca se debe usar este tipo de sistema de leva en aplicaciones de alta velocidad.

En la figura 16-8*a*, k_1 es el resorte de retención, m es la masa conjunta del seguidor y k_2 representa la rigidez del seguidor. Puesto que este último por lo común es una varilla o una palanca, k_2 es muchas veces mayor que k_1.

El resorte k_1 se monta con una precarga. La coordenada x del movimiento del seguidor se elige en la posición de equilibrio de la masa, después de que se monta el resorte k_1. Por consiguiente, k_1 y k_2 ejercerán fuerzas de precarga iguales y opuestas sobre la masa. Suponiendo que no hay fricción, el diagrama de cuerpo libre de la masa es como el que se ilustra en la figura 16-8*b*. Para determinar la dirección de las fuerzas, se ha supuesto que la coordenada x, que representa el movimiento del seguidor, es mayor que la coordenada y, que representa el movimiento maquinado en la leva. Sin embargo, se obtendrá el mismo resultado si se supone que y es mayor que x.

Recurriendo a la figura 16-8*b*, se encuentra que la ecuación del movimiento es

$$\sum F = -k_1 x - k_2(x - y) - m\ddot{x} = 0 \qquad (a)$$

o bien,

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = \frac{k_2}{m} y \qquad (16\text{-}14)$$

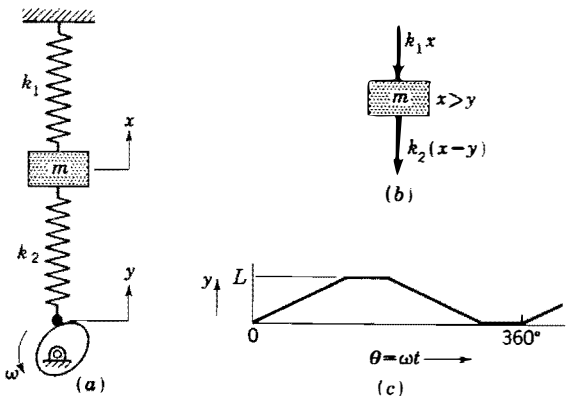


Figura 16-8 *a*) Modelo no amortiguado de un mecanismo de leva. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la masa. *c*) Diagrama de desplazamientos.

Ésta es la ecuación diferencial para el movimiento del seguidor. Esta ecuación se puede resolver aplicando la teoría de la vibración, cuando se especifica la función y. Esta ecuación se debe resolver por partes, para cada evento de la leva; es decir, se deben usar las condiciones finales para un evento, o periodo del movimiento, como condiciones iniciales, o de partida, para el siguiente periodo.

Analicemos el primer periodo del movimiento, empleando un movimiento uniforme, como se ilustra en la figura 16-8*c*. Primero se utilizará la notación

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \tag{16-15}$$

No se debe confundir ω_n con la velocidad angular de la leva ω. La cantidad ω_n se llama en este caso *frecuencia circular natural no amortiguada* en la teoría de la vibración. Las unidades de ω_n son recíprocos de segundos y, generalmente, se expresan como radianes por segundo. Esto queda implicado en la naturaleza circular de la cantidad.

Ahora la (16-14) se puede escribir

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{k_2 y}{m} \tag{16-16}$$

La solución de esta ecuación es

$$x = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{k_2 y}{m\omega_n^2} \tag{b}$$

en donde

$$y = \frac{L}{\beta}\theta = \frac{L\omega t}{\beta} \tag{16-17}$$

Por supuesto, la (16-17) es válida sólo durante el periodo de subida. El lector puede verificar que la ecuación (*b*) es la solución, sustituyéndola, junto con su segunda derivada en la ecuación (16-16).

La primera derivada de la (*b*) es

$$\dot{x} = -A\omega_n \operatorname{sen} \omega_n t + B\omega_n \cos \omega_n t + \frac{k_2 \dot{y}}{m\omega_n^2} \tag{c}$$

Si se usa $t = 0$ al principio de la subida, con $x = \dot{x} = 0$, a partir de las ecuaciones (*b*) y (*c*) se encuentra que

$$A = 0 \qquad B = -\frac{k_2 \dot{y}}{m\omega_n^3}$$

De donde, la (*b*) toma la forma

$$x = \frac{k_2}{m\omega_n^2}\left(y - \frac{\dot{y}}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t\right) \tag{16-18}$$

En la figura 16-9 se presenta la gráfica de esta ecuación. Nótese que el movimiento consta de un término senoidal negativo sobrepuesto a una rampa que representa la

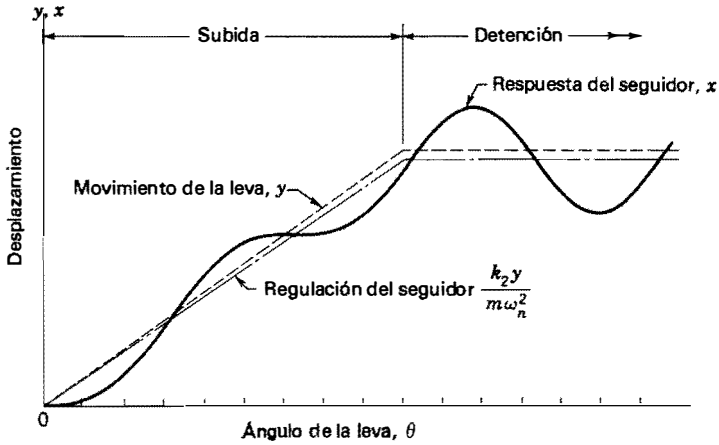


Figura 16-9 Diagrama de desplazamientos de un mecanismo de leva con movimiento uniforme, en el que se muestra la respuesta del seguidor.

subida uniforme. Debido a la compresión adicional de k_2 durante la subida, el término rampa $k_2 y/m\omega_n^2$, llamado en la figura regulación del seguidor, se hace menor que el movimiento de subida y.

Al concluir la subida, las ecuaciones (16-16) a (16-18) dejan de ser válidas y principia un segundo periodo del movimiento. En la figura 16-9 se muestra la respuesta del seguidor para este periodo, pero no se resolverá aquí.†

La (16-18) muestra que se puede reducir la amplitud de la vibración $\dot{y}/\omega_n$, aumentando la magnitud de ω_n y la (16-15) indica que se puede lograr esto incrementando k_2, lo que significa que es preciso usar un seguidor muy rígido.

16-7 DESBALANCEO, SOBRETENSIÓN DEL RESORTE Y ARROLLADO

Como se ilustra en la figura 16-10*a*, una leva de disco produce desbalanceo debido a que su masa no es simétrica con el eje de rotación. Esto significa que existen dos conjuntos de fuerzas vibratorias, uno debido a la masa excéntrica de la leva y otro debido a la reacción del seguidor contra la leva. Si se tienen presentes estos efectos durante el diseño, el ingeniero está en posibilidad de evitar muchas dificultades durante la operación.

En las figuras 16-10*b* y *c* se muestra que las levas de cara y cilíndricas tienen buenas características de balanceo. Por esta razón, constituyen buenas elecciones cuando se trata de operación a alta velocidad.

Sobretensión del resorte En textos que se ocupan del diseño de resortes, se demuestra que los de tipo helicoidal pueden vibrar por sí solos cuando se les someten a

† Este problema se puede resolver con facilidad siguiendo un planteamiento gráfico conocido con el nombre de *método del plano fase.* Se puede hallar un ejemplo numérico en la obra de Joseph E. Shigley, *Dynamic Analysis of Machines,* McGraw-Hill, New York, 1961, p. 583.

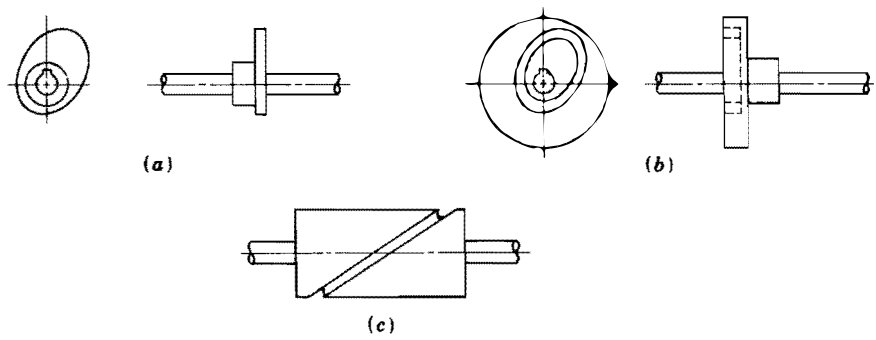


Figura 16-10 *a*) La leva de disco está inherentemente desbalanceada. *b*) La leva de cara está casi siempre bien balanceada. *c*) La leva cilíndrica tiene buen balanceo.

fuerzas que varían con gran rapidez. Por ejemplo, los resortes de válvulas automotrices de diseño deficiente que funcionan cerca del intervalo de frecuencias críticas, permiten que la válvula se abra durante breves intervalos en el curso del periodo en que se supone que dicha válvula debe estar cerrada. Este tipo de condiciones generan funcionamientos muy deficientes del motor y una falla rápida por fatiga de los propios resortes. Esta vibración del resorte de retención, denominada *sobretensión del resorte,* se ha fotografiado con cámaras de película en movimiento a alta velocidad y los resultados se exhiben en movimiento retardado. Cuando existen vibraciones serias, se puede ver con claridad un movimiento ondulatorio que asciende y desciende por el resorte de la válvula.

Arrollado En la figura 16-3*b* se presenta una grafica del momento de torsión del eje de la leva en la que se ve que el eje ejerce un momento de torsión sobre la leva durante una parte del ciclo, y que la leva ejerce un momento de torsión sobre el eje durante otra parte del mismo. Esta necesidad de momento de torsión variable puede hacer que el eje se tuerza o arrolle, conforme se aumente el momento de torsión durante la subida del seguidor. Asimismo, en el curso de este periodo, la velocidad angular de la leva se reduce y lo mismo sucede con la velocidad del seguidor. Cerca del fin de la subida, la energía almacenada en el eje debido al arrollado se libera, haciendo que tanto la velocidad como la aceleración del seguidor aumenten por encima de los valores normales. El golpe resultante puede hacer que el seguidor salte o choque.

Este efecto es más pronunciado cuando el seguidor mueve cargas pesadas, cuando se desplaza a alta velocidad y cuando el eje es flexible.

En la mayor parte de los casos debe emplearse un volante en los sistemas de levas, con el fin de satisfacer la necesidad del momento de torsión variable (véase la sección 17-1). Se puede evitar en gran parte el arrollado del eje de la leva, montando el volante tan cerca de la leva como sea posible. Si se monta a una gran distancia de ésta, es muy probable que en realidad sólo se empeore la situación.

PROBLEMAS

16-1 En la parte (*a*) de la figura, la masa está restringida a moverse sólo en dirección vertical. La leva excéntrica tiene una excentricidad de 2 pulg y una velocidad de 20 rad/s, y el peso de la masa es de 8 lb. Haciendo caso omiso de la fricción, calcúlese el ángulo $\theta = \omega t$ en el instante en que se inicia el salto.

16-2 En la parte (*a*) de la figura, la masa m es impulsada hacia arriba y hacia abajo mediante una leva excéntrica y tiene un peso de 10 lb. La excentricidad de la leva es de 1 pulg. Supóngase que no hay fricción.

a) Obténgase la ecuación para la fuerza de contacto.

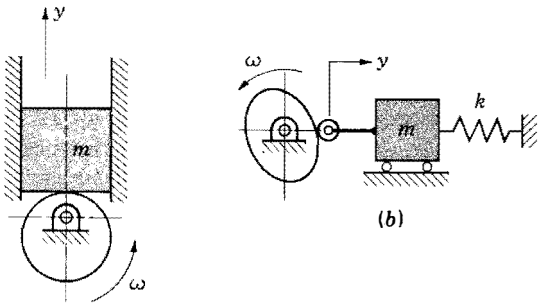
b) Encuéntrense la velocidad de la leva ω correspondiente al principio del salto.

16-3 En la parte (*a*) de la figura, la corredera tiene una masa de 2.5 kg. La leva es excéntrica simple y hace que la corredera suba 25 mm sin fricción alguna. ¿A qué velocidad de la leva, expresada en revoluciones por minuto, la corredera perderá primero el contacto con la leva? Hágase una gráfica de la fuerza de contacto a esta velocidad para una rotación de la leva de 360°.

16-4 El sistema de leva y seguidor que aparece ilustrado en la parte (*b*) de la figura tiene los siguientes valores $k = 1$ kN/m, $m = 0.90$ kg, $y = 15 - 15\cos \omega t$ mm y $w = 60$ rad/s. El resorte de retención se monta con una precarga de 2.5 N.

a) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la fuerza de contacto.

b) Si se encuentra que el seguidor salta alejándose de la leva, calcúlese el ángulo ωt correspondiente al momento preciso en que se inicia el salto.



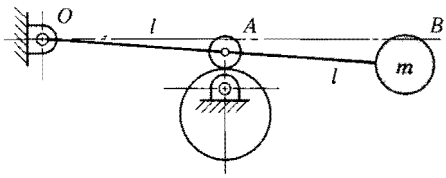
Problemas 16-1 a 16-6.

16-5 En la parte (*b*) de la figura se ve el modelo matemático de un sistema de leva y seguidor. El movimiento maquinado en la leva es para mover la masa hacia la derecha en una distancia de 2 pulg, con movimiento parabólico, en 150° de rotación de la leva, tener una detención durante 30°, volver a la posición de partida con movimiento armónico simple en 150° y tener una nueva detención durante los 30° restantes del ángulo de la leva. Se supone que no hay fricción o amortiguamiento. El coeficiente de resorte es de 40 lb/pulg y la precarga del mismo es de 6 lb, que corresponde a la posición $y = 0$. El peso de la masa es de 36 lb.

a) Dibújese un diagrama de desplazamiento en el que se muestre el movimiento del seguidor para los 360° completos de rotación de la leva. Sin incluir cálculos numéricos, sobrepónganse las gráficas de la aceleración y fuerza de contacto de la leva sobre los mismos ejes. Muéstrese en dónde es más probable que se inicie el salto.

b) ¿A qué velocidad de la leva, en revoluciones por minuto, se iniciaría el salto?

16-6 En la parte (*b*) de la figura se ilustra un mecanismo de leva y seguidor en forma abstracta. La leva se corta de tal manera que haga que la masa se desplace hacia la derecha una distancia de 25 mm con movimiento armónico, en 150° de rotación de la leva, que tenga una detención durante 30°, para después regresar al punto de partida durante los 180° restantes de rotación de la leva, también con mo-



Problema 16-7

vimiento armónico. El resorte se monta con una precarga de 22 N y tiene un coeficiente de 4.4 kN/m. La masa del seguidor es 17.5 kg. Calcúlese la velocidad de la leva, en revoluciones por minuto, a la que se iniciaría el salto.

16-7 En la figura se presenta una palanca *OAB* impulsada por una leva que se corta de tal manera que le confiera al rodillo una subida de 1 pulg, con movimiento parabólico, y un retorno parabólico sin detenciones. Se debe suponer que la palanca y el rodillo carecen de peso y que no hay fricción. Calcule la velocidad de salto si $l = 5$ pulg y la masa pesa 5 lb.

16-8 Un sistema de leva y seguidor similar al de la figura 16-6 utiliza una leva de placa impulsada a una velocidad de 600 rpm, y sus movimientos son una subida de armónico simple con retorno parabólico. Los sucesos son: subida durante 150°, detención durante 30° y retorno en 180°. El resorte de retención tiene un coeficiente $k = 14$ kN/m, con una precompresión de 12.5 mm. El seguidor tiene una masa de 1.6 kg. La carga externa está relacionada con el movimiento del seguidor y mediante la relación $F = 0.325 - 10.75y$, en donde y se da en metros y F en kilonewtons. Las dimensiones en milímetros, correspondientes a la figura 16-6, son: $R = 20$, $r = 5$, $l_B = 60$, y $l_C = 90$. Utilizando una subida de $L = 20$ mm y suponiendo que no hay fricción, trácese la gráfica de desplazamientos, el momento de torsión del eje de la leva y la componente radial de la fuerza de leva, para una revolución completa de la leva.

16-9 Repítase el problema 16-8 suponiendo que la velocidad es 900 rpm, $F = 0.110 + 10.75y$ kN, en donde y se da en metros y el coeficiente de fricción de deslizamiento es $\mu = 0.025$.

16-10 Una leva de placa impulsa a una seguidor de rodillo de movimiento alternativo a lo largo de la distancia $L = 1.25$ pulg, con movimiento parabólico durante 120° de rotación de la leva, detención durante 30° y retorno con movimiento cicloidal en 120°, y luego con detención durante la porción restante del ángulo de la leva. La carga externa sobre el seguidor es $F_{14} = 36$ lb durante la subida y cero durante las detenciones y el retorno. En la notación de la figura 16-6, $R = 3$ pulg, $r = 1$ pulg, $l_B = 6$ pulg, $l_C = 8$ pulg y $k = 150$ lb/pulg. El resorte se monta con una precarga de 37.5 lb, cuando el seguidor se encuentra en la parte inferior de su carrera. Si el peso del seguidor es de 1.8 lb y la velocidad de la leva, 140 rad/s. Suponiendo que no hay fricción, hágase la gráfica de los desplazamientos, el momento de torsión ejercido sobre la leva por el eje y la componente radial de la fuerza de contacto ejercida por el rodillo contra la superficie de la leva, para un ciclo completo del movimiento.

16-11 Repítase el problema 16-10 suponiendo que existe fricción con $\mu = 0.04$ y que el retorno cicloidal se desarrolla en 180°.

CAPÍTULO

DIECISIETE

DINÁMICA DE MÁQUINAS

17-1 VOLANTES

Un volante es un dispositivo que almacena energía. Absorbe energía mecánica aumentando su velocidad angular y la suministra reduciendo dicha velocidad. Por lo común, se utiliza el volante para suavizar el flujo de energía entre una fuente de potencia y su carga. Si sucede que la carga es una prensa punzonadora, la operación de punzonado propiamente dicha requiere energía sólo durante una fracción de su ciclo de movimiento. Si sucede que la fuente de potencia es un motor de cuatro ciclos y dos cilindros, éste proporciona energía sólo durante aproximadamente la mitad de su ciclo de movimiento. Se están investigando nuevas aplicaciones que comprenden el uso de un volante para absorber la energía de frenaje y suministrar energía de aceleración para un automóvil, y para actuar como dispositivos para suavizar la energía en aparatos eléctricos, así como en instalaciones generadoras de energía eléctrica mediante la energía solar o la fuerza del viento. Los ferrocarriles eléctricos han utilizado desde hace mucho el frenaje de regeneración, alimentando la energía de frenaje nuevamente a las líneas de potencia; pero los materiales más recientes y más fuertes ahora hacen que el volante sea más factible para tales fines.

En la figura 17-1 se tiene una representación matemática de un volante. El volante, cuyo movimiento se mide mediante la coordenada angular θ, posee un momento de inercia de masa I. Un momento de torsión de entrada T_i, correspondiente a una coordenada θ_i, hará que aumente la velocidad del volante. Y un momento de torsión de carga o salida T_o, con la coordenada correspondiente θ_o, absorberá energía del volante y lo hará que pierda velocidad. Si T_i se considera positivo y T_o negativo, la ecuación del movimiento del volante es

$$\sum M = T_i(\theta_i, \dot{\theta}_i) - T_o(\theta_o, \dot{\theta}_o) - I\ddot{\theta} = 0$$

o bien,

$$I\alpha = T_i(\theta_i, \omega_i) - T_o(\theta_o, \omega_o) \qquad (a)$$

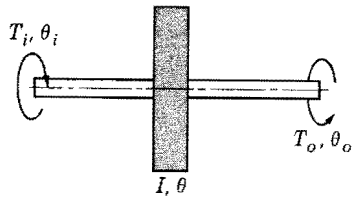


Figura 17- 1 Representación matemática de un volante.

Nótese que tanto T_i como T_o pueden depender respecto a sus valores de los desplazamientos angulares θ_i y θ_o así como de sus velocidades angulares ω_i y ω_o. Típicamente, la característica del momento de torsión depende sólo de uno de éstos. Por consiguiente, el momento de torsión entregado por un motor de inducción depende de la velocidad del mismo. De hecho, los fabricantes de motores eléctricos publican gráficas en las que se detallan las características de momento de torsión (o par motor) velocidad de sus diferentes motores.

Cuando se dan las funciones del momento de torsión de entrada y salida se puede resolver la ecuación (*a*) para el movimiento del volante, aplicando las bien conocidas técnicas para resolver ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. Puesto que estos métodos quedan más allá del alcance de este libro, se supondrá un eje rígido, dando $\theta_i = \theta = \theta_o$. Por lo tanto, la ecuación (*a*) toma la forma

$$I\alpha = T_i(\theta, \omega) - T_o(\theta, \omega) \qquad (b)$$

Cuando se conocen las dos funciones del momento de torsión y se dan los valores de arranque del desplazamiento θ y la velocidad ω, la (*b*) se puede resolver para ω y α como funciones del tiempo. No obstante, en realidad no se tiene interés por los valores instantáneos de las cantidades cinemáticas. Lo que se desea conocer principalmente es el comportamiento global del volante. ¿Cuál debe ser su momento de inercia? ¿Cómo acoplar la fuente de potencia a la carga para obtener un motor óptimo? Por último, ¿cuáles son las características de funcionamiento resultante del sistema?

Para lograr profundizar en el problema, en la figura 17-2 se tiene el diagrama de una situación hipotética. Una fuente de potencia de entrada somete a un volante a un momento de torsión constante T_i mientras el eje gira de θ_1 a θ_2. Se trata de un momento de torsión positivo y se representa gráficamente en sentido ascen-

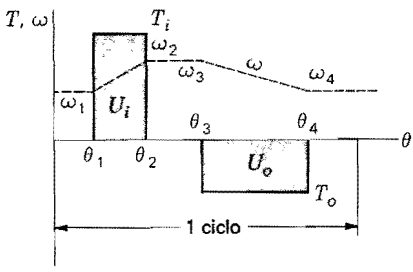


Figura 17-2

dente. La ecuación (*b*) indica que el resultado será una aceleración positiva α y, por tanto, la velocidad del eje aumenta de ω_1 a ω_2. Como se muestra, el eje gira ahora de θ_2 a θ_3 con un momento de torsión cero, y por ende, según la ecuación (*b*), con una aceleración cero. Por consiguiente, $\omega_3 = \omega_2$. De θ_3 hasta θ_4 se aplica una carga o momento de torsión de salida, de magnitud constante, haciendo que el eje pierda velocidad, de ω_3 a ω_4. Nótese que el momento de torsión de salida se representa gráficamente en la dirección negativa en concordancia con la ecuación (*b*).

La entrada de trabajo al volante es el área del rectángulo comprendido entre θ_1 y θ_2, o sea,

$$U_i = T_i(\theta_2 - \theta_1) \qquad (c)$$

La salida de trabajo del volante es el área del rectángulo comprendido entre θ_3 y θ_4, es decir,

$$U_o = T_o(\theta_4 - \theta_3) \qquad (d)$$

Si U_o es mayor que U_i, la carga utiliza más energía que la que se ha entregado al volante y de donde, ω_4 será menor que ω_1. Si $U_o = U_i$, ω_4 será igual a ω_1 debido a que la ganancia y las pérdidas son iguales; se está suponiendo que no hay pérdidas por fricción; y, por último, ω_4 será mayor que ω_1 si $U_i > U_o$.

Estas relaciones también se pueden escribir en términos de la energía cinética. En $\theta = \theta_1$, el volante tiene una velocidad de ω_1 rad/s, y, por tanto, su energía cinética es

$$U_1 = \tfrac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (e)$$

En $\theta = \theta_2$ la velocidad es ω_2, de modo que

$$U_2 = \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 \qquad (f)$$

Por consiguiente, el cambio en la energía cinética es

$$U_2 - U_1 = \tfrac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2) \qquad (17\text{-}1)$$

Muchas de las funciones momento de torsión (o par motor)-desplazamiento que se encuentra en las situaciones prácticas de ingeniería son tan complicadas que se deben integrar por métodos aproximados. Por ejemplo, en la figura 17-3 se tiene la gráfica del momento de torsión del motor del problema 14-7, para un ciclo del movimiento de un motor de un solo cilindro. Puesto que una parte de la curva del movimiento de torsión es negativa, el volante debe devolver parte de la energía al motor. La integración aproximada de esta curva para un ciclo de 4π rad da un momento de torsión medio T_m disponible para impulsar una carga.

La rutina de integración más sencilla es la regla de Simpson; esta aproximación se puede manejar en cualquier computadora y es lo suficientemente

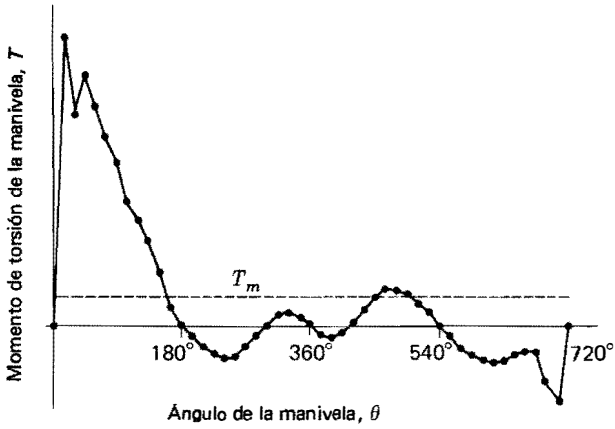


Figura 17-3 Relación entre el momento de torsión y el ángulo de la manivela para un motor de combustión interna de un cilindro y cuatro ciclos.

breve como para emplearse en las calculadoras programables más pequeñas. De hecho, esta rutina se encuentra generalmente como parte de la biblioteca de casi todas las calculadoras y minicomputadoras. La ecuación utilizada es

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \quad (17\text{-}2)$$

en donde

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} \qquad x_n > x_0$$

y n es el número de subintervalos utilizados, 2, 4, 6,... Si la memoria es limitada, resuélvase la ecuación (17-2) en dos o más pasos, póngase por caso, de 0 a $n/2$ a n.

Conviene definir un *coeficiente de fluctuación de la velocidad* como

$$C_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \quad (17\text{-}3)$$

en donde ω es la velocidad angular nominal, dada por

$$\omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \quad (17\text{-}4)$$

Se puede factorizar la (17-1) para dar

$$U_2 - U_1 = \frac{I}{2}(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1)$$

Puesto que $\omega_2 - \omega_1 = C_s\omega$ y $\omega_2 + \omega_1 = 2\omega$, se tiene

$$U_2 - U_1 = C_s I\omega^2 \quad (17\text{-}5)$$

Se puede usar la ecuación (17-5) para obtener una inercia apropiada del volante que corresponda al cambio de energía $U_2 - U_1$.

Tabla 17-1

θ grados	T lb·pulg	θ grados	T lb·pulg	θ grados	T lb·pulg	θ grados	T lb·pulg	θ grados	T lb·pulg
0	0	150	532	300	−8	450	242	600	−355
15	2800	165	184	315	89	465	310	615	−371
30	2090	180	0	330	125	480	323	630	−362
45	2430	195	−107	345	85	495	280	645	−312
60	2160	210	−206	360	0	510	206	660	−272
75	1840	225	−280	375	−85	525	107	675	−274
90	1590	240	−323	390	−125	540	0	690	−548
105	1210	255	−310	405	−89	555	−107	705	−760
120	1066	270	−242	420	8	570	−206		
135	803	285	−126	435	126	585	−292		

Ejemplo 17-1 En la tabla 17-1 se presenta una lista de valores de los momentos de torsión que se usaron para hacer la gráfica que aparece en la figura 17-3. La velocidad nominal del motor debe ser de 250 rad/s. *a*) Intégrese la función momento de torsión-desplazamiento para un ciclo y encuéntrese la energía que es factible suministrar a una carga durante el ciclo. *b*) Determínese el momento de torsión medio T_m (véase la Fig. 17-3). *c*) La mayor fluctuación de la energía ocurrirá aproximadamente entre $\theta = 15°$ y $\theta = 150$ en el diagrama de T_i-T_o; véase la figura 17-3 y nótese que $T_o = -T_m$. Utilizando un coeficiente de fluctuación de la velocidad C_s de 0.1, hállese un valor apropiado para la inercia del volante. *d*) Encuéntrese ω_2 y ω_1.

SOLUCION *a*) Si se usan $n = 48$ y $h = 4\pi/48$, el dato de la tabla 17-1 se introduce a un programa de computadora y se obtiene $U = 3\,490$ lb·pulg. Ésta es la energía que es factible suministrar a la carga.

(*b*)
$$T_m = \frac{3\,490}{4\pi} = 278 \text{ lb·pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

c) El circuito positivo más grande en el diagrama de momento de torsión-despazamiento ocurre entre $\theta = 0$ y $\theta = 180°$. Se selecciona este circuito como el que da por resultado el mayor cambio de velocidad. Si se resta 278 lb·pulg de los valores de la tabla 17-1 para este circuito, se obtiene, respectivamente, —278, 2 522, 1 812, 2 152, 1 882, 1 562, 1 312, 932, 788, 525, 254; —94 y —278 lb·pulg. Introduciendo una vez más la aproximación de Simpson y usando $n = 12$ y $h = 4\pi/48$, da $U_2 - U_1 = 3\,600$ lb·pulg. Ahora resuélvase la (17-5) para I y sustitúyase. Esto da

$$I = \frac{U_2 - U_1}{C_s \omega^2} = \frac{3660}{0.1(250)^2} = 0.586 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

d) Las ecuaciones (17-3) y (17-4)se pueden resolver simultáneamente para ω_2 y ω_1. Sustituyendo los valores apropiados en ambas ecuaciones, se obtiene

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2}(2 + C_s) = \frac{250}{2}(2 + 0.1) = 262.5 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\omega_1 = 2\omega - \omega_2 = 2(250) - 262.5 = 237.5 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Estas dos velocidades ocurren, respectivamente, en $\theta = 180°$ y $\theta = 0$.

17-2 GIRÓSCOPOS

El giróscopo de la figura 17-4 es un instrumento que ha fascinado a los estudiantes de la mecánica y las matemáticas aplicadas durante muchos años. De hecho, una vez que el rotor se hace girar, parece actuar como un dispositivo que posee inteligencia. Si se intenta mover alguna de sus partes, parece no sólo que se resiste a este movimiento, sino que incluso lo evade. Se verá que hasta parece no conformarse a las leyes del equilibro estático y de la gravitación.

Las aplicaciones del giróscopo como medidores de inclinación y viraje, horizontes artificiales y pilotos automáticos en naves aéreas y cohetes, son por demás conocidas, como también lo es su uso en la brújula giroscópica. Durante muchos años, ha servido como estabilizador en los buques y torpedos. También se tiene necesidad de pensar en los efectos giroscópicos en el diseño de máquinas, aunque no siempre de manera intencional. Estos efectos están presentes cuando se maneja una motocicleta o bicicleta; también están presentes, debido a las masas giratorias, cuando un aeroplano o automóvil da vuelta. Hay ocasiones en que estos efectos son deseables, pero con mayor frecuencia se consideran indeseables y los diseñadores deben tomarlos en cuenta al seleccionar los cojinetes y las partes giratorias. Evidentemente, es cierto que el aumentar las velocidades de la máquina a niveles cada vez más elevados y conforme los factores de seguridad disminuyen, se debe comenzar a tomar muy en cuenta las fuerzas giroscópicas en los diseños de

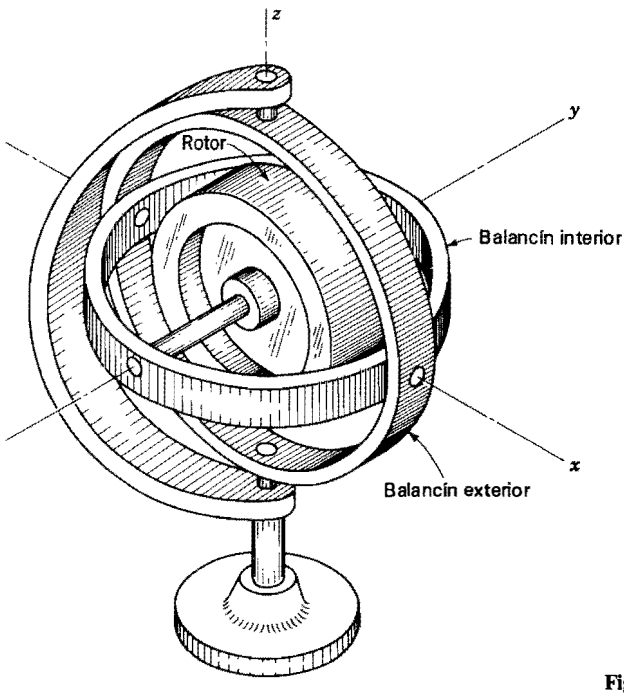


Figura 17-4 Giroscopio de laboratorio.

máquinas, porque sus valores serán cada vez más significativos. A decir verdad, las ecuaciones generales para el movimiento de un giróscopo no son sencillas. Por fortuna, al diseñar máquinas sólo se requieren unas cuantas soluciones simples y aproximadas.

El rotor del giróscopo de la figura 17-4 tiene un borde pesado y va sujeto a un eje que gira sobre cojinetes en el balancín interior. Este último está montado sobre pivotes de tal modo que tenga libertad para girar en torno a un eje perpendicular al eje de rotación del rotor. Estos pivotes están en un balancín exterior que puede girar alrededor de un eje vertical que pasa por el marco, perpendicular al plano del rotor y a los ejes del balancín interior, para la posición ilustrada en la figura. Así pues, el rotor puede girar sólo en torno al eje y, o bien, junto con el balancín interior, alrededor del eje x, o bien, con ambos balancines, alrededor del eje z. De hecho, el rotor puede tener simultáneamente estos tres tipos de rotación. Será conveniente designar al eje del rotor, o eje y, como el *eje del espín*.

Para proporcionar un vehículo que sirva para explicar los movimientos más simples de un giróscopo, conviene realizar una serie de experimentos con el de la figura 17-4. En lo que sigue se supone que el motor está girando y que la fricción del pivote es despreciable.

1. Si el eje z se mantiene en posición vertical, el giróscopo se puede mover hacia cualquier parte sobre una mesa o en una habitación, sin alterar la dirección del eje del espín. Esto es una consecuencia de la ley de conservación del momento de la cantidad de movimiento (o ímpetu). Si el eje del espín debe cambiar de dirección, el vector momento de la cantidad de movimiento debe cambiar también de dirección, pero esto requiere de un momento de torsión externo que en este experimento no se ha suministrado. Mientras el rotor siga girando, se podría levantar el balacín interior, sacándolo de sus cojinetes, y moverlo hacia uno y otro lado. Entonces se encuentra que se puede trasladar hacia cualquier parte, pero presenta una resistencia definida cuando se intenta hacer girar el eje del espín.
2. Con el balancín interior nuevamente en los cojinetes, supóngase que se aplica una presión, por ejemplo, con un lápiz, a dicho balancín para hacerlo girar alrededor del eje x. No sólo se encuentra resistencia a la presión del lápiz, sino que el balancín exterior comienza a girar lentamente en torno al eje vertical z, y esta rotación continúa hasta que se suprime la presión. La presión del lápiz constituye un momento de torsión sobre el balancín interior, siendo la fuerza paralela y opuesta del par la que proviene de los pivotes en el balancín. Para estudiar con cuidado estos efectos, se podría hacer que el rotor girara en la dirección positiva, esto es, con el vector velocidad angular apuntando en la dirección y positiva. Luego, si se aplica un momento de torsión positivo al balancín interior (el vector momento de torsión apuntando en la dirección x positiva), se encuentra que la rotación del balancín exterior es en la dirección z negativa. El lector debe observar que estos efectos ocurren en un sistema de coordenadas derecho. Una velocidad de espín negativa o un momento de torsión

negativo hará que el balancín gire en la dirección z positiva, para el conjunto de ejes que se muestra. La rotación del eje del espín en torno a un eje perpendicular al de un momento de torsión aplicado al mismo recibe el nombre de *precesión;* por tanto, la aplicación de un momento de torsión al rotor que gira lo hace que efectúe una *precesión.* En este ejemplo, el eje z se designa como *eje de precesión.*

3. Como tercer experimento, se podría aplicar un momento de torsión al balancín exterior, para intentar hacerlo girar alrededor del eje z. Este intento se encuentra con resistencia y hace que el balancín interior gire junto con el eje del espín. Cuando el eje del espín se encuentra en posición vertical, el giróscopo está en equilibrio estable, y, entonces, se puede hacer girar el balancín exterior con bastante libertad. Nótese en este ejemplo, al igual que en el anterior, que el vector momento de la cantidad de movimiento está cambiando de dirección debido a la aplicación de un momento de torsión externo.

En la figura 17-5*a*, supóngase que el rotor está girando en torno a su eje del espín con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_s$ mientras que, al mismo tiempo, el eje del espín efectúa una precesión con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_p$. Sea I_s el momento de inercia del rotor en torno al eje del espín y desígnese por I el momento de inercia en torno al x y al z, ya que ambos son iguales. Debido a que los ejes del rotor son los ejes principales de inercia, la componente del vector momento de la cantidad de movimiento† a lo largo del eje del espín es $\mathbf{H}_s = I_s\boldsymbol{\omega}_s$ y, a lo largo del eje de precesión, es $\mathbf{H}_p = I\boldsymbol{\omega}_p$. Después de un pequeño periodo Δt y, el eje del espín ha girado describiendo el ángulo $\Delta\theta$ hasta llegar a una nueva posición indicada como y' en la figura 17-5*b*. Por ende, la componente del momento de la cantidad de movimiento a lo largo del eje del espín está cambiando continuamente de dirección durante la precesión. Cualquier vector, póngase por caso $\mathbf{H}_s$, que gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_p$ tiene una rapidez de cambio

$$\dot{\mathbf{H}}_s = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{H}_s$$

Puesto que la rapidez de cambio del momento de la cantidad de movimiento es igual al momento de torsión externo que actúa sobre el sistema, se tiene

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{H}}_s = \boldsymbol{\omega}_p \times (I_s\boldsymbol{\omega}_s) = I_s\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s \tag{17-6}$$

En la figura 17-5*a* se muestra la dirección del momento de torsión requerido para *mantener* la precesión. En la figura 17-5*b* se muestra que la dirección del momento de torsión aplicado debe seguir cambiando para mantener la precesión. También se muestra el hecho de que el momento de torsión *no* hace variar la componente de precesión del momento de la cantidad de movimiento. Lo que *sí* muestra es que el

† Si se desea obtener una definición de este vector, véase cualquier texto de mecánica aplicada, por ejemplo, F. P. Beer y E. R. Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers,* 3d. ed., chap. 18, McGraw-Hill, New York, 1976. Existe traducción al español de Libros de McGraw-Hill de México.

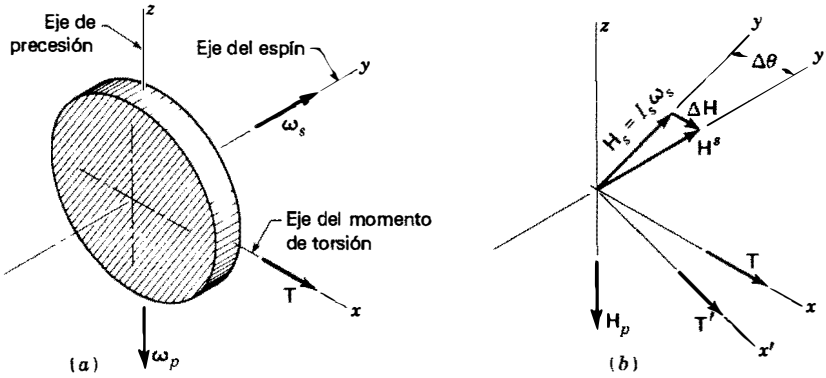


Figura 17-5

cambio en el momento de la cantidad de movimiento se realiza en la *misma* dirección que el momento de torsión aplicado. Nótese además que la ecuación (17-6) *sólo* se aplica al mantenimiento de un movimiento existente y no para iniciar o poner fin a una precesión. Podría hacerse notar, aunque no se demuestra aquí, que el inicio o la conclusión de la precesión va acompañado de vibraciones que, por lo común, se amortiguan rápidamente por fricción.

Ejemplo 17-2 En la figura 17-6 se ilustra un problema típico de las situaciones que ocurren en el diseño o el análisis de sistemas de máquinas, en los que es necesario tomar en cuenta las fuerzas giroscópicas. Una placa redonda, designada como 2, gira en torno al eje z', con una velocidad angular ω_2. Sobre esta placa giratoria están montados dos cojinetes A y B que sostienen un eje (o árbol) y la masa 3 los cuales giran con la velocidad angular vectorial $\boldsymbol{\omega}_3$. Se selecciona un sistema xyz fijo en el árbol y en la masa y, por ende, gira con ellos. El centro de masa G define el origen de este sistema, y el eje x coincide con el de la rotación del árbol. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_3$ es la que un observador ubicado sobre la placa giratoria vería que tiene árbol. Sean el peso de la masa $W = 10$ lb, su radio de giro $k = 2$ pulg y su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_3 = 350\hat{\mathbf{i}}$ rad/s. Suponiendo que $\omega_2 = 5$ rad/s en la dirección que se muestra, hállense las reacciones en los cojinetes. Supóngase también que el peso del árbol es despreciable y que el cojinete B sólo admite carga radial.

SOLUCIÓN Puesto que se están manejando fuerzas y haciendo caso omiso de la fricción, se puede aplicar el método de superposición. Por consiguiente, las reacciones en los cojinetes en A y B se calcularán primero considerando que $\boldsymbol{\omega}_3$ es cero. Luego, a estas componentes se les sumarán las que producen la acción giroscópica.

Cuando $\boldsymbol{\omega}_3$ es cero, se aplican los métodos del capítulo 13. Los resultados son

En A: $$\mathbf{F}_{23} = 1.94\hat{\mathbf{i}} + 2.24\hat{\mathbf{j}} + 6.67\hat{\mathbf{k}} \text{ lb} \tag{1}$$

En B: $$\mathbf{F}_{23} = 1.12\hat{\mathbf{j}} + 3.33\hat{\mathbf{k}} \text{ lb} \tag{2}$$

en donde los vectores se refieren al sistema xyz.

Las fuerzas debidas a la ación giroscópica se encuentran como sigue: el eje x es el del espín, y el momento de inercia en relación con este eje es

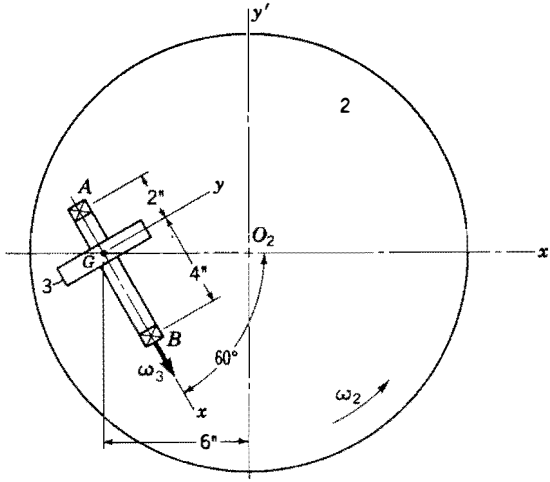


Figura 17-6

$$I_x = mk^2 = \frac{10}{386}(2)^2 = 0.1038\ \text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pulg}$$

La velocidad de precesión es $\boldsymbol{\omega}_2 = 5\hat{\mathbf{k}}' = 5\hat{\mathbf{k}}\ \text{rad/s}$ porque un vector velocidad angular siempre es un vector libre. Ahora se aplica la ecuación (17-6), en donde $I_s = I_x$, $\omega_p = \omega_2$ y $\omega_s = \omega_3$. Por tanto

$$\mathbf{T} = I_s\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_3 = (0.1038)(5\hat{\mathbf{k}} \times 350\hat{\mathbf{i}}) = 181.5\hat{\mathbf{j}}\ \text{lb} \cdot \text{pulg}$$

La posición de B en relación con A es $\mathbf{R}_{BA} = 6\hat{\mathbf{i}}$. Si se toman momentos en torno a A, se obtiene

$$\sum \mathbf{M}_A = \mathbf{T} + \mathbf{R}_{BA} \times \mathbf{F}_B = 181.5\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{F}_B = 0$$

o bien,

$$\mathbf{F}_B = 30.2\hat{\mathbf{k}}\ \text{lb} \tag{3}$$

Tomando momentos en torno a B, da

$$\sum \mathbf{M}_B = \mathbf{T} + \mathbf{R}_{AB} \times \mathbf{F}_A = 181.5\hat{\mathbf{j}} + (-6\hat{\mathbf{i}}) \times \mathbf{F}_A = 0$$

o bien

$$\mathbf{F}_A = -30.2\hat{\mathbf{k}}\ \text{lb} \tag{4}$$

Al sumar las ecuaciones (1) y (4) se obtiene la reacción total en A:

En A:

$$\mathbf{F}_{23} = 1.94\hat{\mathbf{i}} + 2.24\hat{\mathbf{j}} - 23.53\hat{\mathbf{k}}\ \text{lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Del mismo modo, se suman las ecuaciones (2) y (3) para dar la reacción en B:

En B:

$$\mathbf{F}_{23} = 1.12\hat{\mathbf{j}} + 33.53\hat{\mathbf{k}}\ \text{lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Nótese que el efecto del par giroscópico es levantar el cojinete posterior de la placa y empujar el cojinete delantero contra la placa.

17-3 REGULADORES AUTOMÁTICOS

El dispositivo de regulación automática conocido como *regulador* es un ejemplo de una clase muy grande y cada vez más numerosa de sistemas mecánicos y electromecánicos de control. El *regulador centrífugo* es un ejemplo de sistema de control totalmente mecánico que en alguna vez se utilizó con profusión para controlar la velocidad de las máquinas de vapor. La disponibilidad que se tiene hoy en día de una amplia variedad de dispositivos y transductores electrónicos de estado sólido a precio bajo, hace posible regular los sistemas mecánicos con mayor precisión y a menos costo que con los antiguos dispositivos totalmente mecánicos.

Muchos sistemas mecánicos de control se representan en la *notación de bloques* como en la figura 17-7. En este caso, θ_i y θ_o representan cualquier conjunto de funciones de entrada y salida, tales como desplazamiento angular o lineal, o velocidad, por ejemplo. Se dice que el sistema es *de circuito cerrado* o *de retroalimentación*, porque la salida θ_o se vuelve a alimentar al detector en la entrada, de modo que se mida el error $\mathscr{E}$, que es la diferencia entre la entrada y la salida. El propósito del controlador es lograr que este error se acerque lo más posible a cero o, incluso, que sea cero. Las características mecánicas del sistema, por ejemplo, las holguras mecánicas, la fricción, las inercias y las rigideces, a veces hacen que la salida difiera un tanto de la entrada y, en consecuencia, es responsabilidad del diseñador examinar estos efectos mecánicos para tratar de minimizar el error para todas las condiciones de operación.

El sistema de control de circuito cerrado en el que la salida es directamente proporcional al error recibe el nombre de *sistema de error proporcional*. En la figura 17-8 se muestra la respuesta de un sistema de este tipo a un salto repentino o cambio de escalón en la entrada θ_i. El factor ζ se conoce como *razón del factor de amortiguamiento* y es un número sin dimensiones que designa la magnitud de la fricción viscosa presente en el sistema. Como se indica, un valor grande de ζ produce el menor sobretiro.

El sistema automotriz de control de viaje de uso tan común es un ejemplo excelente de un regulador electromecánico. Se conecta un transductor a un cable del velocímetro, y la salida eléctrica de este transductor es la señal θ_o que se alimenta

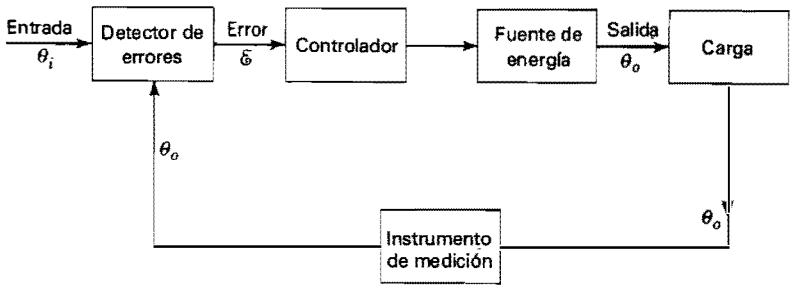


Figura 17-7 Diagrama de bloques de un sistema de circuito cerrado.

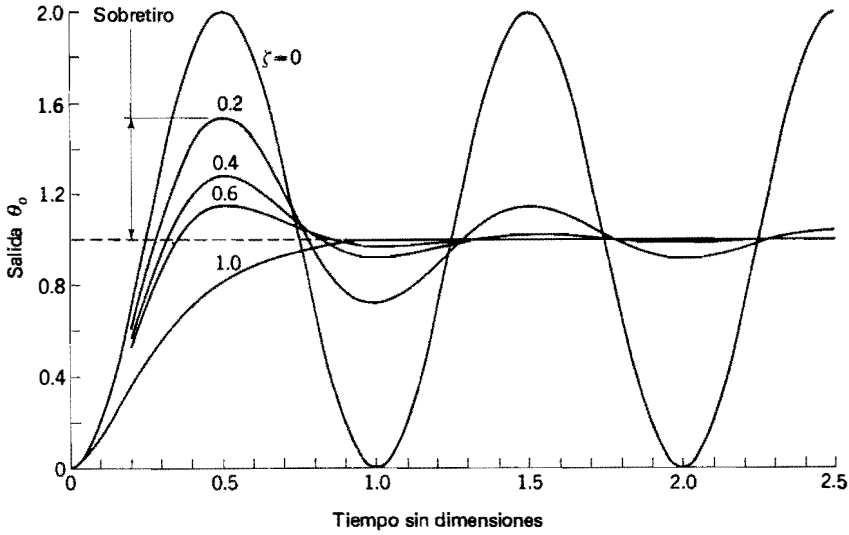


Figura 17-8 Respuesta a una entrada escalón unitario.

al detector de errores de la figura 17-7. En algunos casos se montan imanes en el eje impulsor del automóvil para activar al transductor. En el sistema de control de viaje, el detector de errores es un regulador electrónico, que por lo general se monta debajo del tablero de instrumentos. Este regulador se enciende mediante un conmutador de engrane que va debajo o cerca del volante de la dirección del automóvil. Mediante una cadena, se conecta una unidad de potencia al eslabonamiento de la garganta del carburador; la unidad de potencia es controlada por el regulador y recibe la energía necesaria de una lumbrera de vacío del motor. Este tipo de sistemas tienen uno o dos interruptores de liberación del freno, así como el conmutador de engrane. También se puede usar el pedal del acelerador para anular el sistema.

17-4 MEDICIÓN DE LA RESPUESTA DINÁMICA

Ya se está cerca de concluir los estudios de análisis cinemático y dinámico de una variedad un tanto amplia de máquinas y sistemas de máquinas. En el curso de estos estudios se ha encontrado necesario hacer variar suposiciones referentes a la fricción, rigidez, concentración de masa y momento de inercia. En otros casos se ha hecho caso omiso de ciertos aspectos, como si no tuvieran consecuencias en el análisis y se han supuesto geometrías casi perfectas. Sin embargo, la ley de Murphy se aplica al análisis de ingeniería tanto como a la vida cotidiana. Las piezas de máquinas con frecuencia resultan ser torcidas y excéntricas; a menudo sus formas geométricas son muy complicadas; y en su ajuste con otras pueden tener demasiada holgura o demasiada poca. Puede suceder que el análista produzca una

solución brillante para su problema utilizando técnicas matemáticas rebuscadas y las presentaciones gráficas en computadoras más modernas, pero si la máquina real no se comporta en forma semejante, la solución nada predice. La buena práctica de ingeniería requiere que los ingenieros verifiquen sus análisis utilizando alguna forma de experimentación confiable. Con este tipo de verificación, los procedimientos analíticos se transforman en métodos confiables para mejorar y optimizar el diseño original.

Este no es un libro sobre experimentación de ingeniería. En el corto espacio de que se dispone sólo se pueden mencionar unas cuantas de las herramientas y técnicas más confiables y más usadas para determinar el comportamiento dinámico de los sistemas de máquinas.

Medidores de deformaciones El medidor de deformaciones de resistencia eléctrica es por lo común una hoja metálica impresa, o semiconductor, montada sobre un sostén de película delgada. Por lo común se pegan varios de estos medidores al elemento mecánico en la ubicación en la que se va a medir la deformación. Cuando la pieza mecánica se somete a una deformación de tensión, la resistencia de medidor aumenta; cuando la pieza se somete a una deformación de compresión, la resistencia del medidor disminuye. Por tanto, se puede medir la deformación midiendo simplemente la caída de voltaje a través del medidor conforme se le deforma. La fórmula básica del medidor de deformaciones es

$$\frac{\Delta R}{R} = f\frac{\Delta l}{l} = f\epsilon \tag{17-7}$$

en donde R = resistencia del medidor
ΔR = cambio en la resistencia del medidor
l = longitud del medidor
Δl = cambio en la longitud del medidor
f = factor de sensibilidad del medidor
ϵ = deformación unitaria

Nótese que el factor de sensibilidad del medidor f es, sencillamente, la constante de proporcionalidad que relaciona el cambio unitario en la resistencia del medidor con la deformación unitaria.

Los medidores de hoja se fabrican en tamaños que varían desde cuadrados de 2 mm, aproximadamente, hasta unos 20 mm de largo; de modo que se pueden utilizar en una gran variedad de lugares, dependiendo de la distribución de la deformación o la geometría de la pieza.

Puesto que la deformación se puede relacionar con el esfuerzo y con la fuerza o momento, los medidores se pueden calibrar de tal modo que registren cualquier de estas cantidades. Estos medidores se deben conectar a un circuito de puente o a un amplificador de puente, y la salida se alimenta a un osciloscopio para efectuar

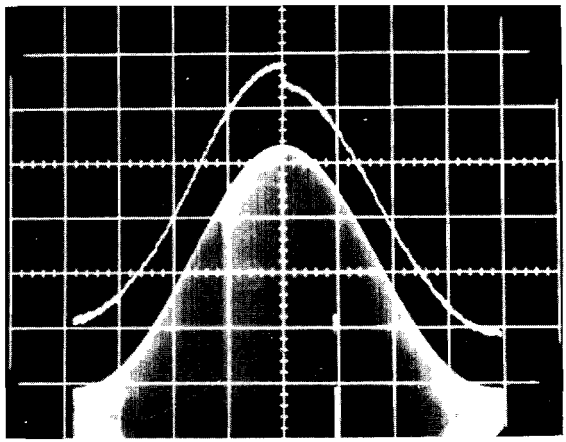


Figura 17-9 Trazos en el osciloscopio del desplazamiento y la fuerza de contacto de una leva excéntrica que impulsa a un seguidor de rodillo oscilante. El trazo superior es la fuerza de contacto medida mediante medidores de deformaciones alineados para medir la flexión de la palanca del seguidor. Para tomar esta fotografía, la leva se impulsó a poca velocidad, de manera que la fuerza de contacto presenta casi el mismo tipo de curva que el desplazamiento. El salto que se observa en la parte superior de la subida fue producido por la fricción de deslizamiento, que tiene una inversión de signo cuando la velocidad cambia de dirección. El diagrama de desplazamientos de la parte inferior de la imagen se generó por medio de un transformador diferencial rotatorio conectado al eje del oscilador. Se conectó un potenciómetro rotatorio al eje de leva para generar la señal de barrido horizontal. (*Por cortesía del profesor F. E. Fisher, Mechanical Analysis Laboratory, The University of Michigan.*)

las mediciones dinámicas. En la figura 17-9 se presenta una fotografía de un osciloscopio en el que se registra la fuerza de flexión en la palanca de un seguidor oscilante impulsado por una leva, para una revolución de la leva. Lo borroso del trazo se debe a la gran amplificación que se necesitó en esta aplicación particular con el fin de registrar una fuerza un tanto pequeña.

Potenciómetros En la figura 17-10 se presentan los diagramas esquemáticos de dos transductores de desplazamiento denominados potenciómetros *lineal* y *angular* de

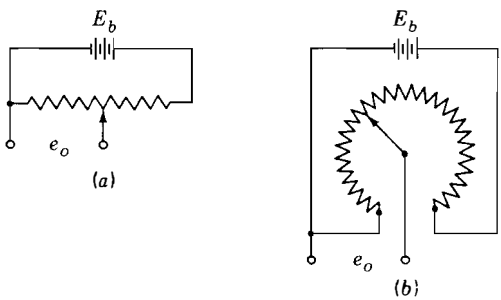


Figura 17-10 *a*) Potenciómetro lineal de movimiento alternativo; *b*) potenciómetro rotatorio o angular.

alambre devanado. Éstos son sumamente útiles para medir desplazamientos lineales y angulares, incluso a grandes velocidades. El potenciómetro lineal se compone de una bobina de alambre para resistencia devanado uniformemente alrededor de un aislador recto. Cuando la salida e_o de circuito se alimenta a un voltímetro o un osciloscopio, el cambio de voltaje es directamente proporcional al desplazamiento del contacto movible. Los brazos del contacto se pueden conectar a cualquier dispositivo mecánico y se calibran para medir el desplazamiento.

En la figura 17-11 se tiene una fotografía obtenida en un osciloscopio de haz dual, que muestra los desplazamientos de entrada de la leva y salida de la palanca, obtenidos en dos potenciómetros de movimiento alternativo. La leva se maquinó con una detención, mostrada como y_{max}. Debido a la flexión de la palanca, la salida x del seguidor no es la misma que la entrada y. Nótese también el atraso en fase entre y y x.

En la figura 17-10*b* se muestra el diagrama esquemático de un potenciómetro rotatorio que se utiliza con amplitud para mediciones dinámicas. El barrido horizontal para la fotografía de la figura 17-9 se generó mediante un potenciómetro rotatorio conectado directamente al eje de la leva.

Transformadores diferenciales El transformador diferencial es otro tipo de transductor de desplazamiento; en la figura 17-12 se muestran en forma esquemática los modelos lineal y angular. Cuando se excitan las bobinas primarias por medio de un voltaje alterno, se inducen voltajes en las bobinas secundarias por el acoplamiento magnético proporcionado por los núcleos de hierro movibles. Las bobinas secundarias se conectan, para cada transformador, de tal modo que los voltajes inducidos sean opuestos entre sí. Por consiguiente, el voltaje secundario neto es cero cuando el núcleo está centrado.

En la práctica, el núcleo se sujeta al elemento mecánico cuyo movimiento se desea medir. El arrollamiento primario se excita por medio de una fuente de

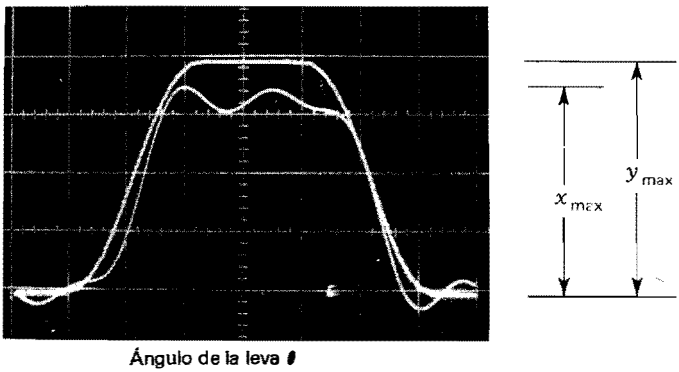


Figura 17-11 Diagramas de desplazamientos de levas generados mediante potenciómetros de movimiento alternativo. La leva se maquinó para generar el movimiento y; el movimiento de salida del seguidor se denota con x. La fotografía se tomó en un osciloscopio de haz dual. El barrido horizontal se generó por medio de un potenciómetro rotario conectado al eje de la leva.

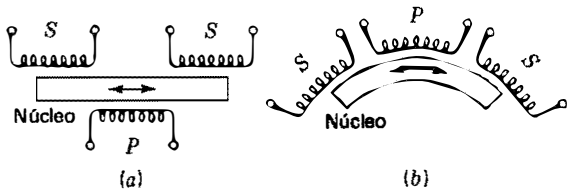


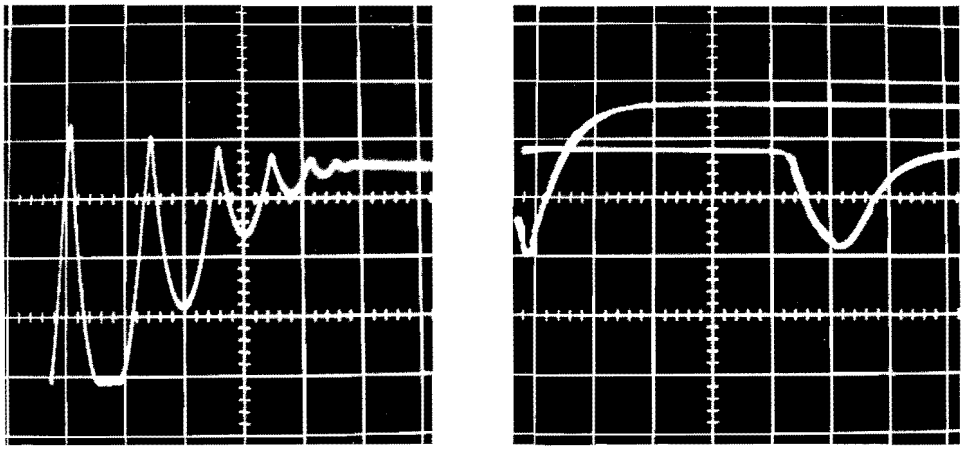
Figura 17-12 Transformadores diferenciales; *P* es la bobina primaria, *S* la bobina secundaria; *a*) modelo de movimiento alternativo, lineal; *b*) modelo rotatorio, o angular.

audiofrecuencia. La salida de los secundarios se alimenta a un osciloscopio, que entonces exhibe una envolvente que contiene una salida modulada a la frecuencia de excitación. El diagrama de desplazamientos de la leva que aparece en la figura 17-9 se generó empleando un transformador diferencial rotatorio conectado al eje de una palanca oscilante de seguidor.

Celdas solares Cuando se debe medir la dinámica de piezas muy pequeñas o muy ligeras, se debe tener un cuidado extremo para asegurarse de que la inercia o la masa del transductor no afecte el movimiento de la pieza. Las *celdas solares* son diodos de silicio que miden el desplazamiento o la velocidad, dependiendo del montaje, usando un haz de luz. Nada es necesario conectar a la pieza móvil y, en consecuencia, no se cambian su masa o inercia. El conjunto se puede, disponer de modo que la celda solar se monte en una posición fija y el haz de luz se dirija de suerte que la parte móvil proyecte una sombra sobre la celda solar. El artificio en el conjunto está en el circuito de polarización del diodo requerido para hacer que la caída de voltaje en la celda solar tenga una relación lineal con la cantidad de sombra producida por la parte móvil. Fisher† ha desarrollado los detalles de este procedimiento, utilizando un equipo tan simple que las mediciones pudieran llevarse a cabo casi en cualquier taller casero. En la figura 17-13*a* se tiene la imagen de un osciloscopio, obtenida con una celda solar montada detrás de una palanca que se movía rápidamente al chocar con un tope de hule. En la figura 17-13*b* se ilustran dos baches obtenidos conforme la palanca pasa por dos celdas solares muy pequeñas. La observación de la velocidad de barrido del osciloscopio, junto con una medición de la distancia entre las dos celdas, proporciona suficiente información para permitir calcular la velocidad de la palanca cuando pasa por las celdas.

Transductores de reflexión El transductor de reflexión es otro dispositivo de medición de desplazamiento lineal, pero se usa para medir movimientos muy pequeños, de unos 2 mm o menos. En la práctica, un haz de luz del transductor se dirige sobre un espejo pequeño o superficie reflectora pequeños sobre una pieza estacionaria. El movimiento de la pieza móvil tapa el haz, de modo que parte de éste se refleja hacia el transductor, a una fotocelda, y se amplifica, y el voltaje resultante se presenta visualmente como el trazo de un osciloscopio. El conjunto se

† F. E. Fisher y H. H. Alvord, *Instrumentation for Mechanical Analysis,* The University of Michigan Summer Conferences, Ann Arbor, Michigan, 1977, pp. 44-58.



(a) (b)

Figura 17-13 Ejemplos de mediciones de movimiento y velocidad utilizando celdas solares: *a*) trazo del osciloscopio mostrando el movimiento de una masa de péndulo cuando choca y rebota contra un tope de hule; *b*) el péndulo al cruzar dos celdas solares produce un bache en cada trazo de osciloscopio, la velocidad del péndulo se calcula dividiendo la distancia entre las celdas solares entre el tiempo del osciloscopio, entre un bache y otro. (*Por cortesía del profesor F. E. Fisher, Mechanical Analysis Laboratory, The University of Michigan.*)

calibra de tal modo que el área de la porción sombreada del haz sea proporcional al movimiento de la pieza.

Generadores Se fabrican generadores eléctricos de corriente continua para que sirvan como transductores de velocidad. Estos generadores se pueden obtener en forma lineal para usarse en el movimiento alternativo, o en forma rotatoria para usarse con el fin de medir la velocidad angular. En cada caso, el voltaje generado es proporcional a la velocidad de la pieza a la que se conecta el dispositivo.

Otra instrumentación En esta sección se han mencionado sólo unos cuantos dispositivos de medición para uso general. El objetivo fundamental ha sido mostrar lo que se puede hacer en el campo de la medición dinámica, más que describir todos los medios y dispositivos que pueden usarse. Una investigación de las publicaciones de los fabricantes revelará muchas otras técnicas e instrumentos. Sin embargo, además de una gran variedad de transductores, un laboratorio bien equipado tendrá varios dispositivos de registro y la instrumentación asociada, como por ejemplo, osciloscopios y oscilógrafos, amplificadores de puente, varios medidores y amplificadores eléctricos e instrumentos del tipo estroboscópico.

17-5 CIMENTACIONES PARA MÁQUINAS

Las máquinas grandes, como por ejemplo, generadores de motor y prensas, incluyendo tanto los elementos impulsores como los impulsados, por lo general se deben montar en un solo armazón y fijarse en una cimentación. Ésta debe ser de concreto reforzado con la forma de una placa o losa gruesa que se apoye sobre pilotes hincados en el suelo, o con la de un bloque gigantesco que descanse sobre el suelo.

Las capas de apoyo del suelo natural se deben someter a ensayos de laboratorio, con el fin de determinar la presión de apoyo permitible, antes de diseñar la cimentación. La cimentación de la máquina se debe aislar de la estructura del edificio y del piso, con el fin de evitar la transmisión de vibraciones y ruido, debido a las fuerzas de inercia y los pares no balanceados. Debe tenerse especial cuidado para alinear los centros de gravedad de la máquina y el bloque de cimentación, en dirección vertical. Cualquier excentricidad puede provocar finalmente un asentamiento desigual de la cimentación y generar problemas.

También es conveniente usar absorbedores de vibraciones, amortiguadores de resorte u otros materiales elásticos entre el armazón de la máquina y la cimentación. Éstos se pueden seleccionar después de que se haya concluido un estudio de las características de transmisibilidad de la máquina.

PROBLEMAS

17-1 En la tabla 17-2 se presenta una lista del momento de torsión (o par motor) de salida para un motor de un cilindro que funciona a 4 600 rpm.

a) Hállese el momento de torsión medio de salida.

b) Determínese el momento de inercia de masa de un volante apropiado, usando $C_s = 0.025$.

17-2 Con los datos que aparecen en la tabla 17-2, determínese el momento de inercia de un volante para un motor en V de 90° de dos cilindros que tiene una sola manivela. Úsese $C_s = 0.0125$ y una velocidad nominal de 4 600 rpm. Si se va a usar un volante cilíndrico o del tipo de disco, ¿cuál debe ser el espesor si se fabrica de acero y tiene un diámetro exterior de 400 mm? Úsese $\rho = 7.8$ Mg/m^3 como la densidad del acero.

17-3 Con los datos de la tabla 17-1, encuéntrese el momento de torsión medio de salida y la inercia del volante necesarios para un motor de tres cilindros en línea, correspondiente a una velocidad nominal de 2 400 rpm. Úsese $C_s = 0.03$.

17-4 En la tabla 17-3 se presenta el momento de torsión de carga requerido por una prensa punzonadora de 200 ton, para una revolución del volante. Este debe tener una velocidad nominal de 240 rpm y se debe diseñar para un coeficiente de fluctuación de la velocidad de 0.075.

a) Determínese el momento de torsión medio del motor requerido en el eje del volante y los caballos de potencia del motor necesarios, suponiendo que éste tiene una característica constante del momento de torsión-velocidad.

b) Encuéntrese el momento de inercia necesario para el volante.

Tabla 17-2

θ grados	T N · m	θ grados	T N · m	θ grados	T N · m	θ grados	T N · m
0	0	180	0	360	0	540	0
10	17	190	−344	370	−145	550	−344
20	812	200	−540	380	−150	560	−540
30	963	210	−576	390	−7	570	−577
40	1 016	220	−570	400	164	580	−572
50	937	230	−638	410	235	590	−643
60	774	240	−785	420	203	600	−793
70	641	250	−879	430	190	610	−893
80	697	260	−814	440	324	620	−836
90	849	270	−571	450	571	630	−605
100	1 031	280	−324	460	814	640	−379
110	1 027	290	−190	470	879	650	−264
120	902	300	−203	480	785	660	−300
130	712	310	−235	490	638	670	−368
140	607	320	−164	500	570	680	−334
150	594	330	7	510	576	690	−198
160	544	340	150	520	540	700	−56
170	345	350	145	530	344	710	2

Tabla 17-3

θ grados	T lb·pulg	θ grados	T lb·pulg	θ grados	T lb·pulg	θ grados	T lb·pulg
0	857	90	7 888	180	1 801	270	857
10	857	100	8 317	190	1 629	280	857
20	857	110	8 488	200	1 458	290	857
30	857	120	8 574	210	1 372	300	857
40	857	130	8 403	220	1 115	310	857
50	1 287	140	7 717	230	1 029	320	857
60	2 572	150	3 515	240	943	330	857
70	5 144	160	2 144	250	857	340	857
80	6 859	170	1 972	260	857	350	857

RESPUESTAS DE PROBLEMAS SELECTOS

1-3 $\gamma_{\text{min}} = 53°$; $\gamma_{\text{máx}} = 98°$; en $\theta = 40°$, $\gamma = 59°$; en $\theta = 229°$, $\gamma = 90°$
1-5 (*a*) $m = 1$; (*b*) $m = 1$
1-7 $Q = 1.10$

2-1 Espiral
2-3 $\mathbf{R}_{QP} = -7\hat{\mathbf{i}} - 14\hat{\mathbf{j}}$
2-5 $\Delta\mathbf{R}_A = -4.5a\hat{\mathbf{i}}$
2-7 En el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj; $\mathbf{R} = 4\angle 0°$; $t = 20$; $\Delta\mathbf{R} = 404\angle 0°$
2-9 $\Delta\mathbf{R}_{P_3} = -2.12\hat{\mathbf{i}}_1 + 3.88\hat{\mathbf{j}}_1$; $\Delta\mathbf{R}_{P_3/2} = 3\hat{\mathbf{i}}_2$
2-11 $\Delta\mathbf{R}_Q = 1.90\hat{\mathbf{i}} + 1.10\hat{\mathbf{j}} = 2.20\angle 30°$
2-13 $R_C^x = 2.50\cos\theta_2 + \sqrt{36.75 + 6.25\cos^2\theta_2}$

3-1 $\mathbf{R} = 314\angle 162°$ pulg/s
3-3 $\mathbf{V}_{BA} = \mathbf{V}_{B_{3/2}} = 57.7\angle 334°$ mi/h
3-5 *a*) d = 140mm; *b*) $V_{AB} = -60$ m/s; V_{BA} = 60 m/s; $\boldsymbol{\omega}_2$ = 200 rad/s mmr
3-7 *a*) Una recta en N49°E; *b*) sin cambio
3-9 $\boldsymbol{\omega}_3$ = 1.43 rad/s cmr; $\boldsymbol{\omega}_4$ = 15.4 rad/s cmr
3-11 $\mathbf{V}_C$ = 22.5$\angle 284°$ pies/s; $\boldsymbol{\omega}_3$ = 0.60 rad/s cmr
3-13 $\mathbf{V}_C = 0.402\angle 151°$ m/s; $\mathbf{V}_D = 0.290\angle 249°$ m/s
3-15 $\mathbf{V}_C = 4.77\angle 96°$ m/s; $\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_4 = 22$ rad/s cmr
3-17 $\boldsymbol{\omega}_6$ = 4 rad/s cmr; $\mathbf{V}_B = 0.963\angle 180°$ pies/s; $\mathbf{V}_C$ = 2.02$\angle 208°$ pies/s; $\mathbf{V}_D$ = 2.01$\angle 205°$ pies/s
3-19 $\boldsymbol{\omega}_3$ = 3.23 rad/s cmr, $\mathbf{V}_B$ = 16.9$\angle -56°$ pies/s
3-21 $\mathbf{V}_C = 9.03\angle 138°$ m/s
3-23 $\mathbf{V}_B$ = 35.5$\angle 240°$ pies/s; $\mathbf{V}_C$ = 40.9$\angle 267°$ pies/s; $\mathbf{V}_D$ = 31.6$\angle -60°$ pies/s
3-25 $\mathbf{V}_B = 1.04\angle -23°$ pies/s
3-27 $\boldsymbol{\omega}_3$ = $\boldsymbol{\omega}_4$ = 14.4 rad

3-29 $\omega_3 = 1.61$ rad/s mmr

3-31 $\mathbf{V}_E = 10.0\angle 221°$ pulg/s, $\mathbf{V}_G = 11.6\angle -57°$ pulg/s; $\omega_3 = \omega_4 = 3.30$ rad/s cmr; $\omega_5 = 25.0$ rad/s mmr; $\omega_6 = 3.69$ rad/s mmr

3-33 $\omega_3 = 30$ rad/s mmr

4-1 $-4\hat{\mathbf{i}}$ pulg/s^2

4-3 $\hat{\boldsymbol{\tau}} = 0.300\hat{\mathbf{i}} - 0.954\hat{\mathbf{j}}$; $A^n = 0.437$ m/s^2; $A^t = 0.354$ m/s^2; $\rho = 405$ mm

4-5 $\mathbf{A}_A = -7200\hat{\mathbf{i}} + 2400\hat{\mathbf{j}}$ m/s^2

4-7 $\mathbf{V}_B = 12\angle 270°$ pies/s; $\mathbf{V}_C = 8.40\angle 12°$ pies/s; $\mathbf{A}_B = 392\angle 165°$ pies/s^2; $\mathbf{A}_C = 210\angle 240°$ pies/s^2

4-9 $\mathbf{V}_B = 74.5\angle 90°$ m/s; $\mathbf{A}_B = 100\,000\angle 90°$ m/s^2; $\omega_2 = 386$ rad/s cmr; $\alpha_2 = 557\,000$ rad/s^2 cmr

4-11 $\alpha_3 = 563$ rad/s^2 cmr; $\alpha_4 = 124$ rad/s^2 cmr

4-13 $\mathbf{A}_C = 3056\angle 113°$ pies/s^2; $\alpha_3 = 1741$ rad/s^2 cmr; $\alpha_4 = 3055$ rad/s^2 cmr

4-15 $\mathbf{A}_C = 2610\angle -69°$ pies/s^2; $\alpha_4 = 1494$ rad/s^2 cmr

4-17 $\mathbf{A}_B = 16.7\angle 0°$ pies/s^2; $\alpha_3 = 17.5$ rad/s^2 cmr; $\alpha_6 = 10.8$ rad/s^2 mmr

4-19 $\alpha_2 = 4180$ rad/s^2 mmr

4-21 $\mathbf{A}_C = 450\angle -104°$ m/s^2; $\alpha_3 = 74.1$ rad/s^2 mmr

4-23 $\mathbf{A}_B = 2440\angle 240°$ pies/s^2; $\mathbf{A}_D = 4030\angle 120°$ pies/s^2

4-25 $\theta_3 = 15.5°$; $\theta_4 = -8.99°$; $\omega_3 = 47.6$ rad/s cmr; $\omega_4 = 70.5$ rad/s cmr; $\alpha_3 = 3330$ rad/s^2 cmr; $\alpha_4 = 3200$ rad/s^2 ccw

4-27 $\theta_3 = 28.3°$; $\theta_4 = 55.9°$; $\omega_3 = 0.633$ rad/s mmr, $\omega_4 = 2.16$ rad/s mmr; $\alpha_3 = 7.82$ rad/s^2 cmr; $\alpha_4 = 6.70$ rad/s^2 cmr

4-29 $\theta_3 = 38.4°$; $\theta_4 = 156°$; $\omega_3 = 6.85$ rad/s mmr; $\omega_4 = 1.24$ rad/s mmr; $\alpha_3 = 62.5$ rad/s^2 cmr; $\alpha_4 = 96.5$ rad/s^2 mmr

4-31 $\mathbf{V}_B = 184\angle -19°$ pulg/s; $\mathbf{A}_B = 2700\angle -172°$ pulg/s^2; $\omega_4 = 6.57$ rad/s mmr; $\alpha_4 = 86.4$ rad/s^2 cmr

4-33 $\mathbf{A}_{A_4} = 24\,200\angle 0°$ pies/s^2

4-35 $\mathbf{A}_B = 197\angle -36°$ pies/s^2; $\alpha_4 = 45.9$ rad/s^2 cmr

4-37 $\mathbf{A}_{P_4} = 214\angle 96°$ m/s^2

4-39 $\mathbf{A}_{C_4} = 901\angle 269°$ pulg/s^2; $\alpha_4 = 6$ rad/s^2 cmr

4-41 $\mathbf{A}_G = 140\angle 74°$ pulg/s^2; $\alpha_5 = 320$ rad/s^2 mmr; $\alpha_6 = 42.3$ rad/s^2 mmr

6-3 Cara = 150 mm desde el pivote

6-5 $y'(\beta/2) = \pi L/2\beta$; $y'''(\beta/2) = -\pi^3 L/2\beta^3$; $y''(0) = \pi^2 L/2\beta^2$; $y''(\beta) = -\pi^2 L/2\beta^2$

6-7 *AB*: detención, $L_1 = 0$, $\beta_1 = 60.0°$; *BC*: movimiento armónico modificado de subida completa, ecuación (6-20), $L_2 = 2.5$ pulg, $\beta_2 = 60.0°$; *CD*: movimiento de medio retorno semiarmónico, ecuación (6-26), $L_3 = 0.042$ pulg, $\beta_3 = 3.96°$; *DE*: movimiento uniforme, $L_4 = 1.0$ pulg, $\beta_4 = 60.0°$; *EA*: movimiento de medio retorno semicicloidal, ecuación (6-31), $L_5 = 1.48$ pulg, $\beta_5 = 174.04°$

6-9 $t_{AB} = 0.025$ s; $\dot{y}_{máx} = 200$ pulg/s; $\dot{y}_{mín} = -40$ pulg/s; $\ddot{y}_{máx} = 21\,300$ pulg/s^2; $\ddot{y}_{mín} = -38\,100$ pulg/s^2

6-11 $\dot{y}_{máx} = 41.9$ rad/s; $\dot{y}_{mín} = -44.9$ rad/s; $\ddot{y}_{máx} = 7900$ rad/s^2; $\ddot{y}_{mín} = -6840$ rad/s^2

6-13 Ancho de cara = 2.20 pulg; $\rho_{mín} = 2.50$ pulg

6-15 $R_0 > 19.7$ pulg; ancho de cara > 6.24 pulg

6-17 $\phi_{máx} = 12°$; $R_r < 4.5$ pulg

6-19 $R_0 > 50$ mm; $\ddot{y}_{máx} = 37$ m/s^2

6-21 $R_0 > 65$ mm; $\ddot{y}_{máx} = 75$ m/s^2

6-23 $u = (R_0 + R_c + y)\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$

$v = (R_0 + R_c + y)\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$

$R = \sqrt{(R_0 + R_c + y)^2 + (y')^2}$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta - \tan^{-1}\frac{y'}{R_0 + R_c + y}$$

7-1 160 dientes por pulgada

7-3 2 mm

7-5 0.8976 dientes por pulgada, 44.563 pulg

7-7 12.73 mm, 458.4 mm

7-9 9.19 pulg

7-11 17 dientes, 51 dientes

7-13 $a = 0.25$ pulg $b = 0.3125$ pulg, $c = 0.0625$ pulg, $p_c = 0.785$ pulg, $t = 0.392$ pulg, $d_{b_2} = 5.64$ pulg, $d_{b_3} = 8.46$ pulg, $u_a = 0.62$ pulg, $u_r = 0.585$ pulg, $m_c = 1.635$, $p_b = 0.737$ pulg

7-15 $q_a = 1.07$ pulg, $q_r = 0.99$ pulg, $q_t = 2.06$ pulg, $m_c = 1.64$

7-17 $m_c = 1.56$

7-19 *a*) $q_a = 1.54$ pulg, $q_r = 1.52$ pulg, $q_t = 3.06$ pulg, $m_c = 1.95$; *b*) $m_c = 1.55$; sin cambio en el ángulo de presión

7-25 $t_b = 17.14$ mm, $t_a = 6.74$ mm, $\varphi_a = 32.78°$

7-27 $t_h = 1.146$ pulg

7-29 $t_b = 0.1620$ pulg, $t_a = 0.0421$ pulg, $\varphi_a = 35.3°$

7-31 *a*) $D = 0.182$ pulg; *b*) 9.8268 pulg

7-33 $m_c = 1.345$

7-35 $m_c = 1.770$

7-37 $a_3 = 1.343$ pulg

8-1 $p_t = 0.523$ pulg, $p_n = 0.370$ pulg, $P_n = 8.48$, $d_2 = 2.5$ pulg, $d_3 = 4$ pulg, 42.4, 67.8

8-4 $P_t = 6.93$, $p_t = 0.453$ pulg, $N_2 = 17$, $N_3 = 31$, $d_2 = 2.45$ pulg, $d_3 = 4.48$ pulg

8-7 $m_n = 1.79$, $m_t = 2.87$

8-10 $N_2 = 30$, $N_3 = 60$, $\psi_2 = \psi_3 = 25°$ de mano izquierda, $(d_2 + d_3)/2 = 9.93$ pulg

8-13 $l = 3.75$ pulg, $\lambda = 34.37°$, $\psi = 34.37°$, $d_3 = 15.90$ pulg

8-16 27°, 93°

8-18 $d_2 = 2.125$ pulg, $d_3 = 3.500$ pulg, $\gamma_2 = 34.8°$, $\gamma_3 = 70.2°$, $a_2 = 0.1612$ pulg, $a_3 = 0.0888$ pulg, $F = 0.559$ pulg

9-1 $n_8 = 68.2$ rpm mmr, $e = -5/88$

9-3 $n_9 = 11.82$ rpm mmr

9-5 Una solución: $N_3 = 30$ dientes, $N_4 = 25$ dientes, $N_5 = 30$ dientes, $N_6 = 20$ dientes, $N_7 = 25$ dientes, $N_8 = 35$ dientes, $N_{10} = 35$ dientes; las velocidades de salida son 200, 214, 322 y 482 rpm

9-7 231 rpm cmr

9-9 645 rpm cmr

9-11 $n_A = -(5/22)n_2$ o en dirección contraria; sustitúyanse los engranes 4 y 5 con un solo engrane

9-13 *a*) 84 dientes, 156 mm; *b*) $n_A = 6.77$ rpm cmr

9-15 *a*) $n_R = 625$ rpm, $n_L = 695$ rpm,; *b*) $n_A = 674$ rpm

10-1 Para seis puntos, 0.170, 1.464, 3.706, 6, 6.294, 8.356 y 9.830

10-3 Solución típica; $r_2 = 7.4$ pulg, $r_3 = 20.9$ pulg, $e = 8$ pulg

10-5 Solución típica; $r_1 = 7.63$ pies, $r_2 = 3.22$ pies, $r_3 = 8.48$ pies

10-7 Solución típica: O_2 en $x = -1790$ mm, $y = 320$ mm; $r_2 = 360$ mm, $r_3 = 1990$ mm

10-9 $r_1 = 12$ pulg, $r_2 = 9$ pulg, $r_3 = 6$ pulg, $r_4 = 9$ pulg; el asiento se cierra en posición abierta o de volquete que es un triángulo 3-4-5

10-13 y **10-23** $r_2/r_1 = -3.352$, $r_3/r_1 = 0.845$, $r_4/r_1 = 3.485$

10-15 y **10-25** $r_2/r_1 = -2.660$, $r_3/r_1 = 7.430$, $r_4/r_1 = 8.685$

10-17 y **10-27** $r_2/r_1 = -0.385$, $r_3/r_1 = 1.030$, $r_4/r_1 = 0.384$

10-19 y **10-29** $r_2/r_1 = 2.523$, $r_3/r_1 = 3.329$, $r_4/r_1 = -0.556$

10-21 y **10-31** $r_2/r_1 = -1.606$, $r_3/r_1 = 0.925$, $r_4/r_1 = 1.107$

11-1 $m = 2$, incluyendo una libertad no esencial

11-3 $\omega_2 = -2.58\hat{\mathbf{j}}$ rad/s; $\omega_3 = 1.16\hat{\mathbf{i}} + 0.67\hat{\mathbf{k}}$ rad/s; $\mathbf{V}_B = -96\hat{\mathbf{i}} - 50\hat{\mathbf{j}} + 168\hat{\mathbf{k}}$ mm/s

11-5 $\mathbf{R}_{BA} = 5\hat{\mathbf{i}} + 9\hat{\mathbf{j}} - 7\hat{\mathbf{k}}$ pulg; $\mathbf{V}_A = 180\hat{\mathbf{j}}$ pulg/s; $\mathbf{V}_B = -231\hat{\mathbf{k}}$ pulg/s; $\boldsymbol{\omega}_3 = -21.56\hat{\mathbf{i}} + 7.45\hat{\mathbf{j}} - 5.8\hat{\mathbf{k}}$ rad/s; $\omega_4 = -25.7\hat{\mathbf{i}}$ rad/s; $\mathbf{A}_A = 10\,800\hat{\mathbf{i}}$ pulg/s^2; $\mathbf{A}_B = -5950\hat{\mathbf{i}} - 3087\hat{\mathbf{k}}$ pulg/s^2; $\boldsymbol{\alpha}_3 = -447\hat{\mathbf{i}} + 588\hat{\mathbf{j}} + 436\hat{\mathbf{k}}$ rad/s^2; $\alpha_4 = -343\hat{\mathbf{i}}$ rad/s^2

11-7 $\Delta\theta_4 = 48°$, razón de tiempo = 1

11-9 $\Delta\theta_4 = 71°$, razón de tiempo = 1.22

11-11 $\mathbf{V}_A = -2.34\hat{\mathbf{i}} - 1.35\hat{\mathbf{j}}$ m/s; $\mathbf{V}_B = 0.12\hat{\mathbf{j}} + 0.23\hat{\mathbf{k}}$ m/s; $\boldsymbol{\omega}_3 = 10.4\hat{\mathbf{i}} - 10.7\hat{\mathbf{j}} + 3.3\hat{\mathbf{k}}$ rad/s; $\omega_4 = 19.5\hat{\mathbf{i}}$ rad/s; $\mathbf{A}_A = 48.6\hat{\mathbf{i}} - 84.2\hat{\mathbf{j}}$ m/s^2; $\mathbf{A}_B = -50\hat{\mathbf{j}} + 122\hat{\mathbf{k}}$ m/s^2; $\boldsymbol{\alpha}_3 = 175\hat{\mathbf{i}} - 111\hat{\mathbf{j}} + 101\hat{\mathbf{k}}$ rad/s^2; $\alpha_4 = 328\hat{\mathbf{i}}$ rad/s^2

11-13 $\mathbf{V}_A = 12\hat{\mathbf{i}} + 20.8\hat{\mathbf{j}} + 41.6\hat{\mathbf{k}}$ pulg/s; $\mathbf{V}_B = 13.8\hat{\mathbf{i}}$ pulg/s; $\boldsymbol{\omega}_3 = 2.31\hat{\mathbf{i}} + 6.66\hat{\mathbf{j}} - 3.23\hat{\mathbf{k}}$ rad/s

11-15 *a*) $m = 1$; *b*) $\Delta\theta_4 = 90°$ $\Delta R_B = 8$ pulg; *c*) $\mathbf{R}_B = 8.32\hat{\mathbf{j}}$ pulg; $\mathbf{R}_{BA} = 4\hat{\mathbf{i}} + 10.9\hat{\mathbf{j}} - 3.06\hat{\mathbf{k}}$ pulg

12-3 $P = 1460$ N

12-5 $P = 442$ N

12-7 $M_{12} = -276$ lb · pulg; $\mathbf{F}_{34} = 338\angle 26.8°$ lb; $\mathbf{F}_{14} = 231\angle 242.1°$ lb

12-9 $\mathbf{F}_{14} = 318\angle -61.7°$ lb; $\mathbf{F}_{34} = 190\angle 88.4°$ lb; $\mathbf{F}_{23} = 228\angle 56.6°$ lb; $M_{12} = -761$ lb · pulg

12-11 Fuerzas en el eje (árbol): *a*) $\mathbf{F}_{13} = 2520\angle 0°$ lb; *b*) $\mathbf{F}_{13} = 1049\angle 225°$ lb; *c*) $\mathbf{F}_{13} = 2250\angle -45°$ lb

12-13 $\mathbf{F}_C = 216\angle 189°$ lb; $\mathbf{F}_D = 350\angle 163°$ lb

12-16 *a*) F_A(radial) = 570 lb; F_A(empuje) = 851b

12-17 $\mathbf{F}_E = 163\hat{\mathbf{i}} - 192\hat{\mathbf{j}} + 355\hat{\mathbf{k}}$ lb; $\mathbf{F}_F = 110\hat{\mathbf{j}} + 145\hat{\mathbf{k}}$ lb

12-19 $\mathbf{F}_{23} = 306\angle 230.4°$ kN; $\mathbf{F}_{34} = 387\angle 239.7°$ kN; $\mathbf{F}_{14} = 387\angle 59.7°$ kN

12-21 $M_{12} = 437$ lb · pulg

13-1 $I_O = 0.0309$ lb · s^2 · pulg

13-3 $\mathbf{T}_2 = -190\hat{\mathbf{k}}$ lb · pulg

13-5 $\mathbf{F}_{14} = 300\angle -90°$ lb; $\mathbf{F}_{34} = 755\angle 156.6°$ lb; $\mathbf{F}_{32} = 1535\angle 7.95°$ lb; $\mathbf{T}_2 = 2780\hat{\mathbf{k}}$ lb · pulg

13-7 $\mathbf{T}_2 = -2950\hat{\mathbf{k}}$ N · m; $\mathbf{F}_{14} = 11.7\angle 205°$ kN; $\mathbf{F}_{34} = 11.0\angle 14.8°$ kN; $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{23} = 9.98\angle -20°$ kN

13-9 $\mathbf{T}_2 = 674\hat{\mathbf{k}}$ N · m; $\mathbf{F}_{14} = 6.98\angle -84.9°$ kN; $\mathbf{F}_{34} = 4.37\angle 196°$ kN; $\mathbf{F}_{23} = 2.59\angle 230°$ kN

13-11 $\mathbf{T}_2 = 4400\hat{\mathbf{k}}$ N · m; $\mathbf{F}_{14} = 7.57\angle 282.7°$ kN; $\mathbf{F}_{34} = 14.4\angle 56.7°$ kN; $\mathbf{F}_{23} = 20.9\angle 45.4°$ kN

13-13 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 200$ rad/s^2 mmr; $\mathbf{T}_2 = 11.1\hat{\mathbf{k}}$ N · m; $\mathbf{F}_{14} = 689\angle 47.2°$ N

13-15 $\mathbf{T}_2 = -241\hat{\mathbf{k}}$ N · m; $F_{14}^{y} = 646$ N; $\mathbf{F}_{23} = 3190\hat{\mathbf{i}} - 705\hat{\mathbf{j}}$ N

13-17 $\mathbf{F}_{14} = 546\hat{\mathbf{i}} + 397\hat{\mathbf{j}}$ N; $\mathbf{F}_{23} = -372\hat{\mathbf{i}} - 476\hat{\mathbf{j}}$ N

13-19 $\mathbf{T}_2 = 9750\hat{\mathbf{k}}$ N · m; $F_{14}^{y} = 22.1$ kN; $\mathbf{F}_{23} = 8.42\hat{\mathbf{i}} + 47\hat{\mathbf{j}}$ kN

13-21 $\mathbf{T}_4 = +22.4\hat{\mathbf{k}}$ lb · pulg; $\mathbf{F}_{23} = 6.80/\underline{240°}$ lb; $\mathbf{F}_{43} = 45.6/\underline{78.2°}$ lb

13-23 En $\theta_2 = 0°$, $\theta_3 = 120°$, $\theta_4 = 141.8°$, $\omega_3 = 6.67$ rad/s mmr, $\omega_4 = 6.67$ rad/s mmr, $\alpha_3 = 141$ rad/s^2 mmr, $\alpha_4 = 64.1$ rad/s^2 mmr, $\mathbf{T}_2 = 7468\hat{\mathbf{k}}$ lb·pies, $\mathbf{F}_{21} = 6734/\underline{-56°}$ lb, y $\mathbf{F}_{41} = 7883/\underline{142.8°}$ lb

14-1 En $X = 30\%$, $p_e = 251$ lb/pulg^2, $p_c = 50$ lb/pulg^2

14-3 Ver figura

14-5 $F_{41} = -230$ lb, $F_{34} = 935$ lb, $\mathbf{F}_{32} = 941/\underline{164°}$ lb, $T_{21} = 800$ lb · pulg

14-9 $F_{41} = -0.52$ kN, $\mathbf{F}_{34} = 3.19/\underline{189°}$ kN, $\mathbf{F}_{32} = 10.2/\underline{-38.4°}$ kN, $T_{21} = 191$ N · m

14-11 En $\omega t = 60°$, $X = 28.4\%$, $P = 2600$ lb, $\ddot{x} = -33.6(10)^3$ pulg/s^2, $F_{41} = -392$ lb, $\mathbf{F}_{34} = 2520/\underline{-8.9°}$ lb, $\mathbf{F}_{32} = 2460/\underline{168°}$ lb, $T_{21} = 3040$ lb · pulg

15-1 $\mathbf{F}_A = 64.7/\underline{76.1°}$ kN, $\mathbf{F}_B = 16.2/\underline{76.1°}$ kN, $m_C = 1.64$ kg

15-3 $\mathbf{F}_A = 8.06/\underline{-14.4°}$ lb, $\mathbf{F}_B = 2.68/\underline{165.5°}$ lb, $W_C = 2.63$ lb en $\theta_C = -14.4°$

15-5 $\mathbf{F}_A = 13.15/\underline{90°}$ kN, $\mathbf{F}_B = 0$

15-7 $m_L\mathbf{R}_L = 5.98/\underline{-16.5°}$ oz · pulg, $m_R\mathbf{R}_R = 7.33/\underline{136.8°}$ oz · pulg

15-9 Suprímase $m_l\mathbf{R}_L = 782.1/\underline{180.4°}$ mg · m y $m_R\mathbf{R}_R = 236.8/\underline{301.2°}$ mg · m

15-11 Véase la sección 15-8 para obtener las respuestas

16-1 119°

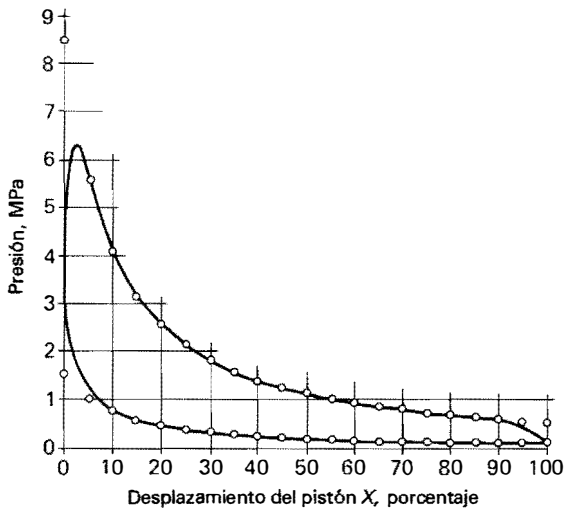
16-3 189 rpm

16-5 El salto principiaría en $\theta = 75°$ cuando $\ddot{y}$ se hace negativa; $n = 242$ rpm

16-7 21.8 rad/s

16-9 En $\theta = 120°$, $F_{32}^y = -572$ N, $T = 4.04$ N · m; en $\theta = 225°$, $F_{32}^y = -608$ N, $T = -3.87$ N · m

16-11 $\theta = 59.99°$, $F_{32}^y = -278$ lb, $T = 332$ lb · pulg; $\theta = 255°$, $F_{32}^y = -139$ lb, $T = -104$ lb · pulg



Respuesta del problema 14-3

APÉNDICE

Tabla 1 Prefijos estándar del SI †,‡

Nombre	Símbolo	Factor
exa	E	$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$
peta	P	$1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$
tera	T	$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$
giga	G	$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$
mega	M	$1\,000\,000 = 10^{6}$
kilo	k	$1\,000 = 10^{3}$
hecto§	h	$100 = 10^{2}$
deka§	da	$10 = 10^{1}$
deci§	d	$0.1 = 10^{-1}$
centi§	c	$0.01 = 10^{-2}$
mili	m	$0.001 = 10^{-3}$
micro	μ	$0.000\,001 = 10^{-6}$
nano	n	$0.000\,000\,001 = 10^{-9}$
pico	p	$0.000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$
femto	f	$0.000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$
ato	a	$0.000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$

§ No se recomienda pero se encuentra a veces.

† De ser posible, úsense prefijos de múltiplos y submúltiplos en pasos de 1000. Por ejemplo, especifíquense las longitudes en milímetros, metros o kilómetros. En una unidad de combinación, utilícense prefijos sólo en el numerador. Por ejemplo, úsense meganewton por metro cuadrado (MN/m^2), pero no newton por centímetro cuadrado (N/cm^2) tampoco newton por milímetro cuadrado (N/mm^2).

‡ En el SI se prefiere emplear espacios, en lugar de comas, para agrupar los números, con el fin de evitar confusiones con la práctica de algunos países europeos de usar comas en lugar de puntos decimales.

Tabla 2 Conversión de unidades usuales en Estados Unidos a unidades del SI

Para convertir de	a	Multiplíquese por Exacto†	Común
Caballo de potencia (hp)	watt (W)	7.456 999 E + 02	746
Libra fuerza (lb)	newton (N)	4.448 222 E + 00	4.45
Libra masa (lbm)	kilogramo (kg)	4.535 924 E − 01	0.454
Libra·pie (lb·pie)	newton-metro (N·m)	1.355 818 E + 00	1.35
	joule (J)	1.355 818 E + 00	0.113
Libra-pie/segundo (lb·pie/s)	watt 8W)	1.355 818 E + 00	1.35
Libra-pulgada (lb·pulg)	newton-metro (N·m)	1.128 182 E − 01	1.35
	joule (J)	1.128 182 E − 01	0.113
Libra-pulgada/segundo (lb·pulg/s)	watt (W)	1.128 182 E − 01	0.113
Libra/pie^2 (lb/pie^2)	pascal (Pa)	4.788 026 E + 01	47.9
Libra/pulgada^2 (lb/pulg^2)	pascal (Pa)	6.894 757 E + 03	6890
Milla, terrestre E.U. (mi)	metro (m)	1.609 344 E + 03*	1610
Pie (pie)	metro (m)	3.048 000 E − 01*	0.305
Poundal (lb·m·pie/s^2)	newton (N)	1.382 550 E − 01	0.138
Pulgada (pulg)	metro (m)	2.540 000 E − 02*	0.025 4
Revoluciones/minuto (rpm)	radián/segundo (rad/s)	1.047 198 E − 01	0.105
Slug	kilogramo (kg)	1.459 390 E + 01	14.6
Tonelada corta (2000 lbm)	kilogramo (kg)	9.071 847 E + 02	907

† Un asterisco indica que el factor de conversión es exacto.

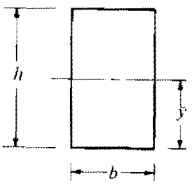
Tabla 3 Conversión de unidades del SI a unidades usuales en Estados Unidos

Para convertir de	a	Multiplíquese por Exacto	Común
Joule (J)	libra-pie (lb·pie)	7.375 620 E − 01	0.737
Joule (J)	libra-pulgada (lb·pulg)	8.850 744 E + 00	8.85
Kilogramo (kg)	libra masa (lbm)	2.204 622 E + 00	2.20
	Slug	6.852 178 E − 02	0.0685
	tonelada corta (2000 lbm)	1.102 311 E − 03	0.001 10
Metro (m)	pie (pie)	3.280 840 E + 00	3.28
	pulgada (pulg)	3.937 008 E + 01	39.4
	milla (mi)	6.213 712 E + 02	621
Newton (N)	libra (lb)	2.248 089 E − 01	0.225
	poundal (lb·pie/s^2)	7.233 012 E + 00	7.23
Newton-metro (N·m)	libra-pie (lb·pie)	7.375 620 E − 01	0.737
	libra-pulgada (lb·pulg)	8.850 744 E + 00	8.85
Newton-metro/segundo (N·m/s)	caballo de potencia (hp)	1.341 022 E − 03	0.001 34
Pascal (Pa)	libra/pie^2 (lb/pie^2)	2.088 543 E − 02	0.0209
	libra-pulgada^2(lb/pulg^2)	1.450 370 E − 04	0.000 145
Radian/segundo (rad/s)	revoluciones por minuto (rpm)	9.549 297 E + 00	9.55
Watt (W)	caballo de potencia (hp)	1.341 022 E − 03	0.001 34
	libra-pie/segundo (lb·pie/s)	7.375 620 E − 01	0.737
	libra-pulgada/segundo (lb·pulg/s)	8.850 744 E + 00	8.85

Tabla 4 Propiedades de las áreas

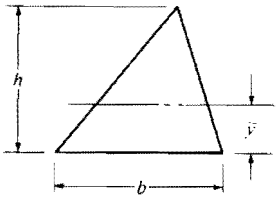
A = área
I = momento de inercia del área
J = momento polar de inercia del área
k = radio de giro
$\bar{y}$ = distancia centroidal

Rectángulo



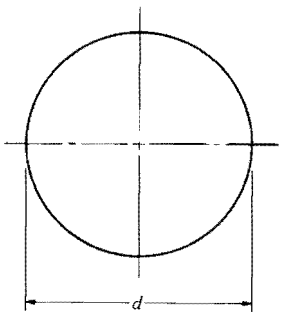
$$A = bh \qquad k = 0.289h$$
$$I = \frac{bh^3}{12} \qquad y = \frac{h}{2}$$

Triángulo



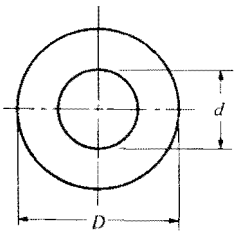
$$A = \frac{bh}{2} \qquad k = 0.236h$$
$$I = \frac{bh^3}{36} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

Círculo



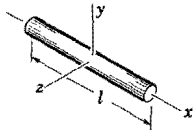
$$A = \frac{\pi d^2}{4} \qquad k = \frac{d}{4}$$
$$I = \frac{\pi d^4}{64} \qquad \bar{y} = \frac{d}{2}$$
$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

Círculo perforado



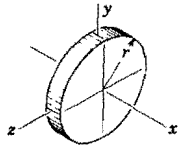
$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \qquad k = \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + d^2}$$
$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \qquad \bar{y} = \frac{D}{2}$$
$$J = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

Tabla 5 Momentos de inercia de masa



Varilla

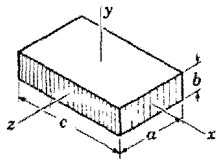
$$i_y = i_z = \frac{ml^2}{12}$$



Disco redondo

$$i_x = \frac{mr^2}{2}$$

$$i_y = i_z = \frac{mr^2}{4}$$

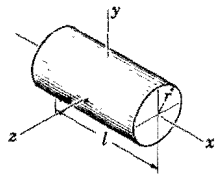


Prisma rectangular

$$i_x = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$$

$$i_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}$$

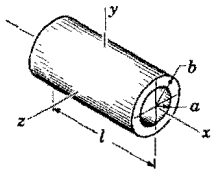
$$i_z = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$$



Cilindro

$$i_x = \frac{mr^2}{2}$$

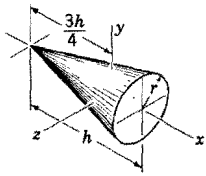
$$i_y = i_z = \frac{m(3r^2 + l^2)}{12}$$



Cilindro hueco

$$i_x = \frac{m(a^2 + b^2)}{2}$$

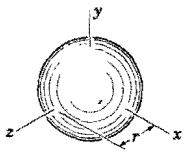
$$i_y = i_z = \frac{m(3a^2 + 3b^2 + l^2)}{12}$$



Cono

$$i_x = \frac{3mr^2}{10}$$

$$i_y = i_z = \frac{m(12r^2 + 3h^2)}{80}$$



Esfera

$$i_x = i_y = i_z = \frac{2mr^2}{5}$$

Tabla 6 Funciones de involuta

Grados	*Inv* ϕ	Grados	*Inv* ϕ	Grados	*Inv* ϕ	Grados	*Inv* ϕ
00.0	.000000						
00.1	.000000	03.1	.000053	06.1	.000404	09.1	.001349
00.2	.000000	03.2	.000058	06.2	.000424	09.2	.001394
00.3	.000000	03.3	.000064	06.3	.000445	09.3	.001440
00.4	.000000	03.4	.000070	06.4	.000467	09.4	.001488
00.5	.000000	03.5	.000076	06.5	.000489	09.5	.001536
00.6	.000000	03.6	.000083	06.6	.000512	09.6	.001586
00.7	.000000	03.7	.000090	06.7	.000536	09.7	.001636
00.8	.000000	03.8	.000097	06.8	.000560	09.8	.001688
00.9	.000001	03.9	.000105	06.9	.000586	09.9	.001740
01.0	.000002	04.0	.000114	07.0	.000612	10.0	.001794
01.1	.000002	04.1	.000122	07.1	.000638	10.1	.001849
01.2	.000003	04.2	.000132	07.2	.000666	10.2	.001905
01.3	.000004	04.3	.000141	07.3	.000694	10.3	.001962
01.4	.000005	04.4	.000151	07.4	.000723	10.4	.002020
01.5	.000006	04.5	.000162	07.5	.000753	10.5	.002079
01.6	.000007	04.6	.000173	07.6	.000783	10.6	.002140
01.7	.000009	04.7	.000184	07.7	.000815	10.7	.002202
01.8	.000010	04.8	.000197	07.8	.000847	10.8	.002265
01.9	.000012	04.9	.000209	07.9	.000880	10.9	.002329
02.0	.000014	05.0	.000222	08.0	.000914	11.0	.002394
02.1	.000016	05.1	.000236	08.1	.000949	11.1	.002461
02.2	.000019	05.2	.000250	08.2	.000985	11.2	.002528
02.3	.000022	05.3	.000265	08.3	.001022	11.3	.002598
02.4	.000025	05.4	.000280	08.4	.001059	11.4	.002668
02.5	.000028	05.5	.000296	08.5	.001098	11.5	.002739
02.6	.000031	05.6	.000312	08.6	.001137	11.6	.002812
02.7	.000035	05.7	.000329	08.7	.001178	11.7	.002894
02.8	.000039	05.8	.000347	08.8	.001219	11.8	.002962
02.9	.000043	05.9	.000366	08.9	.001262	11.9	.003039
03.0	.000048	06.0	.000384	09.0	.001305	12.0	.003117
12.1	.003197	16.3	.007932	20.6	.016337	24.8	.029223
12.2	.003277	16.4	.008082	20.7	.016585	24.9	.029598
12.3	.003360	16.5	.008234	20.8	.016836	25.0	.029975
12.4	.003443			20.9	.017089		
12.5	.003529	16.6	.008388	21.0	.017345	25.1	.030357
		16.7	.008544			25.2	.030741
12.6	.003615	16.8	.008702	21.1	.017603	25.3	.031130
12.7	.003712	16.9	.008863	21.2	.017865	25.4	.031521
12.8	.003792	17.0	.009025	21.3	.018129	25.5	.031917
12.9	.003883			21.4	.018395		
13.0	.003975	17.1	.009189	21.5	.018665	25.6	.032315
		17.2	.009355			25.7	.032718

Tabla 6 (continuación)

Grados	*Inv φ*	Grados	*Inv φ*	Grados	*Inv φ*	Grados	*Inv φ*
13.1	.004069	17.3	.009523	21.6	.018937	25.8	.033124
13.2	.004164	17.4	.009694	21.7	.019212	25.9	.033534
13.3	.004261	17.5	.009866	21.8	.019490	26.0	.033947
13.4	.004359			21.9	.019770		
13.5	.004459	17.6	.010041	22.0	.020054	26.1	.034364
		17.7	.010217			26.2	.034785
13.6	.004561	17.8	.010396	22.1	.020340	26.3	.035209
13.7	.004664	17.9	.010577	22.2	.020630	26.4	.035637
13.8	.004768	18.0	.010760	22.3	.020921	26.5	.036069
13.9	.004874			22.4	.021216		
14.0	.004982	18.1	.010946	22.5	.021514	26.6	.036505
		18.2	.011133			26.7	.036945
14.1	.005091	18.3	.011323	22.6	.021815	26.8	.037388
14.2	.005202	18.4	.011515	22.7	.022119	26.9	.037835
14.3	.005315	18.5	.011709	22.8	.022426	27.0	.038287
14.4	.005429			22.9	.022736		
14.5	.005545	18.6	.011906	23.0	.023049	27.1	.038696
		18.7	.012105			27.2	.039201
14.6	.005662	18.8	.012306	23.1	.023365	27.3	.039664
14.7	.005782	18.9	.012509	23.2	.023684	27.4	.040131
14.8	.005903	19.0	.012715	23.3	.024006	27.5	.040602
14.9	.006025			23.4	.024332		
15.0	.006150	19.1	.012923	23.5	.024660	27.6	.041076
		19.2	.013134			27.7	.041556
15.1	.006276	19.3	.013346	23.6	.024992	27.8	.042039
15.2	.006404	19.4	.013562	23.7	.025326	27.9	.042526
15.3	.006534	19.5	.013779	23.8	.025664	28.0	.043017
15.4	.006665			23.9	.026005		
15.5	.006799	19.6	.013999	24.0	.026350	28.1	.043513
		19.7	.014222			28.2	.044012
15.6	.006934	19.8	.014447			28.3	.044516
15.7	.007071	19.9	.014674	24.1	.026697	28.4	.045024
15.8	.007209	20.0	.014904	24.2	.027048	28.5	.045537
15.9	.007350			24.3	.027402		
16.0	.007493	20.1	.015137	24.4	.027760	28.6	.046054
		20.2	.015372	24.5	.028121	28.7	.046575
16.1	.007637	20.3	.015609			28.8	.047100
16.2	.007784	20.4	.015850	24.6	.028485	28.9	.047630
		20.5	.016092	24.7	.028852	29.0	.048164
29.1	.048702	33.1	.074188	37.1	.108777	41.1	.155025
29.2	.049245	33.2	.074932	37.2	.109779	41.2	.156358
29.3	.049792	33.3	.075683	37.3	.110788	41.3	.157700
29.4	.050344	33.4	.076439	37.4	.111805	41.4	.159052
29.5	.050901	33.5	.077200	73.5	.112828	41.5	.160414
29.6	.051462	33.6	.077968	37.6	.113860	41.6	.161785
29.7	.052027	33.7	.078741	37.7	.114899	41.7	.163165
29.8	.052597	33.8	.079520	37.8	.115945	41.8	.164556
29.9	.053172	33.9	080305	37.9	.116999	41.9	.165956

Tabla 6 (continuación)

Grados	*Inv* ϕ	Grados	*Inv* ϕ	Grados	*Inv* ϕ	Grados	*Inv* ϕ
30.0	053751	34.0	.081097	38.0	.118060	42.0	.167366
30.1	.054336	34.1	.081974	38.1	.119130	42.1	.168786
30.2	.054924	34.2	.082697	38.2	.120207	42.2	.170216
30.3	.055519	34.3	.083506	38.3	.121291	42.3	.171656
30.4	.056116	34.4	.084321	38.4	.122384	42.4	.173106
30.5	.056720	34.5	.085142	38.5	.123484	42.5	.174566
30.6	.057267	34.6	.085970	38.6	.124592	42.6	.176037
30.7	.057940	34.7	.086804	38.7	.125709	42.7	.177518
30.8	.058558	34.8	.087644	38.8	.126833	42.8	.179009
30.9	.059181	34.9	.088490	38.9	.127965	42.9	.180511
31.0	.059809	35.0	.089342	39.0	.129106	43.0	.182023
31.1	.060441	35.1	.090201	39.1	.130254	43.1	.183546
31.2	.061079	35.2	.091066	39.2	.131411	43.2	.185080
31.3	.061721	35.3	.091938	39.3	.132576	43.3	.186625
31.4	.062369	35.4	.092816	39.4	.133749	43.4	.188180
31.5	.063022	35.5	.093701	39.5	.134931	43.5	.189746
31.6	.063680	35.6	.094592	39.6	.136122	43.6	.191324
31.7	.064343	35.7	.095490	39.7	.137320	43.7	.192912
31.8	.065012	35.8	.096395	39.8	.138528	43.8	.194511
31.9	.065685	35.9	.097306	39.9	.139743	43.9	.196122
32.0	.066364	36.0	.098224	40.0	.140968	44.0	.197744
32.1	.067048	36.1	.099149	40.1	.142201	44.1	.199377
32.2	.067738	36.2	.100080	40.2	.143443	44.2	.201022
32.3	.068432	36.3	.101019	40.3	.144694	44.3	.202678
32.4	.069133	36.4	.101964	40.4	.145954	44.4	.204346
32.5	.069838	36 5	.102916	40.5	.147222	44.5	.206026
32.6	.070549	36.6	.103875	40.6	.148500	44.6	.207717
32.7	.071266	36.7	.104841	40.7	.149787	44.7	.209420
32.8	.071988	36.8	.105814	40.8	.151082	44.8	.211135
32.9	.072716	36.9	.106795	40.9	.152387	44.9	.212863
33.0	073449	37.0	.107782	41.0	.153702	45.0	.214602

ÍNDICE

Abrams, J. I., 397 *n*
Acción:
  de aproximación, 271-274
  arco de, 274-275
  de los dientes de los engranes, 274-275
Aceleración:
  absoluta, 131-132
  angular, 133
    teorema de la, 400
  componente de contacto por rodadura, 152-153
  componente de la, 134-135
  definición, 130
  del pistón, 497
  promedio, 129-130
  de los seguidores de las levas, 218-219
  segunda, 217-218
Aceleración, análisis de la:
  del eslabonamiento corredera-manivela, 141-142, 156-157
  del eslabonamiento de cuatro barras, 139-140
  gráfico, 136-137
  del mecanismo de contacto directo, 152-153
  de mecanismos espaciales, 491-493
  método de Chace, 158-159
  de sistemas de levas, 153-156
Aceleración aparente:
  ecuación de la, 147
  obtención de la, 144-145
Aceleraciones:
  diferencia de, 134-135
  imagen de, 138-139
  polígonos de, 137
  polo de, 159-160
Aceleraciones, relaciones de:
  del eslabonamiento de cuatro barras, 157-158
  del mecanismo de corredera-manivela, 492-493
Acoplador, 19-20
ADAMS, 201*n*
Adamson, Robert W., xvi
Addendum, 259-260
Adición vectorial, 42-43
Admisión, 483
AGMA (American Gear Manufacturers Association), 248*n*
Álgebra compleja, 51-52
Algoritmo, 180-181
Alvord, H. H., 468*n*, 549*n*
Amortiguadores, 554
Amortiguamiento, razón de, 511-512, 580-581
Amortiguamiento viscoso, 438-439, 511-512
  coeficiente de, 511-512
Amplitud, razón de, 512-513
Análisis:
  armónico, 549-550
  del cuerpo elástico, 411-412, 448
  del cuerpo rígido, 448, 488-489, 554
  de las levas, procedimiento de computadora, 562-563

vectorial, programa, 181-182
Análisis cinemático:
mediante computadora, 472-473
unidades del, 409
Análisis dinámico:
gráfico, 457-458
mediante computadora, 472-473
unidades del, 409
Análisis de las fuerzas:
de los engranes helicoidales, 428
gráfico, 420-421
Análisis de posición:
gráfico, 49-50
de mecanismos espaciales, 390-391
programa, 189
Anchura de la cara:
de los engranes helicoidales, 303-305
mínimo, 242-243
Anchura del diente, 266-268
Ángulo:
de aproximación, 277-278, 280
de avance, 309-312
de espiral, 319-320
de fase, 511-512, 525-526
de giro, 370-371
de hélice, 301-302, 309-312
de paso, 314
Ángulo de presión, 118-119, 215-216, 243-244, 266-268, 560-561
ecuación del, 244-245
máximo, 243-246
normal, 302-303
tabla, 312-314
transversal, 302-303
Ángulo de transmisión, 65, 100-101, 118-119, 349-350
definición de, 18-20
extremos del, 65
óptimo, 351-354
Ángulos:
cuadrantes de los, 185-186
esféricos, 385-386, 403-404
eulerianos, 397-399
signos de los, 50-51
ANSI (American National Standard Institute), 263-264
ANSYS, 200-201
Aproximación, arco de, 274-275
Armónicas, 536-537
Aronhold, 105*n*
Aronhold-Kennedy, teorema de, 105*n*
Arranque, condiciones de, 565-566
Articulación, tipo de, 7-8, 419
balanceada, 424
Cardán, 385-386, 400-401
deslizante, 8-9
esférica, 7-8
de pasador, 7-8
de rótula, 9-10, 387-388
universal, 401, 404-405
relaciones de velocidad, 404-405
(*Véase también* Pares)
ATAN2, función, 177*n*
Atoramiento, 18-20
Autoalineación, 13-14
Avance, 32
Axodas, 119-120
Axoides (*véase* Axodas)

Balanceo:
definición, 509
del rotor, procedimiento vectorial, 519-520
en el campo, 529-530
general, 542-543
mecanismos de, 542-543

Balancín, 576-577
Ball, R. S., 102*n*
Ball, punto de, 173*n*
Barra nodal, 526-528
Base, cilindro de, 261-262
BASIC, 190-191
Bastidor suspendido (*véase* Cuna pivotada)
Beer, F. P., 578*n*
Bennett, mecanismo de, 385-387
Berkof, R.S., 543*n*
Beyer, Rudolf A., 343*n*
Biela, 21, 23
articulada, 125-126, 481
maestra, 481
Bloch, S. Sch., 367
Bobillier, teorema de, 167
Bomba de doble pistón, 129
Brazo, del par, 415-416
Bricard, eslabonamiento de, 387*n*
Brodell, R. Joe, 349*n*
Brown, Julienne V., xvi

Caballos de potencia, características, 487
Cadena:
cerrada, 6-7
cinemática, clases de, 6-7
Caja de cambios (*véase* Cambiador de velocidades)

Cambiador de velocidades, 339-340
Cara, engrane de, 319-320
Carrera de trabajo, 483
Casos vectoriales, 187
  lista de, 45-46, 388-389
Cayley, A., 365-366
Cayley, diagrama de, 365-366
Celdas solares, 586-587
Centro:
  de masa, localización del, 449-450
  de percusión, 464-465, 494-495
  del rodillo, 129
Centro instantáneo:
  de aceleración, 159-160
  de curvatura, 241-242
  definición, 102-103
  de sistemas de levas, 560-561
Centroda, 103-104, 161-162
  móvil, 120-121, 161-162
Centrodas fijas, 119-120, 120-121, 161-162
Centroide:
  de un área, 450-451
  definición, 448
Ciclo:
  Diesel, 481
  estándar del aire, 488-489
Cicloide, definición, 152-153
Cierre del circuito, 40-41
Cigüeñal de dos codos, 538-539
Cilindro de base, 261-262
Cinemática, definición de, 3-5
Cinética, definición de, 3-4
Circuito:
  cierre del, 40-41
  puente, 582-584
Círculo:
  de base, de las levas, 210-212, 266-268
  de excentricidad, 212-213
  de inflexión, 162-165, 169, 170-171
  máximo, 403-404
  de paso, 258-259
  primario, 210-212, 238-239, 243-244
Compensación mecánica, 523-524, 528-529
Compresión, 483, 489-491
Concurrencia, punto de, 421-423
Cono posterior, 317
Conservación, ley de la, 577-578
Contacto:
  de los dientes de engranes, 271-275
  de los dientes de engranes helicoidales, 301-302
  directo, 93-94, 107
  por rodadura, 95, 107, 121, 151
Contrapesos, 532-533
Convención de los signos, para los trenes de engranes, 326-327
Coordenadas:
  cartesianas, 30
  cilíndricas, 30
  complejas, 51-52
  esféricas, 30
  imaginarias, 51-52
  reales, 51-52
Coriolis, componente de, 147
Corona dentada, 319-320
Corona dentada frontal (*véase* Engrane de cara)
Corrección, planos de, 519
Cortador de cremallera, 285-286
Cortadoras-cepilladoras, 297-298
Cortadores, 270-271
Coulomb, fricción de, 437-438
Cowie, Alexander, 343*n*
Cramer, regla de, 99-100
Cremallera, 269-271
  de corona, 321
Cruz de Malta, 40-41, 42, 74
Cuadrilátero articulado (*véase* Eslabonamiento de paralelogramo)
Cuaterniones, 387-388
Cuerpo:
  deformable, 411-412
  guía del, 344-345
  libre, 417-418
  rígido, 411-412
Cuna pivotada, método de la, 523-524
Curva:
  del acoplador, 21-23
  de paso, de las levas, 210, 212
  del punto en circulación, 171-172
  involuta, 263
  sesgada, 33-34
Curvatura:
  centro de, 161-163
  estacionaria, 171-173

Chace, Milton A., 45, 55, 388-385
Chace, procedimiento de, 60-61, 187, 189
  para el análisis de la aceleración, 158-159
Chebychev:
  eslabonamiento de, 23-24
  espaciamiento de, 345-347
Chen, F. Y., 254

D'Alembert, principio de, 456
Dallas, D. B., 438*n*

Datos angulares, unidades de, 183-184
Dedendum, 259-260
Defecto:
  de orden, 344-345
  de rama, 344-345
Denavit, Jacques, 118*n*, 161*n*, 173*n*, 343*n*, 364, 387-388
Derivadas cinemáticas, 217-218
Desequilibrio:
  análisis del, 517-519
  estático, 510
  unidades del, 521-524
Desplazamiento:
  angular, 75
  definición, 66-67
  volumen de, 490-491
Desplazamiento aparente, 69-70, 88-89
  ecuación del, 69-70
Detector de errores, 581-582
Dhande, Sanjay, G., xv
Diagrama de desplazamientos, 207-208
  imagen del, 585-586
Diagramas:
  de bloques (*véase* Notación de bloques)
  de cuerpo libre, 417-418
  esquemáticos, 6-7
Dientes, juego entre, 259-260, 280-281
Diferencia:
  de desplazamientos, 66-67, 77
  de posición, 34-35
Diferencial automotriz, 337-338
Dinámica, definición, 3-4
Discontinuidades, 563-564
Diseño, definición de, 2
División, entre números complejos, 52-53
DRAM, 200-201
Dudley, Darle W., 308*n*
Duong, L.T., 198*n*

Ecuación:
  de los caballos de potencia, 427-428, 488-489
  de cierre del circuito, casos de la, 51-52, 388-389
  de la diferencia de velocidades, 80-81
  vectorial, 43-44
  vectorial del tetraedro, 388-389
Eficiencia mecánica, 489-490
Eje:
  de colineación, 115-116, 168
  paralelo, fórmula del, 452-453
  de tornillo, instantáneo, 101-102
Eje de rotación:
  desplazamiento del, 77
  localización del, 77
Ejes:
  fijos al cuerpo, 395-397
  principales, 452-453
Elemento:
  de cuatro fuerzas, 426-427
  de dos fuerzas, 418-420
  de tres fuerzas, 418-420
Elevación, 207-208
Elipse, ecuación de la, 285*n*
Empuje, del engranaje helicoidal, 308
Encendido, orden de, 481
Energía cinética, 573-574
Engrane, tipo de:
  anular, 269-271, 337-338
  aro dentado, 337-338
  de cara, 319-320
  corona, 319-320
  elíptico, 121-123
  equivalente, 316, 318
  epicíclico, 329-330 (*véase después* planetario)
  de espina de pescado, 305-306
  de hélice doble, 301-302
  hipoidal, 321-322
  interno, 270-271
  loco, 326-327
  planetario, 329-330
  sol, 329-330
  Zerol, 321-322
Engranes:
  cicloidales, 296
  espirales, 321
  helicoidales, componentes de las fuerzas, 428
  trazado gráfico, 266-267
Engranes cónicos:
  fuerzas sobre los, 432-433
  nomenclatura, 318-319
Engranes helicoidales cruzados, 300, 307-308
  diámetro de paso de los, 307-308
Envolvente (*véase* Involuta)
Epicicloide, 294-295
Equilibrado (*véase* Balanceo)
Equilibrador, 523-524
Equilibrio estático, 416-417
Errores:
  detector de, 581-582
  estructurales, 345-346
Escape, 483, 489-490
Eslabón:
  binario, 6-7
  definición de, 5-6
  función del, 8-9
  rígido, hipótesis del, 39

Eslabonamiento:
corredera-manivela, 16-17, 47
espacial, 405-407
oscilante, 407-408
cruzado, 185-186, 371-372
definición, 10-11
de barras cruzadas, 123-124
de Bricard, 387-388
de cursor oscilante, 407-408
de Chebychev, 23-24
de doble manivela, 18-20
cruzado, 121-123
de seis barras, 547-548
de Watt, 23-24
esférico, 10-11
paralelogramo, 15-16, 123-124
planar, 10-11, 190-191
RGGR, 387-388
tipos de: afín, 21, 23, 364
Eslabonamiento de cuatro barras:
análisis del, 60-61, 63-64
esférico, 385-386
espacial, 383-384
inversiones del, 18
programa de computadora, 184-185
relaciones de velocidad angular, 99-100
Eslabonamientos planos, programa, 190-191
Espín, eje del, 576-577, 578-579
Estática, definición de, 3-4
Estructura:
definición de, 5-6, 14-15
estáticamente indeterminadas, 14-15
Euler:
ecuación de, 51-52
teorema de, 67-68
Euler, L., 3-4
Euler-Savary, ecuación de, 163-164
Eventos, de los movimientos de las levas, 207-208
Excentricidad, 512-513, 555-556
en los sistemas de levas, 243-244
Expansión, 482, 489-490
Exponente politrópico, 488-489

Factor:
de amortiguamiento, 438-439
de gráfica, 490-491
Fagerstrom, W.B., 529-530
Fase, del movimiento, 6-7
Ferguson, paradoja de, 336-337
Fink, N., 24-25
Fisher, F.E., 468*n*, 584-586
Flotación, del seguidor de la leva, 557-558
Fluctuación de la velocidad, coeficiente de, 574-575
FORTRAN, 190-191
Fourier, series de, 536-537
Frecuencia:
circular, 511-512, 565-566
natural, 511-512
Frenaje de regeneración, 571
Fresado, 271-274
Freudenstein, Ferdinand, xvi, 115-116, 343*n* 345-346, 368-369, 380*n*, 387*n*
Fricción:
ángulo de, 437-438
de deslizamiento, 437-438
estática, 437-438
fuerzas de, 437-438
Fuerza:
definición de, 410
medición de la, 582-584
en el cigüeñal, 502-503
en el muñón, 502-503
en el pasador de articulación, 493-494
en la pared del cilindro, 499-500
sobre el pasador del pistón, 493-494
transmitida, 427-428
Fuerza de los gases, 492-493
análisis mediante computadora, 504-505
Fuerzas:
aplicadas, 414-415
características de las, 414-415
concurrentes, 420-421
de contacto, 556-557
de restricción, 414-415
de sacudimiento, 471-472, 503-504, 532-533
en las levas, 555-556
internas, 417-418
polígono de, 421-423, 517-519
Fuerzas de inercia:
componente primario de las, 534-535
diagrama, 504-505
en los motores, 532-533
primarias, 496-497
secundarias, 498-499
tabulación de las, 537-538
Función:
escalonada de entrada, 581-582
generación de la, 344-345
de involuta, 282-283
del momento de torsión, 572-573

Ganter, M A., 250, 254
Generación de la función, 344-345

Generador de la función, 356-357
eslabonamiento, 380-381
Generador de señales, 524-525
Ginebra, mecanismo de, 40-41, 42
relaciones cinemáticas, 376, 377
Ginebra, rueda de, 42, 374
Giro, radio de, 451-452
Goldberg, mecanismo de, 387-388
Goodman, T. P., 343*n*
Grados de libertad, 13-14
de pares, 8-9
Grashof, ley de, 18
Gravedad, 413-414
Griffith, B. A., 397*n*
Grodzinski, P., 364*n*
Grúa flotante, 445-447
Grübler, criterio de, 16-17
Guenther, Dennis, A., xv

Hain, K., 161*n*, 171*n*, 343*n*, 348*n*, 358*n*
Hall, Allen S., Jr., 24-25, 115-116, 161*n*, 343*n*, 348*n*
Hanson, O., 198*n*
Harrisberger, Lee, 383-384, 387-388
Hartenberg, Richard S., 8-9, 24-25, 161*n*, 172-173, 343, 364, 387*n*
Hartmann, construcción de, 162-163
Hélice, ángulo de, 301-302, 309-310, 311-312
Helicoide de involuta, 301-302
Hinkle, Rolland T., 364
Hipocicloide, 294-295
Hirschborn, J., 25, 343*n*
Holgura, 244, 259-260
claro en los motores, 505-506
Hooke, articulación de, 10-11, 385-386, 400-401
Hrones, J. A., 21*n*
Hrones-Nelson, atlas de, 21, 22, 23
Humpage, engrane de reducción de, 330, 333
Hunt, K. H., 24-25

Imágenes, propiedades de las, 139-140
IMP, 201-202
Impulsor, 5-6
Indicador:
del motor, 488-489
diagrama, 486-488, 488-489
Inercia:
definición, 410
momento de, 451-452
Inflexión, polo de, 162-163, 164-165
Interferencia, 274-275
punto de, 289-290
reducción de la, 276-277
Inversión:
cinemática, 16-17
de matrices, programa, 194-195
para la síntesis, 353-354
Involuta, 260-261
generación de la, 266-268
Iteración, 387-388
numérica, 191-192

Johnston, E. R., Jr., 578*n*
de Jonge, A. E. R., 161*n*
Juego entre dientes, 259-260, 280-281
Junta (*véase* Articulación)

KAM, 200-201
KAPCA, 197-198
Kaufman, R. E., 200-202
Kennedy, A. B. W., 5*n*, 104-105
Kennedy, teorema de, 104-105
KINSYN, 200-201
Kishline, C. R., 198*n*
Kloomok, M., 244*n*
Krause, R., 114-115
Kuenzel, Herbert, 343*n*
Kutzbach, criterio de, 13-14, 382, 385-386, 389-390

Leva:
definición, 204
ecuaciones del perfil, 230
tipo de, 204, 205
conjugada, 206-207
de cuña, 205
de anchura constante, 206-207
de arco circular, 220-221
de cara, 205
de disco, 107, 205, 214-215
de movimiento lineal, 565
de placa, 205, 214-215
de tambor, 205
excéntrica, 555-556
inversa, 206-207
tangente, 220-221
trazado de una, 208-210
Lévai, Z. L., 329-330
Levas:
conjugadas, 206-207
imagen de las características de operación de las, 565, 584-585

Ley:
conmutativa, 75, 76
de la conservación, 577-578
del engranaje, 260-261
de los gases, 488-489
Libertad:
grados de, 8-9
no esencial, 385-386
Libra, signo de, 413*n*
Lichty, L.C., 534*n*
Limado, 270-271
Línea:
de acción, 260-261
de los centros, 109
de presión, 266-268
Linealidad, 99-100
Localización:
de un punto, 29
relativa, 31
Lowen, G. G., 542-543, 544-545
Lozano, R., 198*n*
Lucas, Robert A., xvi
Lugar geométrico, 33-34
Lund, R. A., 187*n*, 198*n*

Maleev, V.L., 534*n*
Malta, cruz de, 40-41, 42, 374
Máquina:
para balancear, 513
definición de, 4-5
Marco de referencia, 6-7
Masa, centro de, 449-450
equivalente, 495-496
Matemáticas complejas, 531-532
Materia, definición, 410
Matrices, 387-388
Matthew, G. K., 221-222
Mecánica:
definición de, 3-4
divisiones de la, 4-5
Mecanismo de corredera-manivela, 16-17, 47
análisis del, 59-60
excéntrico, 182-183
inversiones del, 17-18, 73, 91-92, 96-97
isósceles, 346-347
posiciones límite, 346-347
programa, 182-183
síntesis del, 347-348
trazado gráfico, 199-200
Mecanismo de cuatro barras:
solución mediante computadora, 472-473
Mecanismo de eslabón de empuje, 123-124
Mecanismo espacial, 12-13
análisis gráfico, 394-395
de siete eslabones, 397-399
Mecanismos, 10-11, 383-384
definición de, 6-7
significado, 5-6, 10-11
tipos de: de Bennett, 385-387
compás de barra, 203
corredera-manivela, 16-17, 17-18, 47, 59-60, 73, 91-92, 97-98, 182-183, 199-200, 346-347
de cuatro barras, 472-473
de detención, 372-374
doble corredera, 125-126, 175-176
doble oscilador, 18
esférico, 10-11, 382
eslabón de arrastre, 18, 73, 115-116, 125
espacial, 12-13
espacial de cuatro barras, 383-384
excéntricos, 25-26
de Ginebra, 40-41, 42, 376, 377
de Goldberg, 387-388
leva, 565-566
limadora de manivela, 26-27
de línea recta, 23-24, 73
manivela-oscilador, 18, 347-348, 348-349, 385-386
placa oscilante, 385-386
planares, 10-11, 42-43
de retorno rápido, 25-26
RGGR, 390-391
de Roberts, 23-24
volquete, 20-21
Whitworth, 26-27
yugo escocés, 125-126, 203
Mecanismos de manivela-oscilador, 18
esféricos, 385-386
posiciones límite, 347-348
ventajas de los, 348-349
Medición:
de la velocidad, 585-588
dinámica, 582-584
Medidores de deformaciones, 582-584
Medios movimientos, 222, 229-230
Memorias de computadoras, uso de las, 183-184
Meritt, H. E., 264-265
Método:
de los centros instantáneos, 110
de los cuatro círculos, 160
de la masa imaginaria, 534-536
del plano fase, 531*n*
del rotor virtual de balanceo, 534-536
de superposición, 356-357
vectorial, para el balanceo del rotor, 519-520

M'Ewan, E., 364*n*
Módulo, 259-260
Molian, S., 244*n*
Momento:
de inercia, 451-452
de la cantidad de movimiento, 577-578
de sacudimiento, 471-472, 503-504, 542-543
de torsión del cigüeñal, 503-504
de torsión en el eje de la leva, 557-558
de torsión de inercia, 455-456, 498-499
de un par, 415-416
Momento de torsión del motor:
características, 487
gráfica, 573-574
tabla, 575-576
Motor, 480
ciclos, 482
de cuatro cilindros, 538-539
disposiciones de la manivela, 488-489
de diversos tipos, 540-541, 542-543
de motocicleta, 536-537
especificaciones, 485-486
en línea, 481
de tres cilindros, 481, 540-541
orden de encendido, 481
pistón opuesto, 483
radial, 485-486
tipo en V, 481
Movilidad, 382
significado, 5-6
Movimiento:
armónico modificado, 222-224
clases de, 33-34
coplanar, 10-11
espacial, 33-34
helicoidal, 32
de una partícula, ecuación del, 411-412
plano, 33-34
polinominal, 234-235, 235-236
rectilíneo, 33-34
relativo, 5-6, 7-8
del seguidor, derivadas del, 217-218
uniforme, 208
de vacilación, 380-381
Movimiento armónico simple, 208-210, 563-564
derivadas del, 222
ecuaciones del, 221-222
gráficas, 560-561
Movimiento cicloidal, 208-210, 210, 212, 563-564
derivadas del, 222
Movimiento parabólico, 208, 563-564
ecuaciones del, 216-217, 217-218
Muffley, R. V., 241*n*, 249*n*

NASTRAN, 200-201
Nayar, J., 24-25
NBS (National Bureau of Standards), xiv
Nelson, G.L., 21*n*
Newton, Isaac, 410
Newton-Raphson, método de, 193-194
Newton (unidad), 413-414
Nodo, 526-528
Normal a las centrodas, 121
Notación:
en el balanceo, 530-531
de bloques, 580-581
polar, 49-50
rectangular, 50-51
rectangular compleja, 51-52
Números:
complejos, 50-51
operaciones, 52-53
duales, 387-388

Orden de encendido, 481
Oscilador deslizador esférico, 386-387
Otto, ciclo de, 481

Palanca angular, 474-475
Pares, 319-320
características de los, 416-417
definición de, 5-6
tipos:
cilíndrico, 7-8
envolvente, 9-10
giratorio, 8-9
globular, 9-10, 383-384
helicoidal, 7-8
inferior, 8-9, 9-10, 419
plano, 7-8, 9-10
prismático, 7-8, 383-384
de rotación (*véase antes* Par giratorio)
superior, 8-9
de tornillo, 383-384
Pars, L. A., 399*n*
Partícula, definición de, 32, 411-412
Pasador, articulación de, 7-8
Paso:
axial, 301-302
de base, 269-271
circular, 259-260
definición, 259-260

diametral, 259-260
normal, 301-302
significado, 410
transversal, 301-302
Peaucellier, inversor de, 23-24, 24-25, 199-200
Péndulo, 452-453
ecuación del, 466-467
de tres hilos, 467-469
trifilar, 467-468
Penetración (*véase* Socavación)
Percusión, centro de, 464-465, 494-495
Perfil cicloidal, 293-294
Perfil de las levas:
coordenadas del, 248-249
trazado del, 212-213
Perfiles conjugados, 260-261
Peso/masa, controversia acerca de, 410*n*
Piñón, 258-259
Planos de corrección, 519
Polígono:
de fuerzas, 421-423
de momentos, 519
de velocidades, 81-83, 87-88
Polinomio de octavo orden, 236-237
Polo de inflexión, 162-163, 164-165
Polodas, 119-120
Polos de velocidad, 101-102
Posición:
absoluta, 36-37
aparente, 34-35
propiedades de la, 31
relativa, 34-35
Posiciones:
extremas del eslabonamiento de manivela-oscilador, 347-348
del volquete, 117
Potenciómetros, 584-585
Precarga, 565
en las levas, 556-557
Precesión, 577-578
velocidad de, 579-580
Presión media efectiva, 489-490
Principia, de Newton, 411-412
Producto cruz (o vectorial), subrutina para el, 472-473
Productos de inercia, 451-452
Programas para computadora, 418, 420
Proporciones de los dientes, para los engranes cónicos, 316, 318
para los engranes helicoidales, 308
tabla, 263-264, 264-265
Punto:
muerto inferior (PMI), 536-537
muerto superior (PMS), 536-537
nodal, método del, 523-524
nulo, 526-528
de paso, 260-261
significado matemático, 32
de trazo, 210, 212
Puntos:
coincidentes, 69-70
conjugados, 161-162
de combinación, 220-221
de precisión, 345-346

Radio:
de giro, 451-452
de paso, equivalente, 303
del rodillo, 243-244
Radio de curvatura, 241-242
ecuación del, 411*n*
mínimo, 250, 254
de los perfiles de levas, 215-216
Rama, defecto de, 344-345
Rapson, corredera de, 175
Rathbone, T.C., 529-530
Raven, Francis H., 96-97
Raven, método de, 182-183, 189
para las aceleraciones, 156-157, 157-158
Raven, procedimiento de, 97-98
Razón:
de amplitud, 512-513
de tiempos, 25-26, 348-349
diámetro interior-carrera, 489-490
r/l, 492-493
Razón de contacto, 277
de los engranes helicoidales, 305-306
fórmula, 277-278, 280
transversal, 305-306
Razón de velocidades, 116-117, 325-326
angulares, 114-115, 260-261, 325-326
Recta generadora, 261-263
Reducción punto-posición, 354-355, 359-360
Regulador automático, 580-581
Relación de velocidades, del mecanismo de corredera-manivela, 492-493
Relaciones manuales, de los engranes helicoidales, 308
Rendimiento:
de los sistemas de máquinas, 582-584
mecánico (*véase* Eficiencia mecánica)
Resorte:
coeficiente del, 555-556
de retención, 561-562
sobretensión del, 567-568

Restricciones, 7-8, 13-14, 39
no esenciales, 385-386
Retorno, carrera de, 24-25
Retroceso:
acción de, 271-274
ángulo de, 277-278, 280
arco de, 274-275
Reuleaux, F., 4-5
Revoluta, 7-8, 383-384
Rigidez:
compleja, 530-531
de flexión, 554
hipótesis de, 4-5, 5-6
del resorte, 555-556
de torsión, 467-468
Roberts, S., 364
Roberts, mecanismo de, 23-24
Rodillos de levas, tamaño de, 247-248
Rosenauer, N., 115-116, 161*n*
Rotación:
convenciones, 50-51
de engranes helicoidales, 308
de un punto, 69
significado, 67-68
Rothbart, H. A., 230*n*, 322*n*, 343*n*
Rótula, articulación de, 9-10, 387-388
Rozamiento (*véase* Fricción)
Rueda de Ginebra, 42, 374
Ruedas (*véase* los engranes específicos)
Ruletas, 119-120

Salto, 558
en los sistemas de levas, 557-558
Sandor, George N., xv, 343*n*, 345-346
Seguidor, 5-6
de cara plana, 206-207
de cuña, 206-207
definición, 204
de leva, oscilante, 474-475
de rodillo, 206-207
Señales, generador de, 524-525
Shigley, Joseph E., 110*n*, 567*n*
SI, 413-414
Simpson, regla de, 574-575
Síntesis, 344-345
cinemática, 343
definición de, 2
del tipo, 343
dimensional, 344-345
numérica, 344-345
Sistema:
de addendum largo y corto, 265-266, 290-292
de circuito cerrado, 580-581
de error proporcional, 580-581
Internacional (SI), 412-413, 413-414
de leva, de movimiento alternativo, 561-562
lineal, 457-458
de realimentación, 580-581
Sistemas:
absolutos, 412-413
de control, 580-581
de coordenadas, 30
gravitacionales, 412-413
de referencia, 30
absolutos, 395-397
Slug, definición de, 413-414
Sobretensión del resorte, 567-568
Socavación, 241-242, 275-276
eliminación de la, 293-294
en los sistemas de levas, 240-241
Soni, A. H., 343*n*, 348-352, 387-388
Soporte planetario, 329-330
Stevensen, Edward N., Jr., xvi, 345*n*, 538-539, 548-549
Stevensen, regla de, 536-537
Stoddart, D. A., 238*n*
Subida, de los movimientos de levas, 207-208
Subrutinas vectoriales, 418-420
Succión, 483, 489-490
Superficie de paso, de los engranes cónicos, 312 314
Superposición, principio de, 457-458, 491-492
Suspensión automotriz, 129
Sustracción vectorial, 42-43
Synge, J. L., 397*n*

Tangentes, centrodas, 172-173
Tao, D. C., 173*n*, 343*n*, 348*n*
Taylor, serie de, 193-194
Tesar, D., 167*n*, 24-25, 221-222
Thearle, E. L., 529-530
Tirón, 217-218
Tolle, Glenn C., xv
Trabadura, 18-20
Trabajo, carrera de, 483
Transductores, 524-525
Transferencia, fórmula de, 451-452
Transformadores diferenciales, 524-525, 585-586
Translación, 463-464
curvilínea, 67-68
definición de, 67-68
Transmisión de los automóviles, 327
Trayectoria, de un punto, 32, 33-34
Tredgold, aproximación de, 315-316, 317
Tren:
de engranes, 226-227
de engranes compuesto, 327

de engranes invertido, 327-329
de engranes simple, 327
planetario, análisis de fuerzas, 432
Tres cilindros, 481
Triángulo esférico, 403-404

Uicker, J. J., Jr., 193-194, 201-202, 250, 254 388*n*
Unidades:
básicas, 412-413
derivadas, 412-413
en programación, 183-184
de sobremarcha, 336-337
Unidades SI, 521-522
para engranes, 258-259
nota acerca de las, 410

Vacilación, movimiento de, 380-381
Valor del tren, 326-327, 333-334
Valores extremos, de las velocidades, 114-115
Vector(es):
análisis de, 51-52
desplazamiento angular, 76
diferencia de aceleraciones, 135-136
operaciones, 42-43, 43-44
operaciones gráficas, 45-46, 46-47
propiedades, 31
tipo de: diferencia de velocidades, 80-81
fuerza, 414-415
libre, 416-417
momento, 415-416
de posición, 34-35, 367
unitario, 31, 52-53
Velocidad:
absoluta, 75
aparente, 88-89
angular, 93-94
cambiador de, 339-340
condición de, para el contacto por rodadura, 152-153
crítica, 511-512
de deslizamiento, 93-94
extremos de la, 114-115
imagen de la, 84-85
tamaño de la, 87-88
instantánea, 74
medición de la, 585-588
polo de, 101-102
promedio, 74
de salto, 558
de los seguidores de las levas, 218-219
teorema de la, angular, 400-401
Velocidad, análisis de la:
del eslabonamiento de cuatro barras, 84-85, 99-100
gráfica, 81-82, 109
de mecanismos espaciales, 392-393
por medio de la línea de los centros, 112
Velocidad angular, 78, 395-397
de los seguidores de las levas, 218-219
diagrama polar de la, 401
en los eslabonamientos de cuatro barras, 99-100
relaciones, 365-366
teorema de la, angular, 400-401
Ventaja mecánica, 18-20, 117
de los sistemas de levas, 215-216
Vidosic, J. P., 24-25
Vista auxiliar, 394-395
Volante, representación del, 572-573
Volquete:
mecanismo de, 20-21
posiciones de, 117
Volumen de desplazamiento, 490-491

Waldron, K. J., 345*n*
Watt, eslabonamiento de, 23-24
Wengert, R. E., 194-195
Whitworth, mecanismo de, 26-27
Willis, A. H., 161*n*
Willis, R., 3*n*
Wolford, J. C., 176*n*

Yang, A. T., 387-388
Yeh, H., 397*n*